

- (30)1.a) İki reel sayının mantissa'ları (gövde kısımları) eşit ve $\text{mantissa}_1 = \text{mantissa}_2 = 0.9999999$ iken 1.inci sayının üssü (exponent'i) = 2.nci sayının üssü (exponent'i) + 3 ise, bu iki sayı arasındaki relatif farkı hesaplayınız.
- b) Aşağıda verilen sayıların, 32-bitlik bir IBM-uyumlu bilgisayarın hafızasında Tek Duyarlılık (Single Precision) durumunda yüzen noktalı (floating point) formatında temsil ediliş biçimlerini yazınız.

$$A = 0.00002345678923$$

$$B = 405678234.56$$

- c) A ve B Tek Duyarlılıkta temsil ediliyorken, $C = A * B$ işleminin Tek Duyarlılık durumunda yapılması sonucu hesaplanan C sayısını yüzen noktalı formatında yazınız.

ÇÖZÜM:

(a)

Birinci reel sayıyı şöyle gösterelim: $RS1 = 0.m1 \times 10^{\text{üs}1}$

İkinci reel sayıyı şöyle gösterelim: $RS2 = 0.m2 \times 10^{\text{üs}2}$

Soruda, $m1 = m2 = 0.9999999 \approx 1$ ve $\text{üs}2 = \text{üs}1 + 3$ olarak veriliyor. O halde bu reel sayıları:

$RS1 = 0.m1 \times 10^{\text{üs}1}$ $RS2 = 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)}$ olarak ta yazabiliriz.

Bu iki reel sayı arasındaki Relatif Farkı yazarsak:

$$RF1 = |(RS1 - RS2)/RS2| \text{ veya } RF2 = |(RS1 - RS2)/RS1|$$

$$\text{veya } RF3 = |(RS2 - RS1)/RS2| \text{ veya } RF4 = |(RS2 - RS1)/RS1| \text{ olarak yazılabilir.}$$

DOĞRU ANALİZ YAPILDIĞI TAKDİRDE BUNLARIN DÖRDÜ DE DOĞRU KABUL EDİLECEKTİR
VE MUTLAK FARKLAR ALINMADAN DA DOĞRU KABUL EDİLECEKTİR!

$$RF1 = |(RS1 - RS2)/RS2| = |(0.m1 \times 10^{\text{üs}1} - 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)}) / 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)}|$$

Payı ve paydayı $10^{\text{üs}1}$ ortak çarpan parantezine alırsak:

$$RF1 = |[10^{\text{üs}1} \times (1 - 1 \times 10^{(+3)})] / 1 \times 10^{(\text{üs}1)} \times 10^{(+3)}| = |(-999) / 1 \times 10^{(+3)}| = |-0.999| \approx +1$$

$$RF2 = |(RS1 - RS2)/RS1| = |(0.m1 \times 10^{\text{üs}1} - 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)}) / 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1)}|$$

Payı ve paydayı $10^{\text{üs}1}$ ortak çarpan parantezine alırsak:

$$RF2 = |[10^{\text{üs}1} \times (1 - 1 \times 10^{(+3)})] / 1 \times 10^{(\text{üs}1)}| = |(-999) / 1| = |-999| \approx |-10^{(+3)}| = +1000$$

$$RF3 = |(RS2 - RS1)/RS2| = |(0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)} - 0.m1 \times 10^{\text{üs}1}) / 0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)}|$$

Payı ve paydayı $10^{\text{üs}1}$ ortak çarpan parantezine alırsak:

$$RF3 = |[10^{\text{üs}1} \times (1 \times 10^{(+3)} - 1)] / 1 \times 10^{(\text{üs}1)} \times 10^{(+3)}| = |(+999) / 1 \times 10^{(+3)}| = +0.999 \approx +1$$

$$RF4 = |(RS2 - RS1)/RS1| = |(0.m1 \times 10^{(\text{üs}1 + 3)} - 0.m1 \times 10^{\text{üs}1}) / 0.m1 \times 10^{\text{üs}1}|$$

