Bölüm 2: Matrisler

2.1 Matrisler

Tanım 2.1. *Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen,*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{2.1}$$

şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir matris ya da kısaca $m \times n$ matris denir. Matrisin satır ve sütun sayısını gösteren $m \times n$ ifadesine matrisin mertebesi denir.

- Matrisler büyük harflerle isimlendirilir: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ vb. Bir $\mathbf{A}$ matrisinin i. satır ve j. sütununda bulunan elemanı a_{ij} ya da $(A)_{ij}$ şeklinde gösterilir. $\mathbf{A}$ matrisi $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$ şeklinde gösterilir.
- Bir tek satırdan oluşan matrise **satır matrisi** denir. Satır matrisinin mertebesi $1 \times n$'dir.

$$\mathbf{b} = \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

- Bir tek sütundan oluşan matrise **sütun matrisi** denir. Sütun matrisinin mertebesi $m \times 1$'dir.

$$\mathbf{a} = \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir. Kare matrisin mertebesi $m \times m$'dir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m}$$

  $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$, $m \times m$ mertebesinde bir kare matris olmak üzere; $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ elemanlarına $\mathbf{A}$ matrisinin **asal köşegen elemanları** denir.

  Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına **matrisin izi** (trace) denir.

$$\mathbf{izA} = \mathbf{a_{11}} + \mathbf{a_{22}} + \mathbf{a_{33}} + \cdots + \mathbf{a_{mm}}$$

- Tüm elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. Sıfır matrisi $0_{m\times n}$ ile gösterilir.

$$0_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$, $m \times m$ mertebeden bir kare matris olmak üzere A matrisinin asal köşegen dışındaki elemanları sıfırsa bu matrise **köşegen matris** denir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Bir kare matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1, diğer tüm elemanlar 0 ise bu matrise **birim matris** denir. $m \times m$ mertebeden birim matris I_m ile gösterilir.

$$\mathbf{I_1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Bir kare matrisin asal köşegeninin üstündeki veya altındaki elemanların tamamı sıfır ise bu matrise **üçgen matris** denir. Şayet asal köşegenin üstündeki elemanlar sıfır ise **alt üçgen matris**, altındaki elemanlar sıfır ise **üst üçgen matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

matrisleri sırasıyla alt ve üst üçgen matrislerdir.

2.2 Matrislerde İşlemler

Tanım 2.2. *(**Matris eşitliği**) Karşılıklı elemanları eşit olan, aynı mertebeden matrislere **eşit matrisler** denir. $m \times n$ mertebeden $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$ ve $\mathbf{B} = [\mathbf{b_{ij}}]$ matrisleri eşit ise $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ şeklinde yazılır. Farklı mertebeden matrisler eşit olamaz.*

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & t & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & y \\ x & -6 & z \end{bmatrix},$$

matrislerinin eşit olması için yeter ve gerek koşul: $x = 2, y = -7, z = 3, t = -6$ olmasıdır.

Tanım 2.3. *(**Matris toplamı**) **A** ve **B**, $m \times n$ mertebesinden iki matris ise bunların toplamı karşılıklı elemanların toplamıyla elde edilen aynı mertebeden $(m \times n)$ yeni bir matristir.*

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [\mathbf{a_{ij}} \pm \mathbf{b_{ij}}]$$

Farklı mertebeden matrisler toplanamaz.

Örnek: Verilen **A**, **B** ve **C** matrisleri için **A+B**, **A+C** ve **B+C** işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Çözüm:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 9 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Aynı mertebeden matrisler olmadıklarından **A+C** ve **B+C** tanımlı değildir.

Tanım 2.4. $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$ *bir matris ve* $c \in \mathbb{R}$ *bir skaler olmak üzere,* $c\mathbf{A}$ *skaler çarpımı* $\boldsymbol{A}$ *matrisinin her bir elemanın* c *skaleri ile çarpılmasından elde edilen bir matristir.*

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$$

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad 2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Not: $A_1, A_2, ..., A_n$ matrisler, $c_1, c_2, ..., c_n$ skalerler olmak üzere $A_1, A_2, ..., A_n$ matrislerinin $c_1, c_2, ..., c_n$ skalerleri ile lineer kombinasyonu:

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$$

şeklinde yazılır.

