

Bölüm 3: Determinantlar

3.1 Determinantlar

Bir kare matrisin determinanı, o matrisi bir sayıya eşleyen bir fonksiyondur.

Tanım 3.1. Bir A kare matrisinin determinanı, $\det(A)$ ya da $|A|$ ile gösterilir.

(i) 1×1 mertebeden bir $A = [a]$ kare matrisinin determinanı:

$$\det(A) = |A| = |a| = a$$

Örnek:

$$A = [12] \quad \Rightarrow \quad |A| = 12$$

(ii) 2×2 mertebeden $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ kare matrisinin determinanı:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad |A| = -1(-4) - 3(2) = -2$$

(iii) 3×3 mertebeden $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ kare matrisinin determinanı:

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad |A| = 1(4(5) - 3(6)) - 2(-2(5) - 3(7)) + 5(-2(6) - 4(7)) = -136$$

3.1.1 Sarrus Yöntemi

Yalnızca 2×2 ve 3×3 mertebeden matrislere uygulanabilen kolay bir yöntemdir. Daha büyük mertebeden matrislere uygulanamaz.

2×2 matrisleri ele alırsak; determinanı hesaplamak için köşegenler üzerindeki elemanlar dikkate alınır. Soldan sağa köşegen pozitif temel çarpım sağdan sola köşegen negatif temel çarpımı ile toplanır. Buradan: $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Bu yöntemi 3×3 matrislere uygulamak için 1. ve 2. sütun bileşenleri matrisin sağına sırasıyla eklenir. Ardından, soldan sağa köşegenlerin temel çarpımı pozitif, sağdan sola köşegenlerin temel çarpımı negatif alınarak, tüm değerler toplanır ve determinant bulunur.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Not: Aynı işlem matrisin ilk iki satırı matrisin altına yazılarak da gerçekleştirilebilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını Sarrus yöntemi ile bulun.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 2(-9) = 33$$

Örnek: $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını Sarrus yöntemi ile bulun.

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 & 2 & -6 \\ 2 & -8 & 3 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = |B| = 2(-8)(1) + (-6)(3)(3) + 2(2)(1) - 2(-8)(3) - 2(3)(1) - (-6)(2)(1) = -12$$

Sarrus yönteminin 3×3 mertebeden matrislerde geçerli olduğunu daha yüksek mertebeden matrislere bu yöntemin uygulanamayacağını hatırlayınız. Bu sebeple tüm mertebeden matrislerin determinantlarını hesaplamada kullanabileceğimiz genel determinant tanımına ihtiyacımız vardır.

3.1.2 Genel Determinant Tanımı

Determinantın genel tanımını vermeden önce, determinant tanımında kullanacağımız minör ve kofaktör kavramları üzerinde duracağız.

Tanım 3.2. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ mertebeden bir kare matris olsun. M_{ij} , A matrisinden i . satır ve j . sütunun silinmesi ile elde edilen matris olmak üzere, M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının **minörü** denir.

Ayrıca, $c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ ifadesine, a_{ij} elemanının **kofaktörü** (eş çarpan) denir ve c_{ij} ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için c_{11} , c_{22} ve c_{23} kofaktörlerini bulun.

$$\begin{bmatrix} \overset{\text{0}}{\underset{\text{4}}{\text{3}}} & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \\ 0 & 1 & \end{bmatrix} \quad c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1(1) - 2(0)) = -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \overset{\text{2}}{\underset{0}{-1}} & 1 \\ -3 & \overset{\text{-1}}{\underset{0}{-1}} & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(0(1) - 1(4)) = -4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & \overset{\text{1}}{\underset{0}{-2}} \\ -3 & -1 & \overset{\text{2}}{\underset{0}{-2}} \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0 - 2(4)) = 8$$

Kofaktör ile determinant hesabı için takip edilen teoremden yararlanılır:

Teorem 3.1. $n \geq 2$ olmak üzere; A , $n \times n$ mertebeden kare matris olsun. A matrisinin determinantı, A matrisinin herhangi bir satır ya da sütunundaki tüm elemanların kofaktörleri ile çarpımının toplamına eşittir. Buna göre;

(i) A matrisinin i . satıra göre determinantı:

$$\det(A) = |A| = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{ik}, \quad i = (1, 2, \dots, n)$$

(ii) A matrisinin j . sütuna göre determinantı:

$$\det(A) = |A| = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}c_{kj}, \quad j = (1, 2, \dots, n)$$

Determinantın bu şekilde hesaplanmasına, **Laplace açılımı** denir. Satır veya sütuna göre determinant alınabilir. Determinantın bu yolla hesaplanmasında açılım için en çok sıfır içeren satır veya sütun tercih edilir.

Not: Determinant açılımındaki elemanların kofaktör (eş çarpan) ön işaretleri satranç tahtasındaki siyah ve beyaz karelere benzer şekilde dağılır.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını aşağıda verilen Laplace açılımlarını kullanarak bulun

a) İlk satır için Laplace açılımı

b) 3. sütun için Laplace açılımı

Çözüm:

a) İlk satır için Laplace açılımı

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ \det(A) &= 4(1) \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} + 1(1) \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 4(-15) - 2(-21) + 1(32) = 14 \end{aligned}$$

b) 2. sütun için Laplace açılımı

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33} \\ \det(A) &= 1(1) \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 0(1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 1(32) - 3(6) + 0 = 14 \end{aligned}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayın.

Çözüm:

Laplace açılımı için 3. sütun tercih edilir

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33} + a_{43}c_{43} \\ &= 3(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \text{ determinantı 2. satıra göre açılırsa}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2(1)(-4) + 3(-1)(-7) = 13$$

Determinant sonucu ilk denklemde yerine konursa:

$$\det(A) = 3(1)(13) + 0 + 0 + 0 = 39$$

3.2 Determinant Özellikleri

Teorem 3.2. (*Skaler çarpımının determinantı*) A , $n \times n$ mertebeden bir matris ve λ , bir skaler olmak üzere;

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -1 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisini için $\det(A)$ ve $\det(2A)$ nedir?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 10 \\ -2 & -14 & 20 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 45$$

$$\det(2A) = 360$$

$$\det(2A) = 8(45) = 2^3 \det(A)$$

Örnek: 4×4 mertebeden $A = [a_{ij}]$ matrisinin determinantı 2 ise $\det(3A)$ nedir?

$$\det(3A) = 3^4 \det(A) = 3^4(2) = 162$$

Teorem 3.3. A , $n \times n$ mertebeden bir matris olsun. A matrisinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirilirse determinant işaret değişir.

B , A matrisinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirilmesi ile elde edilen matris olsun:

$$\det(B) = -\det(A)$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin 1. satırı ve 3. satırı yer değiştirilerek elde edilen matris B olsun $\det(A)$ ve $\det(B)$ nedir?

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 31 \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -31$$

$$\det(A) = -\det(B)$$

Teorem 3.4. (Matris çarpımının determinanı) A ve B $n \times n$ mertebeden kare matrisler olmak üzere;

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor, $\det(AB)$ nedir?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(AB) = -77 = \det(A)\det(B)$$

Teorem 3.5. (Bir matrisin transpozesein determinanı) A $n \times n$ mertebeden kare matrisinin determinanı, transpozeseinin determinantına eşittir.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için $\det(A)$ ve $\det(A^T)$ determinantlarını hesaplayın.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \quad \det(A^T) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

Teorem 3.6. (Bir matrisin tersinir olma şartı) $n \times n$ mertebeden A kare matrisi, ancak ve ancak $\det(A) \neq 0$ ise tersinirdir.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(B) = 3 \text{ olduğundan } B \text{ tersinirdir} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -10/3 & 5/3 & 7/3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(C) = 0 \text{ olduğundan } C \text{ tersinir değildir.}$$

Örnek

Teorem 3.7. (Üçgen matrisin determinanı) A $n \times n$ mertebeden üçgen matris olsun. A matrisinin determinanı, asal köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı $\det(A)$ nedir?