Payı ve paydayı $10^{\text{üs}1}$ ortak çarpan parantezine alırsak:

$$RF4 = |[10^{\text{üs}1} \times (1 \times 10^{(+3)} - 1)] / 1 \times 10^{(\text{üs}1)}| = |(+999) / 1| = +999 \approx +1000$$

b)

Tek Hassasiyet durumunda mantissa'da 7 anlamlı hane alınır, 7.inci hane 8.inci haneye göre yuvarlatılır. O halde, verilen sayılar ve Tek Hassasiyet durumunda yüzen noktalı temsilleri:

$$A = 0.00002345678923 = 0.2345679 \times 10^{-4}$$

$$B = 405678234.56 = 0.4056782 \times 10^{+9}$$

c) $A \times B = 0.2345679 \times 10^{-4} \times 0.4056782 \times 10^{+9} = (0.2345679) \times (0.4056782) \times 10^{(+9-4)}$ veya:
 $A \times B = 0.09515908 \times 10^{(+5)} = 0.9515908 \times 10^{(+4)}$

(40) **2.a)** Önce hesap makinenizi RAD durumuna getirin. Hesap makineniz RAD durumunda iken, $\sin(x) \cdot e^x - x^2 \cdot \ln(x) = 0$ denkleminin $2 < x < 3$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz.

b) Newton-Raphson veya Kiriş yöntemini kullanarak, bu kökü, son iki iterasyon arasındaki relatif fark, $RF \leq 1 \times 10^{-2}$ olacak duyarlılıkta hesaplayın.

Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - f_i / f'_i$$

Kiriş:

$$x_{i+2} = (x_i \cdot f_{i+1} - x_{i+1} \cdot f_i) / (f_{i+1} - f_i)$$

ÇÖZÜM:

(a) Hesap makinesi RAD durumuna getirildikten sonra,

$$f(x=2) = \sin(2) \cdot e^2 - 2^2 \cdot \ln(2) = (0.909297) \cdot (7.389056) - 4 \cdot (0.693147) = 6.71885 - 2.77259 \text{ veya,}$$

$$f(x=2) = 3.946$$

$$f(x=3) = \sin(3) \cdot e^3 - 3^2 \cdot \ln(3) = (0.14112) \cdot (20.08554) - 9 \cdot (1.09861) = 2.83447 - 9.88751 \text{ veya,}$$

$$f(x=3) = -7.053$$

$f(x=2) \cdot f(x=3) = -27.83$ olduğu için, veya $f(x=2)$ pozitif iken $f(x=3)$ negatif olduğu için, veya $2 \leq x \leq 3$ aralığında $f(x)$ pozitiften negatife geçtiği için, veya $2 \leq x \leq 3$ aralığında $f(x)$ işaret değiştirdiği için $2 \leq x \leq 3$ aralığında bir kök vardır.

(b)

(1) Newton-Raphson:

(i) Önce analitik olarak $f(x)$ 'in x 'e göre birinci türevini almalıyız:

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^x - x^2 \cdot \ln(x) \text{ olduğuna göre, } f'(x) = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x - 2x \cdot \ln(x) - x^2/x \text{ veya:}$$

$$f'(x) = [\cos(x) + \sin(x)] \cdot e^x - 2x \cdot \ln(x) - x = [\cos(x) + \sin(x)] \cdot e^x - [2 \cdot \ln(x) + 1] \cdot x$$

Newton-Raphson Yöntemiyle iterasyonlar:

$$x_{i+1} = x_i - f_i / f'_i = x_i - [\sin(x_i) \cdot e^{x_i} - x_i^2 \cdot \ln(x_i)] / \{[\cos(x_i) + \sin(x_i)] \cdot e^{x_i} - [2 \ln(x_i) + 1] \cdot x_i\}$$

ifadesiyle yapılacaktır.