Ödev: Verilen **A**, **B** ve **C** matrisleri için $3A + 2B - \frac{1}{2}C$ işleminin sonucunu bulunuz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$$

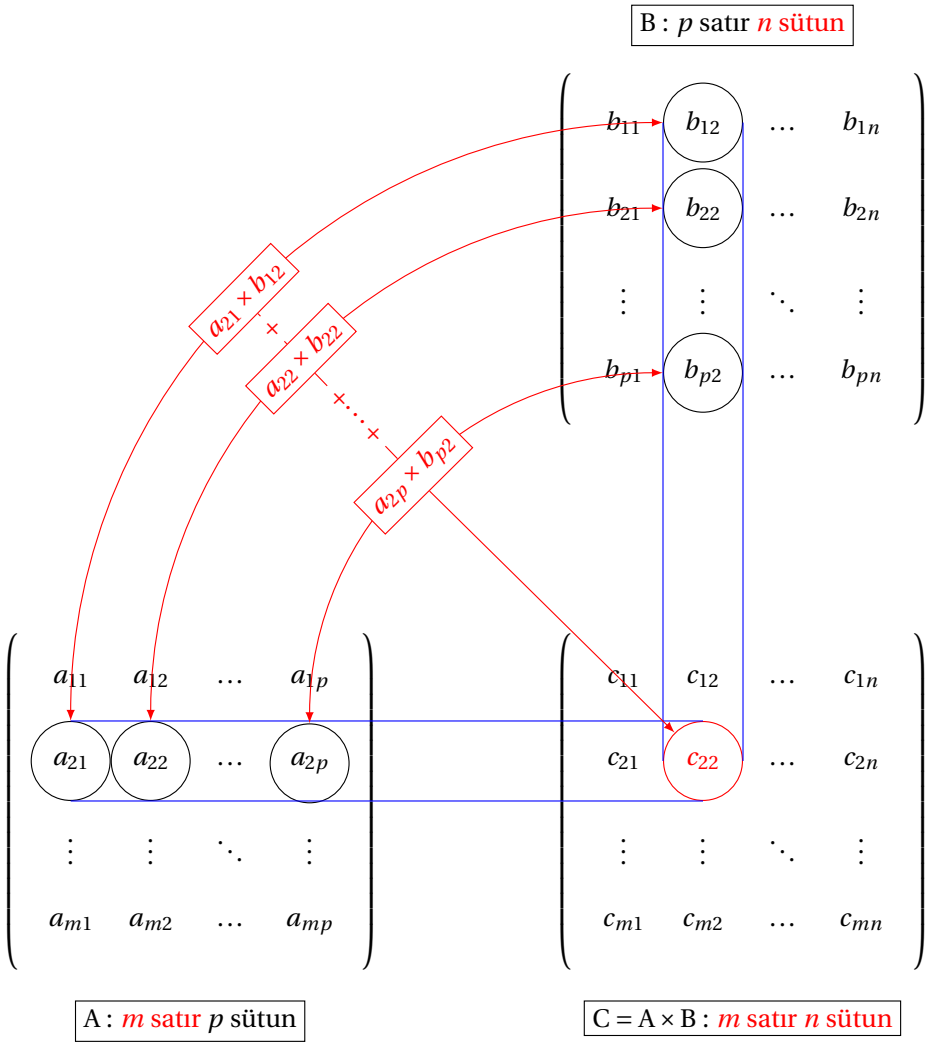
Tanım 2.5. ***(Matris çarpımı)*** $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$, $m \times p$ *mertebeden matris ve* $\mathbf{B} = [\mathbf{b_{ij}}]$, $p \times n$ *mertebeden matris olmak üzere bunların çarpımı* (i, j)*. elemanın* A *matrisinin* i*. satırı ile* B *matrisinin* j*. sütununun çarpımı ile bulunan* $m \times n$ *mertebeden bir matristir.* $i = 1, 2, ..., m$ *ve* $j = 1, 2, ..., n$ *için*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

şeklinde oluşturulan $\mathbf{AB} = [\mathbf{c_{ij}}]_{\mathbf{m \times n}}$ *matrisine* $\boldsymbol{A}$ *ile* $\boldsymbol{B}$ ***matrisinin çarpımı*** *denir.*

