

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ



YARI DÜZGÜN UZAYLARDA KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

Proje No: FDA-2015-5627

Proje Türü:
Kurum Dışı Destekli Araştırmalar İçin İhtiyaç Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Mehmet Baran
Fen Fakültesi / Matematik Bölümü

Araştırmacının Adı Soyadı
Tesnım Meryem Baran
Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Bölümü

Aralık 2016

KAYSERİ

TEŞEKKÜR

FDA-2015-5627 numaralı " Yarı-Düzgün Uzaylarda Kapanış Operatörleri " başlıklı projemiz Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

Ayrıca, bu proje TÜBİTAK tarafından 114F299 proje numaralı 3001-Başlangıç AR-GE Destek Programı kapsamında desteklenmiştir.

Çalışmamızı destekleyen bu kurumlara teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Amaç ve Kapsam.....	2
2. GENEL BİLGİLER	4
3. GEREÇ VE YÖNTEM	8
3.1 Temel Tanımlar.....	8
4. BULGULAR	14
4.1 Lokal Ayırma Aksiyomları	14
4.2 Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeler	19
4.3 Kapanış Operatörleri.....	31
4.4 Genel Ayırma Aksiyomları	36
4.5 Karşılaştırma ve İlişkiler.....	41
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	44
5.1 Sonuç	44
5.2 Öneriler.....	45
KAYNAKLAR.....	55

ÖZET

Topolojik kategoride Baran [8-10] tarafından tanımlanan kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramların, lokal ve genel T_0 ve T_1 objelerin bilinen bazı topolojik kategorilerde incelenmesi temeline dayanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümü giriş, ikinci ve üçüncü bölümlerinde de bu çalışmada geçen topolojik kategorilerin tanımları, çıkış nedeni, önemi ve birbirileri arasındaki ilişkileri kapsayan bilgilerden oluşmaktadır.

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde, topolojik kategoride 1991 de Baran tarafından tanımlanan kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını hem yarı-düzgün yakınsak uzaylar hem de yansımali (reflexive) uzaylar kategorisinde karakterize edilmiş, bunlar ile klasik kapalılık kavramları arasında ilişki incelenmiş, bu kavramların Dikranjan ve Giuli [35] anlamında kapanış operatörü oluşturduğunu ve bu kapanış operatörlerin zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent gibi bazı özellikleri sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca, T_0 ve T_1 yarı-düzgün yakınsak uzayları ve T_0, T_1 ve Hausdorff yansımali (reflexive) uzayların her biri karakterize edilmiştir. Son olarak, lokal T_0 ve T_1 ve genel T_0, T_1 ve Hausdorff genişletilmiş pseudo-(quasi)-semi metrik uzayları karakterize edilmiştir.

Son bölümde sonuç ve öneriler verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Kategori, yarı-düzgün yakınsak uzay, kapalılık, kapanış operatörleri, genişletilmiş pseudo-quasi-semi metrik uzaylar, yansımali uzaylar.

ABSTRACT

This work based on investigating the notions of closed and strongly closed subobjects of an object, lokal ve genel T_0 ve T_1 objects which were defined in a topological category by Baran [8-10] in some known topological categories and consists of five chapters.

The first chapter of this work is introduction, the second and the third chapters cover the information about topological categories which will be used in this work.

In the fourt chapter, the notions of closed and strongly closed subobjects of an object, which were introduced in 1991 by Baran, in both the category of semiuniform convergence spaces and the category of reflexive spaces are characterized, the relationships among these notions as well as the usual notion of closedness are investigated and it is shown that they induce a notion of closure in the sense of Dikranjan and Giuli [35] which enjoy the basic properties like idempotency,(weak) hereditariness, and productivity. Moreover, each of T_0 and T_1 semiuniform convergence spaces and each of T_0, T_1 and Hausdorff reflexive spaces are characterized. Finally, local and general T_0, T_1 , Hausdorff extended pseudo-(quasi)-semi metric spaces are characterized.

In the last chapter, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Topological category, Semiuniform Convergence spaces, closedness, closure operators, extended pseudo-quasi-semi metric spaces, reflexive spaces.

1. GİRİŞ

Metrik uzaylar sınıfı çok küçük bir sınıf olduğundan, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi kavramların mevcut olduğu metrik uzaylardan daha büyük sınıfların olup olmadığı sorusu ortaya çıkıyor. Bu soru 1937'de Weil [88] tarafından düzgün uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi **Unif** i tanımlayarak çözüldü. 1948'de L. Nachbin [41] tarafından quasidüzgün uzaylar, 1963'te Csaszar [32] tarafından syntopogeneous uzaylar, 1964'te D. B. Doitchinov [38] tarafından genelleştirilmiş topolojik uzaylar, 1965'te M. Katetov [54] tarafından merotopik uzaylar ve 1974'te H. Herrlich [49] tarafından nearness uzaylar gibi hem topolojik hem de düzgün uzayları içine alan topolojik kategoriler tanımlandı. Fakat bu kategorilerin hiçbirisi kartezyen kapalı değildir. 1992'de Behling [24] ve 1993'te Preuss [73] tüm (simetrik) limit uzayları, düzgün yakınsak uzayları ve tüm (simetrik) topolojik uzayları ve tüm düzgün uzayları ihtiva eden yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar)dan oluşan kartezyen kapalı, kalıtsal ve bölüm dönüşümlerinin (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğu uygun bir kategoriyi, **SUConv**, tanımladılar. Topolojik ve düzgün kavramlar **SUConv** da mevcut olduğundan, **SUConv** süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, tamlık, tam sınırlılık, kompaktlık, bağlantılılık ve fonksiyon uzaylarındaki basit yakınsaklık, sürekli yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık yapıları için de uygun bir kategoridir.

Metrik uzaylar (ve büzülme (non expansive)) dönüşümlerin kategorisi **Met** de metrik uzayların keyfi çarpımlarının, dual-çarpımlarının ve bölüm uzayların her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine 1990'da J. Adamek ve J. Reiterman [2] tarafından tanımlanan genişletilmiş pseudo-metrik kullanılarak, yani **pMet** kategorisine geçilerek çözülebileceğini, fakat bu defa da pseudo-metrikten elde edilen topolojinin her zaman Hausdorff olmaması problemi ortaya çıkıyor (genişletilmiş metric sonsuz (∞), pseudo metric farklı noktalarda sıfır değerini alabilir). Genişletilmiş pseudo-metrik uzaylarında sadece keyfi çarpımlar ve dual-çarpımlar her zaman mevcut olması değil aynı zamanda başlangıç ve bitiş yapıları her zaman var olması önemini göz önüne alırsak, metrikten genişletilmiş pseudo-metrik uzaylara geçişin temel sebeplerinden birisi budur. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar (quasi metrik simetri özelliğini, yarı metrik üçgen eşitsizliği özelliğini sağlayamayabilir) hem genişletilmiş pseudo-metrik uzayları hem de yansımali (reflexive) uzayları ihtiva eder.

Bu proje çalışmasında, topolojik kategoride Baran [8-9] tarafından tanımlanan kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını **SUConv** kategorisinde karakterize edilmiş, bunlar ile klasik kapalılık kavramları arasında ilişki incelenmiş, bu kavramların Dikranjan ve Giuli [35]

anlamında kapanış operatörü oluşturduğunu ve bu kapanış operatörlerin zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent gibi bazı özellikleri sağladığı göstermiştir. Ayrıca, yarı-düzgün yakınsak uzayların kategorisine içine gömülenebilen (embedded) yansımali uzaylar ve bağıntıyı koruyan fonksiyonlardan oluşan **RRel** topolojik kategorisinde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları, local ve genel T_0 ve T_1 uzayları karakterize edilmiş ve bunlar ile klasik kavramları arasında ilişki araştırılmıştır. Son olarak, **SUConv** kategorisine içine gömülenebilen genişletilmiş pseudo-(quasi)-semi metrik uzaylar ve büzülme dönüşümlerden oluşan **pqsMet (psMet)** kategorilerinde lokal ve genel T_0 , T_1 ve Hausdorff objeleri karakterize edilmiştir.