(ii) Başlangıç tahmini olarak ilk verilen kökü içeren aralığın ortasından başlamak en uygun yaklaşımdır. O halde, $x_0 = (2+3)/2 = 2.5$

Newton-Raphson Yöntemiyle iterasyonlar aşağıdaki tablolar içinde yapılmalıdır:

Başlangıç tahmini olarak: $x_0 = 2.5$ verildiği vakit iterasyonlar aşağıdaki tablodaki gibidir:

İt.No.	x_0	f_0	f'_0	x_1	Rel.Fark
1	2.5	1.56407	-9.55050	2.66377	6×10^{-2}
2	2.66377	-0.35297	-14.02742	2.63861	1×10^{-2}

Başlangıç tahmini olarak: $x_0 = 2.0$ verildiği vakit iterasyonlar aşağıdaki tablodaki gibidir:

İt.No.	x0	f0	f'0	x1	Rel.Fark
1	2.	3.94626	-1.12867	5.49638	6×10^{-1}
2	5.49638	-224.12140	-24.71506	-3.57183	3×10^{-1}

Başlangıç tahmini olarak: $x_0 = 2.0$ verildiği vakit iterasyonlar aşağıdaki tablodaki gibidir:

İt.No.	x0	f0	f'0	x1	Rel.Fark
1	3.	-7.05304	-26.64173	2.73526	1×10^{-1}
2	2.73526	-1.43611	-16.30649	2.64719	3×10^{-2}

(2) Kiriş:

Kiriş Yöntemiyle iterasyonlar,

$x_{i+2} = (x_i \cdot f_{i+1} - x_{i+1} \cdot f_i) / (f_{i+1} - f_i)$ ifadesiyle hesaplanacak. Burada:

iki adet başlangıç tahmini ile başlanacak ve iterasyonlardaki f_i ve f_{i+1} aşağıdaki ifadelerden hesaplanacaktır:

$$f_i = x_i - [\sin(x_i) \cdot e^{x_i} - x_i^2 \cdot \ln(x_i)] \quad \text{ve} \quad f_{i+1} = x_{i+1} - [\sin(x_{i+1}) \cdot e^{x_{i+1}} - x_{i+1}^2 \cdot \ln(x_{i+1})]$$

Başlangıç tahminleri olarak: $x_0 = 2.0$ ve $x_1 = 3.0$ verildiğinde iterasyonlar aşağıdaki gibidir:

İt.No.	x1,x2	fi	x0*f1-x1*f0	f1-f0	x3	Rel.Fark
	2.	3.94626				
1	3.	-7.05304	-25.94486	-10.99930	2.35877	3×10^{-1}
2	2.35877	2.68590	24.69421	9.73894	2.53562	7×10^{-2}

Başlangıç tahminleri olarak: $x_0 = 2.0$ ve $x_1 = 2.5$ verildiğinde iterasyonlar aşağıdaki gibidir:

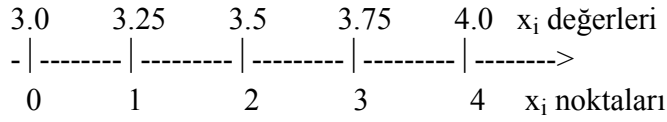
İt.No.	x1,x2	fi	x0*f1-x1*f0	f1-f0	x3	Rel.Fark
	2.	3.94626				
1	2.5	1.56407	-6.73752	-2.38219	2.82828	$.1 \times 10^0$
2	2.82828	-3.10272	-12.18043	-4.66679	2.61002	$.8 \times 10^{-1}$

Başlangıç tahminleri olarak: $x_0 = 2.5$ ve $x_1 = 3.0$ verildiğinde iterasyonlar aşağıdaki gibidir:

İt.No.	x1,x2	fi	x0*f1-x1*f0	f1-f0	x3	Rel.Fark
	2.5	1.56407				
1	3.0	-7.05304	-22.32480	-8.61711	2.59075	$.2 \times 10^0$
2	2.59075	0.59261	20.05052	7.64565	2.62247	$.1 \times 10^{-1}$

(30)3. $y'' = y' - 3x^2 + 6x$ diferansiyel denkleminde y nin çözülmesi istenen ilgi alanı, integrasyon sabitleri, x için $\Delta x = h$ ara adımları, ve ilgi alanı içinde çözüm için x şebekesi aşağıda veriliyor.

$$\text{İlgi alanı : } 3 \leq x \leq 4, \quad y_0 = y(x=3) = 6.9145, \quad y_4 = y(x=4) = 9.4018, \quad \Delta x = h = 0.25$$



Bu problemde, $x=3.25$, $x=3.5$, ve $x= 3.75$ teki y değerlerini Sonlu Farklar Yöntemiyle çözümü için gerekli denklem takımını oluşturunuz.