İki matrisin çarpılabilmesi için, birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır. A ve B matrislerinin AB çarpımı mümkün ise, A ve B matrislerine çarpılabilir matrisler denir. AB çarpımının mümkün olması BA çarpımının mümkün olmasını gerektirmez.

$$\mathbf{A}_{m \times p} \qquad \mathbf{B}_{p \times n} \qquad = \qquad \mathbf{AB}_{m \times n}$$



Şekil 2.1: Matris çarpımı

Örnek: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB} = ?$

Çözüm:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2(-1)+0(0) & 2(-2)+0(3) \\ -1(-1)+5(0) & -1(-2)+5(3) \\ 4(-1)+3(0) & 4(-2)+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 17 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB} = ?$

Çözüm:

$$\begin{array}{l} c_{11} = 1(-2) + 0(1) + 3(-1) = -5 \\ c_{12} = 1(4) + 0(0) + 3(1) = 7 \\ c_{13} = 1(2) + 0(0) + 3(-1) = -1 \\ c_{21} = 2(-2) - 1(1) - 2(-1) = -3 \\ c_{22} = 2(4) - 1(0) - 2(1) = 6 \\ c_{23} = 2(2) - 1(0) - 2(-1) = 6 \end{array} \qquad \mathbf{AB} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Örnek: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB} = ?$

Çözüm:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB} = ?$

Çözüm:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ödev:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -3 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB} = ?$

Tanım 2.6. $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{nn}}$ *$n \times n$ mertebeden bir kare matris olsun.* ***A*** *matrisinin k defa kendisiyle çarpımına* ***A*** *matrisinin* **k**. ***kuvveti*** *denir.*

$$A.A.A...A = A^k \qquad k > 0$$

$$A^0 = I_n$$

Tanım 2.7. *Bir A matrisinin satırlarıyla sütunlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen matrise A matrisinin* ***transpozesi (devriği)*** *denir. A matrisinin transpozesi A^T ile gösterilir.*

Buna göre $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$, $m \times n$ mertebeden bir matris ise $\mathbf{A^T} = [\mathbf{a_{ji}}]$, $n \times m$ mertebeden bir matristir:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{m \times n}} \Rightarrow \mathbf{A^T} = [\mathbf{a_{ji}}]_{\mathbf{n \times m}}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -9 & 1 & -7 \\ 5 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C^T = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.8. *Bir matriste elemanlar asal köşegene göre simetrik ise bu matrise* ***simetrik matris*** *denir. Bir simetrik matrisin transpozesi kendisine eşittir ($A^T = A$). Eğer $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]$ bir simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır.*

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ matrisi bir simetrik matristir.

Tanım 2.9. *$A^T = -A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine* ***ters simetrik matris*** *denir. Eğer $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{n \times n}}$ kare matrisi bir ters simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ olmalıdır.*

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi bir ters simetrik matristir.

Örnek: Bir ters simetrik matrisin asal köşegenindeki elemanların 0 olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ters simetrik matris olsun. Bu durumda $\forall i, j$ için

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

olacaktır. Asal köşegen üzerindeki elemanlar için $i = j$ olacağından

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

eşitliği elde edilir. $2a_{ii} = 0$, buradan $a_{ii} = 0$ bulunur. Bu asal köşegendeki elemanların 0 olduğunu gösterir.

2.3 Matris İşlemlerinin Özellikleri

Teorem 2.1. *A, B, C aynı mertebeden matrisler, λ_1, λ_2 birer skaler olmak üzere:*

(i) $A + B = B + A$ *(Değişme özelliği)*

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(Birleşme özelliği)*

(iii) $\lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$

(iv) $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

(v) $(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$

Teorem 2.2. *(**Matris çarpımının özellikleri**) A $m \times n$ mertebeden matris, B ve C $n \times r$ matrisler, D $r \times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere:*

(i) $A(BD) = (AB)D$ *(Birleşme özelliği)*

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ *(Dağılma özelliği)*

(iii) $(B + C)D = BD + CD$

(iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

(v) Genellikle $AB \neq BA$'dır. (A ve B kare matris olmak üzere $AB = BA$ sağlanıyorsa A ve B matrislerine değişmelidir.)