1.1 Amaç ve Kapsam

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, düzgün uzayı, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [48], Kent [57], Wyler [91], ve Schwartz [78] tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. 1974’ te Manes [68] ve 1987’de Herrlich, Salicrup ve Strecker [50] faktorizasyon yapısı kullanarak kompaktlık, ayırma aksiyomları ve öz fonksiyonları kategoriye genişletilmişlerdir. 1990’da Dikranjan ve Giuli [36] (süzgeç yekınsak uzayların çeşitli tipleri için), 1996 da Clementino, Giuli ve Tholen [29], 1997 de Clementino ve Tholen [30] (abstract kategoriler için) bu kavramlar kapanış operatörleri kullanarak, 1991, 1997, 2006’da Baran [8-14, 18] başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeleri kullanarak, bu kavramları topolojik kategoride tanımladılar. Dolayısıyla, bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur.

Baran, [8] de kümeler ve fonksiyonlar kategorisi üzerinde tanımlanmış keyfi bir topolojik kategori için bir p noktasında, yani lokal olarak ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır [8, 10]. Ardından bunu topos teorisindeki üreteç eleman (the generic element) metodunu [53, s.39] kullanarak noktadan bağımsız olan tanımlara genelleştirmiştir. Topos’taki objeler noktalara sahip olmayabilir fakat her zaman bir üreteç noktasına sahiptir. Bu genelleştirmeyi yapmasının bir nedeni budur. Diğer bir nedeni de keyfi topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarının bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmış olmasıdır [9]. Baran [8-9] küme tabanlı topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir

[17-18, 20-21, 23]. Ayrıca bu kavramları kullanarak topolojide iyi bilinen kompaktlık [14], Hausdorffluk [12] ve bağlantılılık [19] kavramlarını topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Genel olarak, ayrılma aksiyomları farklı noktaları ve ayrık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları ve (in)diskre obje ile açıklayabilmek gerekmektedir çünkü herhangi bir topolojik kategoride başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları ve (in)diskre obje daima mevcuttur.

Bu proje çalışmasında, amacımız topolojik kategoride Baran [8-9] tarafından, başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeleri, kullanarak tanımlanan kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını hem **SUConv** hem de **RRel** kategorilerinde karakterize etmek, bunlar ile klasik kapalılık kavramları arasında ilişkiyi incelemek, bu kavramların ürettiği kapanış operatörlerin özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca, bizim diğer bir amacımız da **pqsMet (psMet)** kategorilerinde lokal ve genel T_0 , T_1 ve Hausdorff objeleri karakterize etmek, lokal ve genel ayrılma aksiyomları arasındaki ilişkiler incelemektir.

Bu çalışma sayesinde diğer bilim insanları kendi çalışma alanları için daha kolay ve daha geniş bir alanda şimdiye kadar yapmış oldukları çalışmaları geliştirme fırsatı bulacaklardır.

2. GENEL BİLGİLER

1906'da Frechet [42] analizdeki bir çok problem için oldukça faydalı bir yapı olan metrik uzayları tanımladı. Fakat maalesef metrik uzaylar sınıfı, fonksiyon uzaylarında noktasal yakınsaklığı tanımlamak için yeterli değildir. 1914' te Hausdorff [47] tarafından tanımlanan (günümüzde Hausdorff uzaylar olarak bilinen) ve 1922'de Kuratowski [58] tarafından (alışılmış anlamda) tanımlanan topolojik uzaylarda noktasal yakınsaklık tanımlanabilir. Topolojik uzayların metrik uzaylar yerine kullanılmasının diğer bir sebebi de topolojik uzaylar (ve sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi **Top** un alt uzaylar, çarpımlar, bölümler ve dual çarpımlar gibi bütün alışılmış yapıların mevcut olmasıdır. Oysa metrik uzaylar (ve büzülme (non expansive)) dönüşümlerin kategorisi **Met** de sadece alt uzaylar ve sonlu çarpımlar oluşumu mevcuttur. Metrik uzayların keyfi çarpımlarının her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine pseudo-metrik kullanılarak, yani **pMet** kategorisine geçilerek çözülebilir, fakat bu defa da pseudo-metrikten elde edilen topolojinin her zaman Hausdorff olmaması problemi ortaya çıkar. Bir başka ifadeyle metrik başlangıç yapıların topolojik başlangıç yapılarla, genelde, uyuşmuyor. Başlangıç ve bitiş yapıların önemini göz önüne alırsak, metrikten topolojiye geçişin temel sebeplerinden birisi budur. Fakat **Top** da aşağıda sıraladığımız çok önemli bazı eksiklikler mevcuttur.

1. **Top** kategorisi kartezyen kapalı değildir. Bu özellik Fonksiyonel Analizde Duality Teorisinde ve Cebirsel Topolojide Homotopi Teorisinde çalışan matematikçiler tarafından kullanılır.

2. **Top** da bölüm fonksiyonlarının çarpımlarının bölüm fonksiyonu olması gerekmez.

3. **Top** da bölüm fonksiyonları kalıtsal değildir, eğer $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ **Top** da bir bölüm dönüşümü ve $A \subset Y$ ise bu takdirde $f^{-1}[A]$ (A ya göre) alt topoloji ile verilmek şartıyla, $(f|_{f^{-1}[A]})' : f^{-1}[A] \rightarrow A$ dönüşümünün **Top** da bölüm dönüşümü olması gerekmez. Arhangel'skii [5] de topolojideki düzensizliklerin çoğu bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olmamasından kaynaklanmaktadır ve bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olması özelliği bağlantılılık ve bağlantısızlık teorisinde kullanılır.

4. Düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık, Cauchy dizileri (veya Cauchy süzgeçleri) ve tamlık gibi düzgün kavramlar **Top** da mevcut değildir.

Metrik uzaylar sınıfı çok küçük olduğundan, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık gibi düzgün kavramların mevcut olduğu metrik uzaylardan daha büyük sınıfların olup olmadığı

sorusu ortaya çıkıyor. Bu soru 1937'de Weil [88] tarafından çözüldü. Weil *düzgün uzaylar* tanımladı ve Hausdorff'un yaptığı her metrik uzayın tamlanışını [47] her düzgün uzayın tamlanışına genişletti. Fakat malesef 1978'de Husek [52] düzgün uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi **Unif** in kartezyen kapalı olmadığını gösterdi. 1948'de L. Nachbin tarafından quasidüzgün uzaylar [41], 1963'te Csaszar tarafından syntopogeneous uzaylar [32], 1964'te D. B. Doitchinov tarafından genelleştirilmiş topolojik uzaylar (=süpertopolojik uzaylar) [38], 1965'te M. Katetov tarafından merotopik uzaylar [54] ve 1974'te H. Herrlich tarafından nearness uzaylar [49] gibi hem topolojik hem de düzgün uzayları içine alan topolojik kategoriler tanımlandı. Fakat bu kategorilerin hiçbirisi kartezyen kapalı değildir.

1965'te Cook ve Fischer [31] düzgün uzayların bir genelleştirilmesi olarak kartezyen kapalı bir kategori oluşturan *düzgün yakınsak uzayları* (*düzgün limit uzaylar*) geliştirdi. Fakat düzgün limit uzayları (ve düzgün sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi **ULim** kalıtsal değildir.