3. satıra göre Laplace açılımı yapılırsa:

$$\det(A) = 3(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(1)(-2) = -6$$

A matrisi üçgen matris olduğu için determinantı asal köşegen elemanların çarpımı olarak da hesaplanabilir:

$$\det(A) = 2(-1)(3) = -6$$

Örnek: $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $\det(B)$ nedir?

B matrisi üçgen matris olduğu için determinantı asal köşegen elemanların çarpımı ile hesaplanabilir:

$$\det(B) = 2(-2)(1)(3) = -12$$

Örnek: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $\det(C)$ nedir?

$$\det(C) = 1(2)(5) = 10$$

Not:(Birim matrisin determinantı) $n \times n$ mertebeden bir birim matrisin determinantı 1'dir

$$\det(I_n) = 1$$

Teorem 3.8. (Matris tersinin determinantı) A , $n \times n$ mertebeden bir tersinir matris olmak üzere:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

İspat. Bir matrisin, tersi ile çarpımı birim matrise eşit olduğuna göre:

$$AA^{-1} = I_n$$

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n)$$

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

□

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin determinantı $\det(A^{-1})$ nedir?

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 1 & -3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{4} \quad \det(A) = 4 \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Örnek: A, B ve C, 5×5 mertebeden matrisler olmak üzere, $\det(A) = 5$, $\det(B) = -12$ ve $\det(C) = 3$ ise $\det(2AB^{-2}C^3) = ?$

$$\begin{aligned}\det(2AB^{-2}C^3) &= \det(2A)\det(B^{-2})\det(C^3) \\ &= 2^5 \det(A) \frac{1}{\det(B)^2} (\det(C))^3 \\ &= 2^5 (5) \frac{1}{(-12)^2} 3^3 = 30\end{aligned}$$

Örnek: A, tersinir bir matris ve $A^2 = A$ ise $\det(A) = ?$

A tersinir matris ise $\det(A) \neq 0$.

$$A^2 = A \quad \Rightarrow \quad \det(A^2) = \det(A)^2 = \det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A)^2 - \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\det(A) - 1)\det(A) = 0$$

$\det(A) \neq 0$ olduğundan $\det(A) = 1$ olarak bulunur.

Teorem 3.9. A matrisi, $n \times n$ mertebeden bir kare matris olmak üzere:

- (i) Herhangi bir satır ya da sütun elemanlarının tamamı sıfır ise determinanı da sıfırdır.
- (ii) Herhangi iki satır ya da sütun birbirine eşit ise determinanı sıfırdır.
- (iii) Herhangi iki satır ya da sütun elemanları karşılıklı olarak orantılı ise determinant sıfırdır.

Örnek:

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A matrisinin 3. satırının ve B matrisinin 2. sütununun tamamı sıfır olduğundan:

$$\det(A) = \det(B) = 0$$

(ii)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

C matrisinin 1. ve 3. satırı birbirine eşit olduğundan:

$$\det(C) = 0$$

(iii)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

D matrisinin 3. sütunu, 1. sütunun -3 katı olduğundan:

$$c_3 = -3c_1 \text{ olduğundan } \det(D) = 0$$

3.2.1 Temel Satır İşlemleri ve Determinant

Herhangi bir matrisin determinanı bulunurken satır işlemlerinden yararlanılabilir. $n \times n$ mertebeden A matrisine belirli bir temel satır işlemi uygulanarak B matrisi elde edilsin.

$$\det(B) = \det(E)\det(A)$$

Buna göre takip eden teorem, temel satır işlemlerinin matrisin determinantına etkisi tanımlanmaktadır:

Teorem 3.10. A , $n \times n$ mertebeden bir kare matris olmak üzere;

(i) B matrisi, A matrisinin herhangi bir satır veya sütununun λ skaleri ile çarpımı ile elde edilen matris ise

$$\det(B) = \lambda \det(A)$$

(ii) B matrisi, A matrisinin herhangi iki satır veya sütununun yer değiştirilmesi ile elde edilen matris ise

$$\det(B) = -\det(A)$$

(iii) B matrisi, A matrisinin bir satır veya sütununun bir λ skaleri ile çarpımının bir başka satır veya sütun ile toplanması ile edilen matris ise

$$\det(B) = \det(A)$$

Örnek:

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2 R_1} B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \det(A) = 2 \\ \det(B) = 1 \end{array}$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} B = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \det(A) = 2 \\ \det(B) = -2 \end{array}$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \det(A) = 2 \\ \det(B) = 2 \end{array}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı $\det(A)$ nedir?

Verilen matrisin determinantını bulmak için matrisi, elemanter satır işlemlerini kullanarak determinanı daha kolay hesaplanabilir hale getirebiliriz

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1/7 R_2} 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 - R_2} 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7(1)(1)(-1) = -7 \end{aligned}$$

Örnek: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı $\det(B)$ nedir?

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(1)(4)(2) = -8$$

Örnek: $C = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı $\det(C)$ nedir?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 + 2C_1}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Örnek: $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı $\det(D)$ nedir?

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{R_2 - 2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow -2R_2 = R_3 \text{ olduğundan } \det(D) = 0$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinir olmaması için x ne olmalıdır?

Çözüm:

A matrisinin tersinir olmaması için $\det(A) = 0$ olmalıdır:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{1}{(x+2)}C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{1}{(x-2)}C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{1}{(x+4)}C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(x+2)(x-2)(x+4)1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, x = -2, x = -4 \text{ olduğunda A matrisinin tersi yoktur.}$$

3.3 Determinant Uygulamaları

3.3.1 Ek Matris (Adjoint Matrix)

Tanım 3.3. A , $n \times n$ mertebeden kare matris olsun. Kofaktörler matrisinin transpozu A matrisinin ek (adjoint) matrisi olarak adlandırılır. $EkA, AdjA, adj(A)$ veya A^* ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için $adj(A)$ nedir?

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \quad C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \quad C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \quad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.11. A $n \times n$ mertebeden bir tersinir matris olmak üzere;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Not: 2×2 mertebeden matrislerin terslerinin ek matris kullanılarak hesaplanmasını daha önce vermiştik:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Örnek: $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulun.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2 & 7/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen A ve C matrisleri için $AB = C$ eşitliğini sağlayan B matrisini bulunuz.

Çözüm:

Eşitliğin her iki tarafı A^{-1} ile çarpılırsa:

$$AB = C \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AB = A^{-1}C \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}C$$

A matrisinin tersinin ek matris yöntemi ile hesaplınsın:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Buradan B matrisi bulunur:

$$B = A^{-1}C = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ödev: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulun.

3.3.2 Cramer Kuralı

Katsayılar matrisi determinantının sıfır olmadığı durumlarda lineer denklem sistemleri Cramer yöntemiyle çözülebilir.

Teorem 3.12. *A matrisi, $n \times n$ mertebeden tersinir matris olsun. $Ax = b$ denklem sistemin çözümü:*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

burada A_i , A matrisinin i . sütununun b sütun matrisi ile yer değiştirilmesi ile elde edilen matristir.

Not: Cramer kuralını kullanabilmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Örnek: $\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{matrix}$ lineer denklem sisteminin Cramer yöntemi ile çözümü:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Örnek:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözün.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$A \quad \quad x \quad \quad b$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14$$

Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğu için Cramer yöntemi uygulanabilir:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{14}{-14} = -1$$

$$\mathbf{x_1 = 2, \quad x_2 = -1}$$

Örnek: Aşağıda verilen lineer denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözün.