(vi) $I_m A = A I_n = A$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ele alınırsa

$$I_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A I_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Not: Reel sayı aritmetiğinde $ab = ac$ ve $a \neq 0$ ise $b = c$'dir. Fakat bu durum matrislerinde geçerli olmak zorunda değildir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 18 & -20 \end{bmatrix} = AC = \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 18 & -20 \end{bmatrix}$$

Örnekte görüldüğü gibi $AB = AC$ fakat B matrisi C matrisine eşit değildir ($B \neq C$)

Teorem 2.3. ***(Sıfır matrisinin özellikleri)*** *A bir matris ve 0 bir sıfır matrisi olmak üzere:*

(i) $A + 0 = 0 + A = A$

(ii) $A - A = 0$

(iii) $0 - A = -A$

(iv) $0A = 0 \qquad A0 = 0$

Not: Reel sayı aritmetiğinde $ab = 0$ ise $a = 0$ ve/veya $b = 0$ olmalıdır. Fakat bu durum matrislerde geçerli olmak zorunda değildir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -16 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{matrislerini çarpınız.}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Örnekte görüldüğü gibi $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olmasına rağmen $AB = 0$'dır.

Teorem 2.4. ***(Matris kuvvetinin özellikleri)*** *A bir kare matris, k ve l tam sayılar olmak üzere*

(i) $A^k A^l = A^{k+l}$

(ii) $(A^k)^l = A^{kl}$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak verilsin A^{100} matrisini hesaplayın.

Teorem 2.5. ***(Transpozun özellikleri)*** *A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ bir skaler olmak üzere:*

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere, $(AB)^T = B^T A^T$*. Bu özellik ikiden fazla matris için de genişletilebilir:*$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

İspat. İlk üç özellik oldukça açıktır. Son özelliği ispatlayalım:

$$((AB)^T)_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{jk} (A^T)_{ki} = (B^T A^T)_{ji}$$

olur. Buradan $(AB)^T = B^T A^T$ olduğu görülür. □

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu gösterin.

Cevap:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matrislerden $(AB)^T = B^T A^T$ olduğu görülmektedir.

2.4 Bir Matrisin Tersi

Tanım 2.10. *A ve B, $n \times n$ mertebeden kare matrisler olmak üzere,*

$$AB = BA = I_n$$

bağıntısını sağlayan B matrisine, A matrisinin tersi ve A matrisine de B matrisinin tersi denir. A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir. Bir matrisin tersi varsa bu matrise ***regüler matris*** *veya* ***tersinir matris*** *denir. Eğer bir matrisin tersi yoksa bu matrise* ***singüler matris*** *ya da* ***tekil matris*** *denir.*

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin birbirinin tersi olduğunu gösterin.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB = BA = I_3$ olduğundan A ve B matrisleri birbirinin tersidir: $A = B^{-1}$ ve $B = A^{-1}$.

Teorem 2.6. *$n \times n$ mertebeden bir A kare matrisinin tersi varsa bu bir tanedir.*

İspat. Şayet A matrisinin B ve C gibi iki tersi olsaydı:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C$$

elde edilirdi. Şu halde bir kare matrisin en çok bir tersi vardır. □

Tanım 2.11. *(**Temel Matrisler**) $m \times m$ mertebeden bir kare matris, aynı mertebeden birim matrise elemanter satır işlemlerinden yalnızca biri uygulanarak elde edilebiliyorsa bu matrise **temel (elementary) matris** denir.*

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 \text{ matrisi üzerinde } 9R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 \text{ matrisi üzerinde } R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 \text{ matrisi üzerinde } R_2 + 2R_1 \to R_2$$

Teorem 2.7. *E matrisi, I_n birim matrisine bir e elemanter satır işlemi uygulanarak elde edilen temel matris olsun. EA matrisi, E matrisini üretmek için uygulanan e elemanter satır işleminin A matrisine uygulanması ile elde edilen matristir.*

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi üzerinde $R_1 \leftrightarrow R_2$ işlemini gerçekleştirin ve bu işlemle aynı sonucu verecek EA çarpımı için E matrisini bulun.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{E}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{EA}{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi üzerinde $R_2 + 2R_1 \to R_2$ işlemini gerçekleştirin ve bu işlemle aynı sonucu verecek EA çarpımı için E matrisini bulun.