Bu yüzden **1. den 4. e** kadar tüm noktaları düşünersek şu soru ortaya çıkıyor: *Topolojideki uzayın doğru kavramı nedir?* Açık olarak, böyle bir kavram **Top** un **1., 2., 3. ve 4.** de sözü edilen tüm yetersizliklerine çare olmalıdır. Dahası topolojik ve düzgün uzaylar üzerindeki tüm sonuçlar önemli özel haller olarak kalmalıdır. Son ama aynı derecede önemli olarak, böyle bir uzay kavramının tanımı kolay olmalıdır. 1992'de Behling [24] ve 1993'te Preuss [73] yarı düzgün yakınsak uzayları tanıtarak bu konuya bir çözüm sunmuştur ve yarı düzgün yakınsak uzaylar (ve düzgün sürekli fonksiyonların) kategorisi **SUConv** nin kartezyen kapalı, bölüm dönüşümlerinin kalıtsal olduğu ve bölüm dönüşümlerinin (keyfi) çarpımlarının bölüm dönüşümü olduğunu göstermişlerdir. **SUConv** tüm (simetrik) limit uzayları, düzgün yakınsak uzayları ve tüm (simetrik) topolojik uzayları ve tüm düzgün uzayları ihtiva eder. Topolojik ve düzgün kavramlar **SUConv** da mevcut olduğundan, **SUConv** süreklilik, Cauchy sürekliliği, düzgün süreklilik, tamlık, tam sınırlılık, kompaktlık, bağlantılılık ve fonksiyon uzaylarında basit yakınsaklık, sürekli yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık gibi kavramların tanımlaması için uygun bir kategoridir.

Kapanış operatörleri, ilk defa Moore [70] ve Riesz [76] tarafından analizde kullanılmış olmasına rağmen, sonraları daha çok mantık [6], cebir [25, 37] ve topoloji [37, 58] gibi matematiğin diğer dallarında uygulama alanı bulmuştur. Bunların dışında, Canter ve Wille [44] veri analizinde ve bilgi temsiliinde, Aumann [7] da sosyal bilimler alanında kapanış operatörlerini kullanmıştır. Son yıllarda ise kapanış operatörleri kuantum mantığı ve fiziksel sistemlerin temsili teorisinde kullanılmaya başlanmıştır [3-4]. Bu uygulamalarda T0 ve T1 ayrılma aksiyomları çok önemli rol oynar [84-85]. 1940 yılında Birkhoff'un [25] kapanış üzerinde çalışmasının bir nedeni de bir kapanış uzayının kapalı cümlelerinin sınıfının bir tam

(complete) latis oluşturduğunu görmüő olmasıdır. Kapanışlar ile tam latisler arasındaki ilişki pek çok yazar tarafından incelenmiştir. Bu konunun genel bir değerlendirmesini Ern  yapmıştır [40]. Hem latis teorisindeki kapanış operatörleri hem de kategori teorisindeki kapanış operatörleri teorik bilgisayar çalışmalarında çok önemli rol oynar. Bu alandaki en önemli çalışmalar domain teorisinin de temellerini atan Scott'un çalışmalarıdır [79-81]. Kategori teorisindeki kapanış operatörlerinin pek çok kullanım alanı vardır. Temelleri Bourbaki [27] tarafından atılan, kategori teorisindeki reflektif alt kategori kavramı kullanılarak, latis teorisindeki kapanış operatörü kavramı elde edilmiştir [43, 49, 55]. Grothendieck topoloji ve Lawvere-Tierney topoloji kavramları Sheaf ve Topos teorisinde önemli olup, en uygun şekilde özel kapanış operatörleri ile tanımlanırlar [53, 61, 67].

Salbany [77]'de regüler kapanış operatörleri tanımladıktan sonra, kategorik topolojide, topolojik uzaylar kategorisinin dolgun alt kategorilerinin elde edilmesinde ağırlıklı olarak bu kapanış operatörleri kullandı.

1945 'te Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane [39] kategori teorisini ortaya çıkardılar. Kategori teorisi birbirinden oldukça farklı görünen iki saha olan topoloji ve cebir arasında bir köprü kurmak için geliştirilmiştir. 1957'de Alexander Grothendieck kategori teorisini cebirsel denklemlerin çözümünde emsalsiz bir görüő sağlayan kohomoloji (chomology) teorisini oluştırmakta kullandı. 1966 da Lawvere [61] kategori teorisini tüm matematiksel düşünceler için yeni bir temel olarak gördü. 1980'de Lambek [60] bilgisayar biliminde kullanılan karakter (types) ve programların özel bir çeşit kategori oluşturduğunu gösterdi. Kategori teorisi yeni bir dil üreterek farklı alanlarda çalışanlar arasındaki iletişimi kolaylaştırır; birbirinden bağımsız çeşitli teorem ve yapıları yüzeye çıkararak eski problemlere yeni bir anlam kazandırır. Kategori teorisinin özellikle coğrafi bilgi sistemlerinde, astronomide uzay gözlemlerinde, moleküler biyolojide DNA ve RNA kodları konusunda, bir metro hattı modelleme gibi ulaşım haritaları oluştırmada uygulamaları olduğu gibi kategori; bilgisayar, fizik, malzeme, jeoloji, klimatoloji vb. birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Kategoriyi gerçek dünyaya aktaran bu ve benzeri birçok önemli uygulamalar [83] de verilmiştir.

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, düzgün uzayı, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [48], Kent [57], Wyler [91], ve Schwartz [78] tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. 1974' te Manes [68] ve 1987'de Herrlich, Salicrup ve Strecker [50] faktörizasyon yapısı kullanarak kompaktlık, ayırma aksiyomları ve öz fonksiyonları kategoriye genişletilmişlerdir.

1990'da Dikranjan ve Giuli [36] (süzgeç yekınsak uzayların çeşitli tipleri için), 1996 da Clementino, Giuli ve Tholen [29], 1997 de Clementino ve Tholen [30] (abstract kategoriler için) bu kavramlar kapanış operatörleri kullanarak, 1991, 1997, 2006'da Baran [8-14, 18] başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiske objeleri kullanarak, bu kavramları topolojik kategoride tanımladılar. Dolayısıyla, bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur.

Genel topolojideki ayrılma aksiyomları Urysohn Metrikleştirme Teoremi, Urysohn Lemması, Tietze Genişleme Teoremi gibi pek çok önemli teoreme karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla, bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Genel olarak, bu ayrılma aksiyomları farklı noktaları ve ayık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskrelik ve indiskelelik ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Topos teorisinin üreteç eleman metodu ([53] p. 39) kullanılarak p noktasında, yani lokal olarak çeşitli ayrılma aksiyomları Baran [8, 10] tarafından topolojik kategorisine genişletilmiştir. Baran [8-9] topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını (kapanış operatörlerini kullanmadan, herhangi bir topolojik kategoride daima mevcut olan başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskrelik kullanarak) tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [17-18, 20-21]. Ayrıca bu kavramları kullanarak 1997 de kompaktlık [14], 1996 da Hausdorffluk [12] ve 2006 da bağlantılılık [19] kavramlarını topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Metrik uzaylar (ve büzölme (non expansive)) dönüşümlerin kategorisi **Met** de metrik uzayların keyfi çarpımlarının, dual-çarpımlarının ve bölüm uzayların her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine 1990'da J. Adamek ve J. Reiterman [2] tarafından tanımlanan genişletilmiş pseudo-metric kullanılarak, yani **pMet** kategorisine geçilerek çözülebileceğini, fakat bu defa da pseudo-metrikten elde edilen topolojinin her zaman Hausdorff olmaması ama T_0 uzayıdır.

Genişletilmiş pseudo-metrik uzaylarında sadece keyfi çarpımlar ve dual-çarpımlar her zaman mevcut olması değil aynı zamanda başlangıç ve bitiş yapıları her zaman var olması önemini göz önüne alırsak, metrikten genişletilmiş pseudo-metrik uzaylara geçişin temel sebeplerinden birisi budur. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metric uzaylar hem genişletilmiş pseudo-metrik uzayları hem de yansımali uzayları ihtiva eder.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu proje çalışmasında yöntem olarak aşağıda kısaca açıklamaya çalışacağımız ve 24 yıl önce Baran [8-10] tarafından başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre objeleri kullanarak, topolojik kategorilerde tanımlanan teori uygulanacaktır.