Nümerik türevler için Merkezi Farklar formülleri:

$$y''_i \approx (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / (h^2)$$

$$y'_i \approx (-y_{i-1} + y_{i+1}) / (2h)$$

ÇÖZÜM:

Önce, ilgi alanı içinde herhangi bir i 'nci noktada diferansiyel denklemi, Merkezi Farklar Nümerik Türev Formüllerini kullanarak Sonlu Farklar biçiminde yazalım:

Diferansiyel denklem:

$y'' - y' = -3x^2 + 6x$ biçimindedir. Sonlu Farklar halinde bunu:

$$(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / (h^2) - (-y_{i-1} + y_{i+1}) / (2h) = -3x_i^2 + 6x_i \text{ olarak yazabiliriz.}$$

$h = 0.25$ olduğuna göre bunu:

$16 \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - 2 \cdot (-y_{i-1} + y_{i+1}) = -3x_i^2 + 6x_i$ olarak yazabiliriz. Cebrik işlemleri yapar, ortak terimleri toplarsak:

$16 \cdot y_{i-1} - 32 \cdot y_i + 16 \cdot y_{i+1} + 2 \cdot y_{i-1} - 2 \cdot y_{i+1} = -3x_i^2 + 6x_i$ olarak ve sonuçta en öz olarak:

$18 \cdot y_{i-1} - 32 \cdot y_i + 14 \cdot y_{i+1} = -3x_i^2 + 6x_i$ halinde yazarız. Bu genel haldeki Sonlu Farklar Denklemini, sırayla önce 1.inci, sonra 2.nci, ve en sonra 3.üncü noktaya uygulayacağız.

$i = 1$ iken Sonlu Farklar Denklemini:

$$18 \cdot y_0 - 32 \cdot y_1 + 14 \cdot y_2 = -3x_1^2 + 6x_1 = -3 \cdot (3.25)^2 + 6 \cdot (3.25) = -31.6875 + 19.5 = -12.1875$$

Birinci sınır şartından: $y_0 = 6.9145$ olarak verildiğine göre, bu denklem:

$$124.461 - 32 \cdot y_1 + 14 \cdot y_2 = -12.1875 \text{ veya:}$$

$$-32 \cdot y_1 + 14 \cdot y_2 = -136.6485 \text{ halinde yazılır. Bu birinci denklemdir.}$$

$i = 2$ iken Sonlu Farklar Denklemini:

$$18 \cdot y_1 - 32 \cdot y_2 + 14 \cdot y_3 = -3x_2^2 + 6x_2 = -3 \cdot (3.5)^2 + 6 \cdot (3.5) = -36.75 + 21.0 = -15.75 \text{ veya:}$$

$$18 \cdot y_1 - 32 \cdot y_2 + 14 \cdot y_3 = -3x_2^2 + 6x_2 = -15.75 \text{ Bu ikinci denklemdir.}$$

$i = 3$ iken Sonlu Farklar Denklemini:

$$18 \cdot y_2 - 32 \cdot y_3 + 14 \cdot y_4 = -3x_3^2 + 6x_3 = -3 \cdot (3.75)^2 + 6 \cdot (3.75) = -42.1875 + 22.5 = -19.6875$$

İkinci sınır şartından: $y_4 = 9.4018$ olarak verildiğine göre, bu denklem:

$$18 \cdot y_2 - 32 \cdot y_3 + 14 \cdot (9.4018) = -19.6875 \text{ veya:}$$

$$18 \cdot y_2 - 32 \cdot y_3 + 131.6252 = -19.6875 \text{ veya:}$$

$18 \cdot y_2 - 32 \cdot y_3 = -151.3127$ Bu da üçüncü ve sonuncu denklemdir.

O halde, oluşan lineer denklem takımı:

$$\begin{bmatrix} -32.0 & +14.0 & 0.0 \\ +18.0 & -32.0 & +14.0 \\ 0.0 & +18.0 & -32.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -136.6485 \\ -15.75 \\ -151.3127 \end{bmatrix}$$