$$\underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{EA}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}}$$

Teorem 2.8. *(**Temel matrisin tersi**) E, belirli bir elemanter satır işlemi ile elde edilmiş temel matris, E_0 ise bu işlemin tersi ile edilmiş temel matris olsun. Bu durumda E tersinirdir ve $E^{-1} = E_0$.*

İspat. Teorem 2.7'den $EE_0 = I$. Şayet $EE_0 = I \Rightarrow E^{-1} = E_0$ □

Teorem 2.8'de değinildiği gibi bir temel matrisin tersini elde etmek için bu temel matrisi elde etmek için kullanılan elemanter satır işleminin tersini aynı mertebeden birim matrise uygulamak yeterlidir. Daha önceki bölümde gördüğümüz elemanter satır işlemlerinin tersleri takip eden tablo ile verilmiştir:

Satır İşlemi	**Ters İşlemi**
i. satırı λ skaleri ile çarp	i. satırı $\frac{1}{\lambda}$ skaleri ile çarp
i. ve j. satırları yer değiştir	i. ve j. satırları yer değiştir
i. satırı λ skaleri ile çarp ve j. satır ile topla	i. satırı $-\lambda$ skaleri ile çarp ve j. satır ile topla

Örnek: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ temel matrisi I_3 birim matrisine $-2R_1 + R_3$ elemanter satır işlemi uygulanarak elde edilmiştir. Bu işlemin ters işlemi $2R_1 + R_3$ elemanter satır işlemidir.

$$\underset{I_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow{2R_1+R_3\to R_3} \underset{E_0}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$EE_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

2.4.1 Bir Matrisin Tersinin Bulunması

Verilen $n \times n$ mertebeden bir kare matris elemanter satır işlemleri ile birim matrise dönüştürülebiliyorsa bu matrisin tersi vardır. İlgili matrisin tersini, aynı elemanter satır işlemlerini $n \times n$ mertebeden birim matrise uygulayarak elde edebiliriz.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($A^{-1} = ?$).

Çözüm:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matris çarpımını yaparsak:

$$\begin{array}{l} x_{11} + 4x_{21} = 1 \\ x_{12} + 4x_{22} = 0 \\ -x_{11} - 3x_{21} = 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_{11} + 4x_{21} = 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} = 0 \\ \\ x_{12} + 4x_{22} = 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} = 1 \end{array}$$

Elde ettiğimiz denklem sistemleri aynı katsayılar matrisine sahip. Kolayca çözmek her iki geniletilmiş katsayılar matrisindeki sistemin ikinci yanı birleştirilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \text{ ve } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bu aşamadan sonra elde edilen genişletilmiş matris indirgenmiş satır adımlı hale getirilerek çözüme ulaşırsak:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Elde edilen çözüm verilen başlangıçta verilen matrisin tersi olarak elde edilir:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada gerçekleştirilen çözüm: $[A|I] \to [I|A^{-1}]$ genelleştirilerek tüm matrislere uygulanabilir.

Tanım 2.12. ***(Matris tersinin bulunması)*** *Verilen bir kare matrisin tersinin bulunması için aşağıdaki adımlar takip edilir:*

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{n\times n}}$*,* $n \times n$ *mertebeden bir kare matris olmak üzere* A *matrisinin sağına* I_n *birim matrisi yazılarak takip eden matris oluşturulur:*
$$[A|I_n]$$
- *Bu matrisin sol tarafındaki* A *matrisini,* I_n *birim matrise dönüştürecek elemanter satır işlemleri uygulanır*
$$[I_n|A^{-1}]$$
Şayet A *matrisi, birim matris haline gelebiliyorsa tersi vardır ve matrisin sağ tarafındaki birim matrise elemanter satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris* A *matrisinin tersidir (*A^{-1}*)*
- *Şayet* A *matrisi birim matris haline getirilemiyorsa* A *tersinir değildir.*
- *Son olarak* $AA^{-1} = I_n$ *işlemi yapılarak işlemlerin sağlaması yapılır.*

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz (A^{-1} =?).

Çözüm:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{6R_1+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{4R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($A^{-1} = ?$).

Çözüm:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_1+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A matrisi birim matrise indirgenemediğinden, bir başka deyişle, birim matris ile satır eşdeğeri olmadığından A matrisi tersinir değildir.