Baran [17-18, 20-21] de bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını karakterize etmiş ve bu kavramların Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir. Bu projede p de T_0 , p de T_1 , kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını 24 yıl önce Preuss ve Behling [24, 73] tarafından tanımlanan ve yukarıda belirtildiği gibi çok önemli kategorilerle ilişkisi olan **SUConv** kategorisinde karakterize edilmiş, bunlar ile klasik kapalılık kavramı arasında ilişkiler incelenmiş, bu kavramların ürettiği kapanış operatörlerin bazı özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, yarı-düzgün yakınsak uzayların kategorisine içine gömülenebilen (embedded) yansımali (reflexive) uzaylar ve bağıntıyı koruyan fonksiyonlardan oluşan **RRel** topolojik kategorisinde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları, local ve genel T_0 ve T_1 uzayları karakterize edilmiş ve bunlar ile klasik kavramları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Son olarak, 17 yıl önce Lowen [65] tarafından tanımlanan ve **SUConv** kategorisine içine gömülenebilen genişletilmiş pseudo-(quasi)-semi metrik uzaylar ve büzülme dönüşümlerden oluşan **pqsMet** (**psMet**) kategorilerinde lokal ve genel T_0 , T_1 ve Hausdorff objeleri karakterize edilmiştir.

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. E ve B iki kategori olmak üzere $U: E \rightarrow B$ fonktoru verilsin. U fanktoru belirli, küçük demetlere sahip ve U -kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahipse U 'ya topolojik fanktor veya E 'ye B üzerinde topolojik kategori denir [1, 48, 72].

Tanım 3.1.2. B boştan farklı bir cümle, $B \times B$ üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi $F(B \times B)$ ve $\mathfrak{S} \subset F(B \times B)$ olsun. Eğer $\mathfrak{S}$ aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathfrak{S}$ 'ye B üzerinde bir yarı-düzgün yakınsak yapı ve $(B, \mathfrak{S})$ ikilisine de yarı-düzgün yakınsak uzay denir [24, 73-75].

(UC1) Her $x \in B$ için $[x] \times [x] \in \mathfrak{S}$ dir, ($[x]$ x noktasını içeren B nin bütün alt kümeleridir).

(UC2) $\alpha \in \mathfrak{S}$ ve $\alpha \subset \beta$ olduğunda $\beta \in \mathfrak{S}$ dir.

(UC3) Eğer $\alpha \in \mathfrak{S}$ ise $\alpha^{-1} \in \mathfrak{S}$, $\alpha^{-1} = \{U^{-1} : U \in \alpha\}$, $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$.

Eğer $(B, \mathfrak{S})$ bir yarı-düzgün yakınsak uzay ise $\mathfrak{S}$ nin elemanlarına düzgün süzgeçler denir.

1. $(B, \mathfrak{I})$ ve $(B', \mathfrak{I}')$ yarı-düzgün yakınsak uzaylar olsun. Eğer $\forall \alpha \in \mathfrak{I}$ için $(f \times f)(\alpha) \in \mathfrak{I}'$ oluyorsa $f : (B, \mathfrak{I}) \rightarrow (B', \mathfrak{I}')$ fonksiyonuna düzgün sürekli fonksiyon denir [24, 73-75].
2. Nesneleri yarı-düzgün yakınsak uzaylar ve dönüşümleri düzgün sürekli fonksiyonlardan oluşan kategoriye yarı-düzgün yakınsak uzaylar kategorisi denir ve **SUconv** ile gösterilir [24, 73-75].

Tanım 3.1.3. B bir cümle ve $q \subset F(B) \times B$ olsun.

1. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa (B, q) ikilisine Kent yakınsak uzay denir [57, 73,75].
 (C1) Her $x \in B$ için $([x], x) \in q$,
 (C2) $(\alpha, x) \in q$ ve $\alpha \subset \beta$ olduğunda $(\beta, x) \in q$,
 (C3) Eğer $(\alpha, x) \in q$ ise $(\alpha \cap [x], x) \in q$ dır.
2. (B, q') ve (B', q') Kent yakınsak uzaylar olsun. Eğer $(\beta, x) \in q$ için $(f(\beta), f(x)) \in q'$ oluyorsa $f : (B, q) \rightarrow (B', q')$ fonksiyonuna sürekli fonksiyon denir.
3. Nesneleri Kent yakınsak uzaylar ve dönüşümleri Kent yakınsak uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlardan oluşan kategoriye Kent yakınsak uzaylar kategorisi denir ve **KConv** ile gösterilir [73,75].

Uyarı 3.1.4. Eğer $(B, \mathfrak{I})$ bir yarı-düzgün yakınsak uzaysa bu takdirde, $q_{\mathfrak{I}} = \{(\alpha, x) : [x] \times \alpha \in \mathfrak{I}\}$ olmak üzere $(B, q_{\mathfrak{I}})$ bir Kent yakınsak uzaydır [73,75].

Uyarı 3.1.5.

(1) Her (B, q) Kent yakınsak uzayı için B üzerinde, q yu üreten en ince $\mathfrak{I}_q$ yarı-düzgün yakınsak yapısı vardır, yani $q_{\mathfrak{I}_q} = \{(\beta, x) \in F(B) \times B : ([x] \cap \beta) \times ([x] \cap \beta) \in \mathfrak{I}_q\}$ olmak üzere $q_{\mathfrak{I}_q} = q$ dır [74-75].

(2) [74] deki Teorem 3.2 ten simetrik Kent yakınsak uzaylardan oluşan kategori ile yakınsak yarı-düzgün yakınsak uzaylardan oluşan **SUconv** nin alt kategorisine izomorftur.

Tanım 3.1.6. (B, q) Kent yakınsak uzayı ve $M \subset B$ olsun. $K(M) = \{x \in B : \text{en az bir } (\alpha, x) \in q \text{ vardır öyleki } \alpha \cup [M] \text{ öz süzgeçtir}\}$ [35, 37]. Eğer $K(M) = M$ ise M ye

(B, q) Kent yakınsak uzayında kapalıdır denir. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay ve $(B, q_{\mathfrak{I}})$ ona karşılık gelen Kent yakınsak uzay olsun. Eğer M , $(B, q_{\mathfrak{I}})$ Kent yakınsak uzayında kapalı ise M ye $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzayında kapalıdır denir ve biz buna klasik anlamda kapalılık diyeceğiz [74-75].

Not 3.1.7.

- (i) **SUconv** de $\{ f_i: (B, \mathfrak{I}) \rightarrow (B_i, \mathfrak{I}_i), i \in I \}$ kaynağın başlangıç kaldırması olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in \mathfrak{I} \Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } (f_i \times f_i)(\alpha) \in \mathfrak{I}_i$ dir [74-75].
- (ii) **SUconv** de $\{ f_i: (B_i, \mathfrak{I}_i) \rightarrow (B, \mathfrak{I}), i \in I \}$ epi-kavşağın bitiş kaldırması olması için gerek ve yeter koşul eğer $\alpha \in \mathfrak{I}$ ise $(f_i \times f_i)(\beta_i) \subset \alpha$ olacak şekilde en az c bir $i \in I$ ve $\beta_i \in \mathfrak{I}_i$ mevcut olmasıdır [74-75].
- (iii) B üzerindeki diskre yarı-düzgün yakınsak yapı $\mathfrak{I}_d = \{[x] \times [x], [\emptyset], x \in B\}$ şeklinde tanımlanır [74-75].
- (iv) B üzerindeki indiskre yarı-düzgün yakınsak yapı $\mathfrak{I} = F(B \times B)$, $B \times B$ üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesidir [74-75].
- (v) **SUconv** kategorisi **Set** üzerinde bir topolojik kategoridir [74-75].

Sıralama teorisi (order theory) değişik tür ikili (binary) bağıntıları inceleyen matematiğin bir dalıdır. Sıralama özellikle matematik ve bilgisayar bilimlerinde dahil olmak üzere her yerde vardır [37, 45, 79-81].