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Çözüm:

A katsayılar matrisinin determinantını, 2. satırın Laplace açılımı ile hesaplayalım

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -2(-4) - 1(-2) = \mathbf{10} \end{aligned}$$

Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğu için Cramer yöntemi uygulanabilir:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{1(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{10}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -20 + 5 = -15$$

$$y = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2}$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

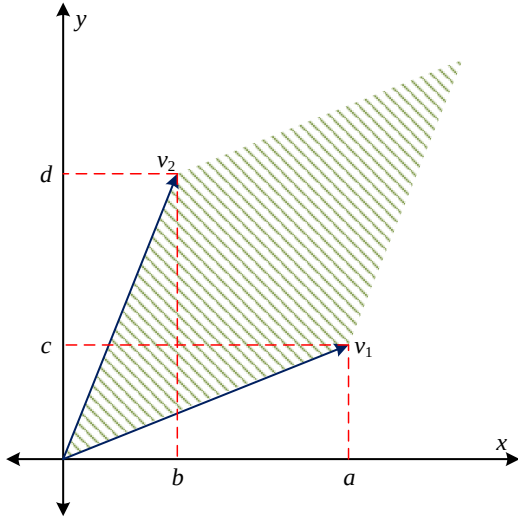
$$x = \frac{4}{5} \quad y = \frac{-3}{2} \quad z = \frac{-8}{5}$$

Ödev:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözün.

3.3.3 Alan, Hacim ve Doğru Denklemleri



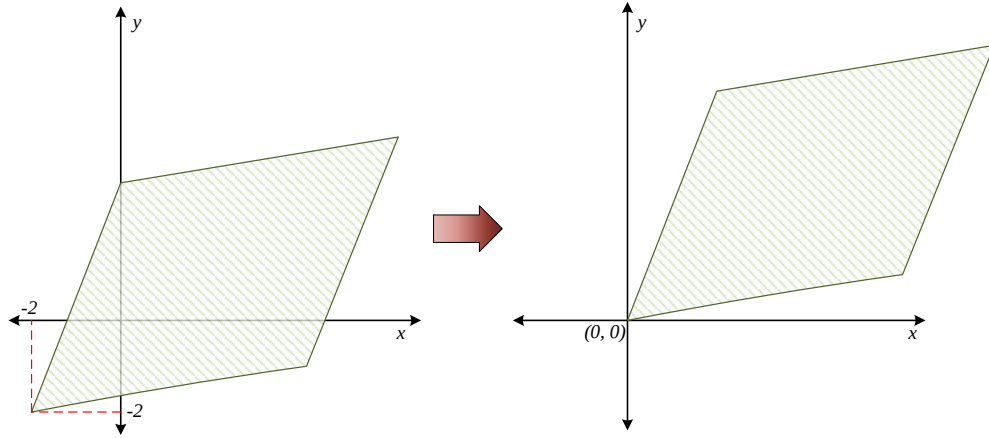
A, 2×2 mertebeden bir matris olmak üzere, A matrisinin sütunları ile tanımlanan paralel kenarın alanı $|\det(A)|$ olarak bulunur.

Yanda verilen paralel kenar; $\vec{v}_1 = (a, c)$ ve $\vec{v}_2 = (b, d)$ vektörleri ile tanımlansın. Bu durumda, paralel kenarın alanı takip eden determinant ile hesaplanabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\text{Alan} = |\det(A)|$$

Örnek: $(-2, -2)$, $(0,3)$, $(4,-1)$ ve $(6, 4)$ noktaları ile tanımlanan paralel kenarın alanını bulunuz.