Ödev:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($A^{-1} = ?$).

Ödev:

$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($B^{-1} = ?$).

Teorem 2.9. *(**2×2 mertebeden bir matrisin tersi**)* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *matrisinin* $ad - bc \neq 0$ *ise tersi vardır. Eğer* 2×2 *mertebeden A matrisi tersinir ise tersi:*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ile bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($A^{-1} = ?$).

Çözüm: $ad - bc = (-4)(5) - 5(-2) = -10 \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz ($A^{-1} = ?$).

Çözüm: $ad - bc = (-4)(3) - (-2)(6) = 0$ olduğundan A matrisi tersinir değildir.

Teorem 2.10. ***(Tersinir Matris Teoremi)*** *Bir* $\mathbf{A} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{n\times n}}$ *kare matrisi için aşağıdaki ifadeler eşittir:*

(i) *A matrisi, tersinirdir.*

(ii) $Ax = 0$ *lineer denklem sisteminin tek çözümü aşikar çözümdür.*

(iii) *A matrisi,* I_n *ile satır eşdeğeridir.*

(iv) *A matrisi, temel matrislerin çarpımı şeklinde yazılabilir.*

(v) $Ax = b$ *lineer denklem sisteminin her bir* $n \times 1$ *mertebeden b matrisi için ancak ve ancak bir çözümü vardır.*

(vi) $Ax = b$ *lineer denklem sistemi,* $n \times 1$ *mertebeden her b matrisi için tutarlıdır.*

(vii) A^T *matrisi, tersinirdir.*

2.4.2 Ters Matris Özellikleri

Teorem 2.11. ***(Ters matrisin özellikleri)*** *Şayet A ve B aynı mertebeden tersinir matrisler olmak üzere:*

(i) AB *tersinirdir ve* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(ii) A^{-1} *tersinirdir ve* $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $k = 0, 1, ...,$ *için* A^k *tersinirdir ve* $(A^k)^{-1} = A^{-k} = (A^{-1})^k$

(iv) *Şayet* λ *sıfır harici bir skaler ise,* λA *tersinirdir ve* $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

(v) A^T *tersinirdir ve* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ise $(AB)^{-1}$

Çözüm:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \quad B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ise $(A^2)^{-1} = ?$

Çözüm:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Teorem 2.12. *A tersinir bir matris, B,C ve D; A matrisi ile aynı mertebeden matrisler olmak üzere,*

(i) Şayet $AB = AC$ ise $B = C$'dir.

(ii) Şayet $AD = 0$ ise $D = 0$'dır.

İspat. (i) A tersinir matris olduğu için A^{-1} matrisinin var olduğunu biliyoruz. Eşitliğin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak:

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC$$
$$IB = IC$$
$$B = C$$

(ii) Yine A^{-1} var olduğunu biliyoruz ve eşitliğin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak:

$$A^{-1}AD = A^{-1}0$$
$$ID = 0$$
$$D = 0$$

□

Tanım 2.13. *(**Ortogonal matris**) $n \times n$ mertebeden bir A kare matrisinin tersi, transpozesine eşit ise A matrisine **ortogonal matris** denir:*

$$A^T = A^{-1}$$

Aşağıdaki eşitlik sağlanırsa A matrisi ortagonal matristir:

$$AA^T = A^TA = I_n$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olup olmadığını araştırın.

Cevap:

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan A ortogonal matristir.

Örnek: $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olup olmadığını araştırın.

Cevap:

$$BB^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülmektedir. Buna göre B matrisi ortogonal matris değildir.

Ödev: $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olup olmadığını araştırın.

2.5 Lineer Denklem Sistemlerinin Katsayılar Matrisinin Tersi ile Çözülmesi

n bilinmeyenli, n denklemli bir lineer denklem sistemi $Ax = b$ verilsin. Bu durumda katsayılar matrisi A, $n \times n$ mertebeden kare matris olacaktır. Denklemin her iki tarafı A^{-1} ile çarpılırsa:

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b \qquad \Rightarrow \qquad x = A^{-1}b$$

olacaktır.

Ayrıca, $Ax = 0$ eşitliğinde, A matrisi tersinir ise tek çözüm aşikar çözüm bir başka deyişle tüm değişkenlerin değerinin sıfır olduğu çözümdür.