Domain teorisi matematik ve bilgisayar arasında ilişkiyi kuran ve domain olarak bilinen özel kısmi sıralama (partially ordered) cümleleri çalışan ve hızla gelişen bir bilim dalıdır. Sonuç olarak domain teorisi sıralama teorisinin bir dalı olarak düşünülebilir. Domain üzerinde ilk çalışma Lambda kalkülüs ve özellikle bilgisayar daki fonksiyonel programlama dili gibi önemli kavramları hitap eden çalışma 1960 yılında Dana Scott tarafından yapıldı [45, 79-81].

Tanım 3.1.8. B bir cümle ve R bağıntısı B üzerinde yansıma (reflexive) özelliğini sağlıyorsa (B, R) ikilisine yansımali uzay denir. Eğer her $a, b \in B$ için aRb olduğunda $f(a)R_1 f(b)$ ise $f: (B, R) \rightarrow (B_1, R_1)$ fonksiyonuna bağıntıyı koruyan fonksiyon denir [1, 37, 72].

Tanım 3.1.9. Objeleri yansımali uzaylar, morfizmleri bağıntıyı koruyan fonksiyonlar ve bileşke de iki bağıntıyı koruyan fonksiyonun bileşkesi olan sınıf bir kategoridir. Buna tüm yansımali uzayların kategorisi denir ve **RRel** ile gösterilir.

Not 3.1.10.

(i) **RRel** de $\{f_i: (B, R) \rightarrow (B_i, R_i), i \in I\}$ kaynağın başlangıç kaldırması olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in B$ ve her $i \in I$ için $aRb \Leftrightarrow f_i a R_i f_i b$ dir [1,72].

(ii) **RRel** de $f: (B, R) \rightarrow (R_1, R_1)$ epimorfizmi bitiş kaldırması olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in B_1$, $aR_1 b$ dir $\Leftrightarrow cRd$ ve $f(c)=a$, $f(d)=b$ olacak şekilde B de en az c ve d elemanları mevcut olmasıdır [72].

(iii) R yansıma bağıntısı B üzerinde diskre yapı olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in B$ için $aRb \Leftrightarrow a=b$ dir [1, 72].

(iv) B üzerindeki indiskre yapı $R = B \times B$ şeklinde tanımlanır [1, 72].

RRel kategorisi **Set** üzerinde bir topolojik kategoridir [1, 37, 72].

Tanım 3.1.11. (B, R) yansılmalı uzay ve $M \subset B$ olsun. $\uparrow_B(M) = \{x \in B : \text{en az bir } a \in M \text{ vardır öyleki } aRx\}$ kümesine M nin yukarı-kapanışı (up-closure) ve $\downarrow_B(M) = \{x \in B : \text{en az bir } a \in M \text{ vardır öyle ki } xRa\}$ kümesine M nin aşağı-kapanışı (down-closure) denir [37, p. 56].

Sıralama (order) ve topoloji arasında çok derin bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi veren aşağıdaki Teorem [37] de ispat edilmiştir.

Teorem 3.1.12 ([37, p. 58-59])

(1) $\uparrow$ ve $\downarrow$ kalıtsal, çarpımsal, yerleşik(grounded), toplamsal fakat idempotent olmayan kapanış operatörleridir.

(2) (B, R) yansılmalı uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) $\uparrow_B$ idempotent kapanış operatörüdür.
- (ii) R geçişme(transitive) özelliğine sahiptir.
- (iii) $(B, \downarrow_B)$ topolojik uzaydır.
- (iv) $\uparrow_B$ idempotent kapanış operatörüdür.
- (v) $(B, \uparrow_B)$ topolojik uzaydır.

1906'da Frechet [42] analizdeki bir çok problem için oldukça faydalı bir yapı olan (pseudo) metrik uzayları tanımladı. 1931'de Wilson [89] quasi metrik uzayını, metrik uzayındaki simetri şartını kaldırarak, tanımladı ve 1963'te Kelly [56] bu uzayları geliştirdi. Klasik metrik uzaylardaki bilinen tamlık, kompaktlık, tam sınırlılık, yakınsaklık gibi temel kavramlar quasi

metrik uzaylarında değişik şekilde ifade edilmiştir. Quasi metrik uzayları Quantum Mekanik [3, 59, 85] Deneysel Psikoloji [33] ve Biyoloji [86] gibi bilimsel alanlarda önemli bir rol oynar.

Metrik uzayların keyfi çarpımlarının, dual-çarpımlarının ve bölüm uzayların her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine 1990'da J. Adamek ve J. Reiterman [2] tarafından tanımlanan genişletilmiş pseudo-metric kullanılarak çözülebileceğini, fakat bu defa da pseudo-metrikten elde edilen topolojinin her zaman Hausdorff olmaması problemi ortaya çıkıyor. Genişletilmiş pseudo-metrik uzaylarında sadece keyfi çarpımlar ve dual-çarpımlar her zaman mevcut olması değil aynı zamanda başlangıç ve bitiş yapıları her zaman var olması önemini göz önüne alırsak, metrikten genişletilmiş pseudo-metrik uzaylara geçişin temel sebeplerinden birisi budur.

Tanım 3.1.13. X boştan farklı bir küme olmak üzere $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ şartını sağlıyorsa d fonksiyonuna genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik veya pqs-metrik ve (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı denir. Eğer d ilave olarak üçgen eşitsizliğini de sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi metrik veya pqs-metrik uzayı denir. Eğer her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ ve d simetri özelliğini sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-yarı metrik veya ps-metrik uzayı denir. Eğer d metrik şartlarından her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = 0$ şartını sağlamıyorsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-metrik veya p-metrik uzayı denir.

Yukarıda tanımlanan değişik metrik kavramları ve bunların uygulamaları ile ilgili temel referans olarak [26, 33, 34, 59, 62, 64, 71, 82, 86, 89] verilebilir.

Eğer d simetri özelliği sağlamazsa, yani, d quasi metrik ise $d(x, y)$ değeri ile $d(y, x)$ değeri arasındaki farklılık değerlendirilebilir. Dağlık bir bölgede $d(x, y)$ değeri x noktasından y noktasına gitmek için harcanan çaba (efort) yı ifade ederse aşağıdan yukarıya gitmek için harcanan çaba yukarıdan aşağıya gitmek için harcanan çabadan daha fazladır.

Tanım 3.1.14. (X, d) ve (Y, e) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $e(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ ise $f: (X, d) \rightarrow (Y, e)$ ye büzülme (non-expansive) fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.15. Objeleri genişletilmiş pseudo-(quasi)-yarı metrik uzaylar, morfizmleri büzülme fonksiyonlar ve bileşkede iki büzülme fonksiyonun bileşkesi olan sınıf bir kategoridir. Buna tüm genişletilmiş pseudo-(quasi)-yarı metrik uzayların kategorisi denir ve **pqsMet** (**psMet**) ile gösterilir [65, 71].

Not 3.1.16.

(i) **pqsMet** (**psMet**) de $\{f_i: (X, d) \rightarrow (X_i, d_i), i \in I\}$ kaynağın başlangıç kaldırması olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in X$ için $d(a, b) = \sup_{i \in I} (d_i(f_i(a), f_i(b)))$ dir [65, 71].

(ii) **pqsMet** (**psMet**) de $\{f_i: (X_i, d_i) \rightarrow (X, d), i \in I\}$ epi-kavşağın bitiş kaldırması olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in X$ için $d(a, b) = \inf_{i \in I} \{d_i(a_i, b_i) : f_i(a_i) = a \text{ ve } f_i(b_i) = b \text{ olacak şekilde en az } a_i, b_i \in X_i \text{ mevcuttur}\}$ [71].

(iii) Her $a, b \in X$ için eğer $a = b$ ise $d(a, b) = 0$ ve eğer $a \neq b$ ise $d(a, b) = \infty$ şeklinde tanımlanan genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik X üzerinde diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir [65, 71].