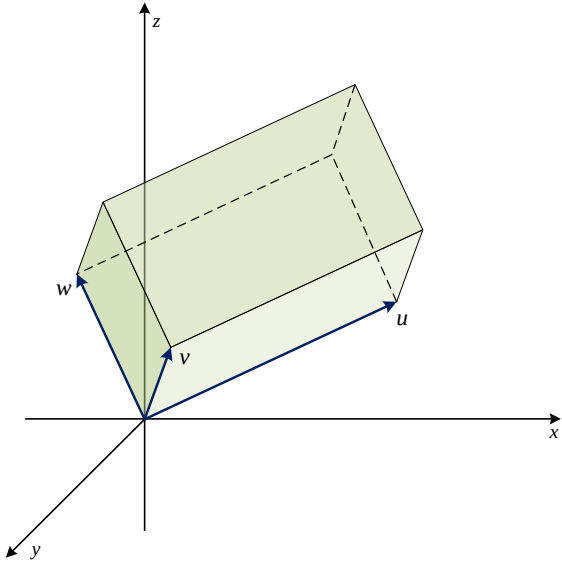


$(-2, -2)$ noktasındaki köşeyi $(0, 0)$ noktasına taşımak için tüm köşelerden $(-2, -2)$ çıkartılır. Böylece başlangıçta verilen noktalar sırasıyla $(0, 0)$, $(2, 5)$, $(6, 1)$ ve $(8, 6)$ noktalarına ötelenmiş olur. Paralel kenarı tanımlayan matris:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Paralel kenarın alanı, A matrisinin determinanı olarak bulunur.

$$\text{alan} = |\det(A)| = |2(1) - 6(5)| = |-28| = 28$$



A, 3×3 mertebeden bir matris olmak üzere, A matrisinin sütunları ile tanımlanan paralel yüzün hacmi $|\det(A)|$ olarak bulunur.

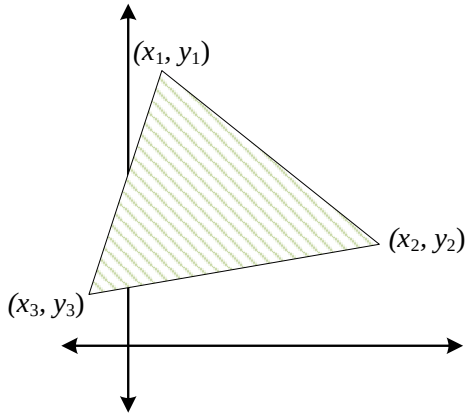
Yanda verilen paralelyüzlü; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörleri ile tanımlansın. Bu durumda paralelyüzün hacmi takip eden determinant ile hesaplanabilir:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$Hacim = |\det(A)|$$

Örnek $u = (3, 2, 1)$, $v = (-1, 3, 0)$ ve $w = (2, 2, 5)$ vektörleri tanımlanan paralel yüzün hacmi nedir?

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 = 1(8) + 3(13) = 47$$



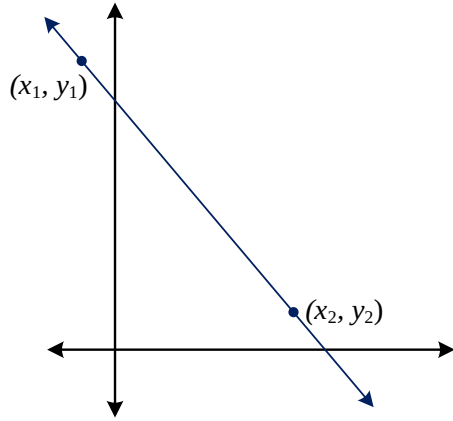
(x_1, y_1) , (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) noktalarında köşeleri bulunan üçgenin alanı:

$$alan = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek Köşeleri $(1, 0)$, $(2, 2)$ ve $(4, 3)$ noktalarında bulunan üçgenin alanı nedir?

$$\begin{aligned} alan &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}) \\ &= \frac{1}{2} (-1 + (-2)) = \frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: $(2, 4)$ ve $(-1, 3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi nedir?

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$