Örnek:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yöntemi ile çözünüz.

Cevap:

Verilen denklem sistemi $Ax = b$ şeklinde yazılır ve katsayılar matrisinin tersi aranır:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_2]{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3+R_1]{R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$x = A^{-1}b$ eşitliğinden :

$$x = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= -3 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

bulunur.

Ödev:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yöntemi ile çözünüz.

Uygulama (Kriptolojide Matrislerin Kullanılması)

Matrisler, kriptolojide de sıkça kullanılmaktadır. Bu bölümde basit bir kriptoloji örneği vereceğiz. Örneğin, alfabedeki harflere aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi birer sayı karşılığı getirelim. Bu tabloyu ve tersinir bir matrisini kullanarak, bir metni nasıl şifreleyebileceğimizi görelim.

	A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J	K
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü	V	Y	Z
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

"AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesini aşağıda verilen matrisi kullanarak şifreleyelim. Burada şifreleme işleminde kullanacağımız anahtar matrisinin tersinir olması gerektiğine dikkat ediniz.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Öncelikle "AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesindeki her karakterin sayısal değerini yukarıda verilen tabloyu kullanarak belirleyelim.

A	Y	Ş	E		T	A	T	İ	L	E		Ç	I	K	S	I	N
1	28	23	6	0	24	1	24	12	15	6	0	4	11	14	22	11	17

Şifreleme için 3×3 mertebeden bir matris kullanacağımız için şifrelenecek metinin sayısal karşılığını 3 satırlı bir matris halinde yazalım.

$$\begin{bmatrix} \text{A} & \text{E} & \text{A} & \text{L} & \text{Ç} & \text{S} \\ \text{Y} & & \text{T} & \text{E} & \text{I} & \text{I} \\ \text{Ş} & \text{T} & \text{İ} & & \text{K} & \text{N} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 15 & 4 & 22 \\ 28 & 0 & 24 & 6 & 11 & 11 \\ 23 & 24 & 12 & 0 & 14 & 17 \end{bmatrix} = B$$

Yukarıda elde ettiğimiz B matrisini A matrisi ile çarparak şifrelenmiş metni elde edelim.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 14 & 4 & 21 \\ 27 & 0 & 23 & 6 & 10 & 10 \\ 22 & 23 & 11 & 0 & 13 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -179 & -114 & -123 & -63 & -101 & -167 \\ 51 & 24 & 36 & 6 & 25 & 28 \\ 180 & 120 & 124 & 78 & 105 & 189 \end{bmatrix}$$

Tabloda bulunan en büyük sayısal değer 30 olduğu için elde edilen matristeki değerleri mod 30'a getirebiliriz. Böylece şifrelenmiş metni ifade eden matris C elde edilir:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 27 & 27 & 19 & 13 \\ 21 & 24 & 6 & 6 & 25 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen harf - sayısal değer tablosuna göre "AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesinin şifrelenmiş hali "AR ET VEÇVEOÖULJYĞ" olarak bulunur. Bu aşamadan sonra şifreli mesajın nasıl çözümleneceğini inceleyelim.

Şayet $AB = C$ ise $B = A^{-1}C$ olarak elde edilir.

A matrisinin tersi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

$B = A^{-1}C$ eşitliği ile çözüme ulaşılır

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 27 & 27 & 19 & 13 \\ 21 & 24 & 6 & 6 & 25 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & 15 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 31 & 45 & 34 & 22 \\ 88 & 120 & 144 & 186 & 221 & 191 \\ -67 & -96 & -138 & -180 & -196 & -163 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matris yine mod 30 işlemine tabi tutulursa orijinal metinin sayısal karşılığını ifade eden matris elde edilir.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 15 & 4 & 22 \\ 28 & 0 & 24 & 6 & 11 & 11 \\ 23 & 24 & 12 & 0 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Bu matris harf - sayısal değer tablosuna göre çevrilirse "AYŞE TATİLE ÇIKSIN" cümlesi elde edilir.

Ödev: Yukarıda verilen harf - sayı değeri tablosunu kullanarak A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile şifrelenmiş "BŞHUIUŞŞİİUJR V" mesajını çözünüz.