(iv) Her $a, b \in X$ için $d(a, b) = 0$ şeklinde tanımlanan genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik X üzerinde indiskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir [65, 71].

pqsMet (**psMet**) kategorisi **Set** üzerinde bir topolojik kategoridir [65, 71].

(v) [71, Proposition 2.2] gereği, **RRel** kategorisi **pqsMet** kategorisinin alt kategorisine izomorftur. Dolayısıyla, genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar hem genişletilmiş pseudo-metrik uzayları hem de yansımali (reflexive) uzayları ihtiva eder.

4. BULGULAR

4.1 Lokal Ayırma Aksiyomları

Bu bölümde, lokal T_0 ve T_1 yarı-düzgün yakınsak uzaylar, genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, yansılmalı uzaylar ve yaklaşım uzayların her biri karakterize edilmiştir.

X bir cümle ve $p \in X$ olsun. X 'in iki ayrı kopyasının p noktasında çakışmasına X 'in kendisi ile wedge çarpımı denir ve $X \vee_p X$ şeklinde gösterilir. $X \vee_p X$ te ki bir x noktası $X \vee_p X$ in birinci bileşeni ise x_1 ile ikinci bileşeni ise x_2 ile gösterilir [8].

Tanım 4.1.1. X bir cümle ve $p \in X$, $X \vee_p X$ de X in p de wedge çarpımı olsun.

p de Temel Eksen Dönüşümü (Principle Axis Map at p), $A_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$;

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

p de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map at p), $S_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$;

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

p de Katlama Dönüşümü (The Fold Map at p), $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow X$;

$$\nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2$$

olarak tanımlanır [8].

Eğer X reel sayılar cümlesi ve $p=0$ olursa p de temel eksen dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimidir. p de skewed eksen dönüşümünün görüntüsü ise $y=x$ doğrusu ve y ekseninin birleşiminden oluşur.

Tanım 4.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. Eğer X deki her $x \neq p$ için x in p yi ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğu mevcut veya p nin x i ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğu mevcut ise (X, τ) topolojik uzayına p de T_0 uzayı denir. Eğer X deki her $x \neq p$ için x in p yi ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğu mevcut ve p nin x i ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğu mevcut ise (X, τ) topolojik uzayına p de T_1 uzayı denir [13].

Teorem 4.1.3. (X, τ) topolojik uzay ve $p \in X$ olsun.

- 1) (X, τ) p de T_0 olması için gerek ve yeter koşul p de temel eksen dönüşümü ve p de katlama dönüşümü tarafından üretilen topoloji diskredir, yani $A_p : X \vee_p X \rightarrow (X^2, \tau^2)$ ile $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonların ürettiği başlangıç topoloji diskredir.
- 2) (X, τ) p de T_0 olması için gerek ve yeter koşul p de katlama dönüşümü ile $id : X \vee_p X \rightarrow (X \vee_p X, \omega)$ tarafından üretilen topoloji diskredir, burada $(X \vee_p X, \omega)$ uzayı $i_1, i_2 : (X, \tau) \rightarrow X \vee_p X$ kanonik dönüşümlerin ürettiği bitiş topolojidir.
- 3) (X, τ) p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul p de skewed eksen dönüşümü ve p de katlama dönüşümü tarafından üretilen topoloji diskredir, yani $S_p : X \vee_p X \rightarrow (X^2, \tau^2)$ ile $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonların ürettiği başlangıç topoloji diskredir .

İspat. İspat [13] ' de verilmiştir.

1991 de Baran [8] Teorem 3.1.3 ü kullanarak herhangi bir topolojik kategoride p de $\overline{T_0}$, p de T'_0 ve p de T_1 tanımları vermiştir.

Tanım 4.1.4. $U : E \rightarrow Set$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X , E nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

1) X objesi p de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter koşul $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D , U 'nun sol adjointi olan diskre fanktordur.

2) X objesi p de T'_0 olması için gerek ve yeter koşul $\{id : B \vee_p B \rightarrow U(X \vee_p X) = B \vee_p B$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada, $X \vee_p X$, E 'de wedge çarpımıdır, yani i_1, i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : U(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ U kavşağının bitiş kaldırmasıdır.

3) X objesi p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskredir .

Teorem 4.1.5. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay ve $p \in B$ olsun. $(B, \mathfrak{I})$ p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul her $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{I}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$.

İspat. Kabul edelimki $(B, \mathfrak{I})$ p de T_1 olsun. Bazı $x \neq p$ için $[x] \times [p] \in \mathfrak{I}$ için $\alpha = [x_1] \times [x_2]$ olarak alalım. $\mathfrak{I}_d$ B üzerinde diskre yarı-düzgün yakınsak yapı ve $\pi_i : B^2 \rightarrow B, i = 1, 2$ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $(\pi_1 S_p \times \pi_1 S_p)(\alpha) = [x] \times [p] \in \mathfrak{I}$, $(\pi_2 S_p \times \pi_2 S_p)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{I}$ ve $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{I}_d$ dir. $(B, \mathfrak{I})$ p de T_1 olduğundan buradan bir çelişki elde edilir. O halde, her $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{I}$ dir.

Eğer bazı $x \neq p$ için $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{I}$ ise $\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$ olarak alalım. $(\pi_1 S_p \times \pi_1 S_p)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{I}$, $(\pi_2 S_p \times \pi_2 S_p)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{I}$, $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{I}_d$ olup bir çelişki elde edilir. O halde, her $x \neq p$ için $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$.

Tersine olarak, her $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{I}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$ olduğunu varsayalım. $(B, \mathfrak{I})$ 'nin p de T_1 olduğunu göstereceğiz. $\mathfrak{I}_d$ B üzerinde diskre yarı-düzgün yakınsak yapı ve $\mathfrak{I}^2$, B^2 üzerinde çarpım yarı-düzgün yakınsak yapı olmak üzere $S_p : B \vee_p B \rightarrow U((B^2, \mathfrak{I}^2)) = B^2$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow U((B, \mathfrak{I}_d)) = B$ tarafından doğrulan $B \vee_p B$ üzerindeki $\mathfrak{I}_w$ yapının diskre yarı-düzgün yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor. α , $\mathfrak{I}_w$ de herhangi bir süzgeç olsun. $(\pi_i S_p \times \pi_i S_p)(\alpha) \in \mathfrak{I}, i = 1, 2$ ve $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) \in \mathfrak{I}_d$. $\alpha = [x_i] \times [x_i], (i = 1, 2)$ veya $\alpha = [p] \times [p]$ veya $\alpha = [\emptyset]$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = [p] \times [p]$ ise $(\nabla_p)^{-1}\{p\} = \{p_i = (p, p)\} (i = 1, 2)$ olduğundan $\alpha = [p_i] \times [p_i] (i = 1, 2)$ dir. Eğer $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = [\emptyset]$ ise $\alpha = [\emptyset]$ dir. Eğer $x \neq p$ ve $x \in B$ için $(\nabla_p \times \nabla_p)(\alpha) = [x] \times [x]$ ise $\{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\} \in \alpha$. Dolayısıyla, α sonlu cümleleri içerir ve sonuç olarak $\alpha = [M_0]$ olacak şekilde en az bir $M_0 \in \alpha$ vardır. Açık olarak, $M_0 \subseteq \{x_1, x_2\} \times \{x_1, x_2\}$ ve eğer $i \neq j$ ise ilk şart gereği $(x_i, x_j) \notin M_0$ olduğu görülür ve ikinci şart gereği $M_0 = [\{(x_1, x_1), (x_2, x_2)\}]$ mümkün değildir. O halde, $\alpha = [x_i] \times [x_i], i = 1, 2$ olmalıdır ve sonuç olarak Tanım 4.1.4 ve Not 3.1.7 gereği, $(B, \mathfrak{I})$ p de T_1 dir.

Teorem 4.1.6. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $p \in X$ olsun. (X,d) nin p de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$.

İspat (X,d) p de $\overline{T_0}$, her $x \in X$, $x \neq p$ ve $x_1, x_2 \in X \vee_p X$ olsun. Eğer $x_1 = x_2$ ise yapılacak bir şey yoktur. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise (X,d) p de $\overline{T_0}$ olduğundan 3.1. 13 ve Tanım 4.1.4 den $\infty = \sup \{ d(\pi_i A_p(x_1), \pi_i A_p(x_2)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(x_i), \nabla_p(x_i)), i=1,2 \} = \sup \{ d(x, p), d(p, x), d(x, x)=0 \}$ ve dolayısıyla, $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$ dur, burada, $\pi_i : X^2 \rightarrow X, i=1,2$ izdüşüm fonksiyonları ve d_{dis} , X üzerinde diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

Her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$ olsun. (X,d) p de $\overline{T_0}$ olduğunu gösterelim. $\bar{d}$, $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde p de temel eksen dönüşümü ve p de katlama dönüşümü tarafından üretilen genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik olsun. u ve v $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u,v) = 0$ dir. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\nabla_p(u) \neq \nabla_p(v)$ ise $d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) = \infty$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u,v) = \sup \{ d(\pi_i A_p(u), \pi_i A_p(v)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)), i=1,2 \} = \infty$ dur.

Kabul edelim ki $\nabla_p(u) = x = \nabla_p(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq p$, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ dir. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun. $\bar{d}(u,v) = \sup \{ d(\pi_i A_p(u), \pi_i A_p(v)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)), i=1,2 \} = \sup \{ d(x,p), d(p,x) \}$ olur ve kabulden $\bar{d}(u,v) = \infty$ olur. Benzer şekilde eğer $u = x_2$ ve $v = x_1$ ise $\bar{d}(u,v) = \infty$ olur. Dolayısıyla, 3.1. 13 ve Tanım 4.1.4 den (X,d) p de $\overline{T_0}$ dir.

Teorem 4.1.7. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $p \in X$ olsun. (X,d) nin p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty = d(p, x)$ dir.

İspat (X,d) p de T_1 , her $x \in X$, $x \neq p$ ve $x_1, x_2 \in X \vee_p X$ olsun. Eğer $x_1 = x_2$ ise sonuç aşıkardır. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise (X,d) p de T_1 olduğundan 3.1. 13 ve Tanım 4.1.4 den $\infty = \sup \{ d(\pi_i S_p(x_1), \pi_i S_p(x_2)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(x_i), \nabla_p(x_i)), i=1,2 \} = \sup \{ d(x, p), d(x, x)=0 \} = d(x, p)$ ve $\infty = \sup \{ d(\pi_i S_p(x_2), \pi_i S_p(x_1)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(x_i), \nabla_p(x_i)), i=1,2 \} = \sup \{ d(p, x), d(x, x)=0 \} = d(p, x)$

ve dolayısıyla, $d(x, p) = \infty$ ve $d(p, x) = \infty$ olur, burada, $\pi_i : X^2 \rightarrow X, i = 1, 2$ izdüşüm fonksiyonları ve d_{dis} , X üzerinde diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

Tersine, her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty = d(p, x)$ olsun. (X, d) p de T_1 olduğunu gösterelim. $\bar{d}$, $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde p de skewed eksen dönüşümü ve p de katlama dönüşümü tarafından üretilen genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik olsun. u ve v $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dir. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\nabla_p(u) \neq \nabla_p(v)$ ise $d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) = \infty$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d(\pi_i S_p(u), \pi_i S_p(v)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) \mid i = 1, 2 \} = \infty$ dur.

Kabul edelim ki $\nabla_p(u) = x = \nabla_p(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq p$, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ dir. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$\bar{d}(u, v) = \sup \{ d(\pi_i S_p(u), \pi_i S_p(v)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) \mid i = 1, 2 \} = \sup \{ d(x, p), d(x, x) = 0 \} = d(x, p)$ olur ve kabulden $\bar{d}(u, v) = \infty$ olur. Eğer $u = x_2$ ve $v = x_1$ ise $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d(\pi_i S_p(u), \pi_i S_p(v)), d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) \mid i = 1, 2 \} = \sup \{ d(p, x), d(x, x) = 0 \} = d(p, x)$ olur ve kabulden $\bar{d}(u, v) = \infty$ olur. O halde, 3.1. 13 ve Tanım 4.1.4 den (X, d) p de T_1 dir.

Teorem 4.1.8. Tüm genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar (X, d) p de T'_0 dir.

İspat d_1 , $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde $i_1, i_2 : (X, d) \rightarrow X \vee_p X$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen bitiş genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik ve $\bar{d}$, $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde $id : X \vee_p X \rightarrow (X \vee_p X, d_1)$ birim fonksiyonu ile $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow (X, d_{\text{dis}})$ p de katlama fonksiyonu tarafından elde edilen genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik olsun. $\bar{d}$ nin diskre olduğunu gösterelim. u ve v , $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dir. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer u ve v noktaları $X \vee_p X$ wedge çarpımının aynı bileşeninde ise $d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) = \infty$ çünkü $\nabla_p(u) \neq \nabla_p(v)$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)) = \infty, d_1(id(u), id(v)) = d_1(u, v) \} = \infty$ olur. Kabul edelim ki u ve v noktaları $X \vee_p X$ wedge çarpımının farklı bileşeninde ve $\nabla_p(u) = x = \nabla_p(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq p$, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ dir. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

3.1. 13 den $d_1(u, v) = \infty$ ve dolayısıyla $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d_{\text{dis}}(\nabla_p(u), \nabla_p(v)), d_1(\text{id}(u), \text{id}(v)) = d_1(u, v) = \infty \} = \infty$ olur. O halde, $\bar{d}$ diskredir, yani, 3.1. 13 ve Tanım 4.1.4 den (X, d) p de T_0' dir.

Tanım 4.1.9. X bir cümle, $p \in X$ ve R , X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $x \in X$ için xRp ve pRx olduğunda $x = p$ ise R ye p de anti-simetrik bağıntı denir. Eğer $x \in X$ için xRp veya pRx olduğunda $x = p$ ise R ye p de diskre bağıntı denir.

Teorem 4.1.10. (X, R) yansımali uzay ve $p \in X$ olsun. (X, R) nin p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul R , p de diskredir.

İspat. Kabul edelim ki (X, R) p de T_1 ve $x \in X$ için xRp olsun. $\pi_1 S_p(x_1) R \pi_1 S_p(x_2) = xRp$, $\pi_2 S_p(x_1) R \pi_2 S_p(x_2) = xRx$, burada $\pi_i : X^2 \rightarrow X, i = 1, 2$ izdüşüm fonksiyonları ve $\nabla_p(x_1) = x = \nabla_p(x_2)$ olur. (X, R) p de T_1 olduğundan 3.1. 10 ve Tanım 4.1.4 den $x_1 = x_2$ ve dolayısıyla, $x = p$, yani, R p de diskredir. Benzer şekilde eğer pRx ise R p de diskredir.

Tersine olarak, R , p de diskre ve u ve v , $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise R yansıma özelliğini sağladığından $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v)$, $\pi_2 S_p(u) R \pi_2 S_p(v)$ ve $\nabla_p(u) = \nabla_p(v)$ dir. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v)$, $\pi_2 S_p(u) R \pi_2 S_p(v)$ ve $\nabla_p(u) = x = \nabla_p(v)$, $x \in X$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq p$, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ dir. Eğer $u = x_1$ ve $v = x_2$ ise $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v) = xRp$ ve R , p de diskre olduğundan $x = p$, yani, $u = v$ dir. Eğer $u = x_2$ ve $v = x_1$ ise $\pi_1 S_p(u) R \pi_1 S_p(v) = pRx$ ve R , p de diskre olduğundan $x = p$, yani, $u = v$ dir. O halde, 3.1.10 ve Tanım 4.1.4 den (X, R) p de T_1 dir.

4.2 Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeler

Bu bölümde, Baran [8,9] tarafından topolojik kategoride tanımlanan kuvvetli kapalılık, kapalılık kavramları **SUConv** ve **RRel** kategorilerinde karakterize edilmiş ve bu kavramlarla klasik anlamda kapalılık kavramı arasında ilişkiler incelenmiştir.

X bir cümle ve $p \in X$ olsun. $\bigvee_p^\infty X$ sonsuz wedge çarpımı X 'in sayılabilir adetteki ayrık kopyalarını alınması ve bunların p noktasında çakıştırılması ile elde

edilir. $X^\infty = X \times X \times \dots$ olsun. $A_p^\infty : \bigvee_p^\infty X \rightarrow X^\infty$ dönüşümü $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, x, p, \dots)$ ve $\nabla_p^\infty : \bigvee_p^\infty X \rightarrow X$ dönüşümü $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ şeklinde tanımlanır [8,9]. Burada her $i \in I$ için (x_i) sonsuz wedge'in i . inci bileşeninde ve $x, (p, p, \dots, p, x, p, \dots)$ ifadesinde i . inci yerdedir.

(X, τ) topolojik uzay, $p \in X$ ve F, X in boştan farklı bir alt cümlesi olsun. $q, X \setminus F$ üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q : (X, \tau) \rightarrow X / F = (X \setminus F) \cup \{*\}$ fonksiyonunun ürettiği final topoloji $(X / F, \tau_*)$ ile gösterilir[8,9].

Teorem 4.2.1. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere,

(i) τ^*, X^∞ üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere, $\{p\}$ nin X de *kapalı* olması için gerek ve yeter şart $A_p^\infty : \bigvee_p^\infty X \rightarrow (X^\infty, \tau^*)$ ve $\nabla_p^\infty : \bigvee_p^\infty X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır.

(ii) $F \subset X$ in *kapalı* olması için gerek ve yeter şart $\{*\}$ in $(X / F, \tau_*)$ da kapalı olmasıdır.

(iii) $F \subset X$ in *kuvvetli kapalı* olması için gerek ve yeter şart $(X / F, \tau_*)$ in $*$ da T_1 olmasıdır .

İspat. İspat [13] de verilmiştir.

Yukarıdaki Teorem kullanarak, topolojik kategoride kapalı ve kuvvetli kapalı tanımları Baran [8,9] tarafından aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.2.2. $U : E \rightarrow Set$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X, E nin bir objesi, $p \in B$ ve F, B nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. $q, B \setminus F$ üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q : U(X) = B \rightarrow B \setminus F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ epi U –kaynağının bitiş kaldırması X / F ile gösterilir. Buna durumda;

1) $\{p\}$ nin X de kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\{A_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow U(X^\infty) = B^\infty$ ve $\nabla_p^\infty : \bigvee_p^\infty B \rightarrow UD(B) = B\}$ U –kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

2) $F \subset X$ in kapalı olması için gerek ve yeter şart $\{*\}$ nin X / F de kapalı veya $F = \emptyset$ olmasıdır.

3) $F \subset X$ in kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart X / F nin $*$ ’da T_1 veya $F = \emptyset$ olmasıdır.

4) $B = F$ ise bu durumda F hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır .

Not 4.2.3.

(i) **Top** topolojik uzayların kategorisindeki kapalılık kavramı, topolojik uzaylardaki kapalılık kavramı ile aynıdır ve F nin *kuvvetli kapalı* olması için gerek ve yeter şart F nin kapalı ve her bir $x \notin F$ için F nin x i ihtiva etmeyen en az bir komşuluğunun mevcut olmasıdır. Eğer topolojik uzay T_1 ise kapalı ve kuvvetli kapalı kavramları çakışır [9].

(ii) Genelde, herhangi bir topolojik kategori için kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır. Hatta topolojik kategorinin nesnesi T_1 olsa bile bu kavramlar birbirinden bağımsızdır [9].

(iii) Baran [17,18, 20-21] de kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde karakterize etmiş ve bu kavramların Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir.

Teorem 4.2.4. $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay ve $p \in B$ olsun. $\{p\}$ B -de kapalıdır ancak ve ancak her $x \neq p$ için $x \in B$, aşağıdaki şartları sağlar.

1. $[x] \times [p] \notin \mathfrak{S}$,
2. $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{S}$,
3. $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \notin \mathfrak{S}$.

İspat. Kabul edelim ki $\{p\}$ B -de kapalı olsun. Eğer bazı $x \neq p$ için $[x] \times [p] \in \mathfrak{S}$ ise $\alpha = [x_1] \times [x_2]$ olarak alalım. Buradan da $(\pi_1 A_p^\infty \times \pi_1 A_p^\infty)(\alpha) = [x] \times [p] \in \mathfrak{S}$, $(\pi_2 A_p^\infty \times \pi_2 A_p^\infty)(\alpha) = [p] \times [x] \in \mathfrak{S}$, $i \geq 3$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = [p] \times [p] \in \mathfrak{S}$, ve $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{S}_d$ olup $\{p\}$ B -de kapalı olması ile çelişir. O halde, her $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{S}$ dir.

Eğer bazı $x \neq p$ için $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{S}$ ise $\alpha = ([x_1] \times [x_1]) \cap ([x_2] \times [x_2])$ olarak alalım. $(\pi_1 A_p^\infty \times \pi_1 A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{S}$, $(\pi_2 A_p^\infty \times \pi_2 A_p^\infty)(\alpha) = ([p] \times [p]) \cap ([x] \times [x]) \in \mathfrak{S}$, $i \geq 3$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = [p] \times [p] \in \mathfrak{S}$, ve $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{S}_d$ olup $\{p\}$ B -de kapalı olması ile çelişir. O halde, her $x \neq p$ için $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{S}$ dir.

Eğer bazı $x \neq p$ için $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \in \mathfrak{I}$ ise $\alpha = [\{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\}]$ olarak alalım. Buradan da $\forall i \in I$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \in \mathfrak{I}$, ve $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [x] \times [x] \in \mathfrak{I}_d$ olup $\{p\}$ B -de kapalı olması ile çelişir.

Tersine olarak, her $x \neq p$ için $x \in B$, $[x] \times [p] \notin \mathfrak{I}$, $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$ olduğunu kabul edelim. $(B, \mathfrak{I})$ 'nin p de kapalı olduğunu göstereceğiz. $\mathfrak{I}_d$ B üzerinde yarı-düzgün yakınsak diskre yapı ve $\mathfrak{I}^\infty$, çarpım yarı-düzgün yakınsak yapı olmak üzere $A_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow U((B^\infty, \mathfrak{I}^\infty)) = B^\infty$ ve $\nabla_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow U((B, \mathfrak{I}_d)) = B$ tarafından doğrulan $\vee_p^\infty B$ üzerindeki tanımlı $\mathfrak{I}_W^\infty$ yapının diskre yarı-düzgün yakınsak olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\alpha, \mathfrak{I}_W^\infty$ de herhangi bir süzgeç olsun. Her $i \in I$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) \in \mathfrak{I}$, ve $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) \in \mathfrak{I}_d$ dir. $\alpha = [x_i] \times [x_i], (i \in I)$ veya $\alpha = [(p, p, \dots)] \times [(p, p, \dots)]$ veya $\alpha = [\emptyset]$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [p] \times [p]$, ise $(\nabla_p^\infty)^{-1}\{p\} = \{p_i = (p, p, \dots)\}$ olduğundan $\alpha = [(p, p, \dots)] \times [(p, p, \dots)]$ olur.

Eğer $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [\emptyset]$, ise $\alpha = [\emptyset]$ olur.

Eğer $x \neq p$ ve bazı $x \in B$ için $(\nabla_p^\infty \times \nabla_p^\infty)(\alpha) = [x] \times [x]$, ise α ya $W = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\} \times \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ şeklindeki sonlu cümleyi içerir ya da $W = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\}$ şeklindeki sonsuz cümleyi içerir.

Eğer $W = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\} \times \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\} \in \alpha$ ise α sonlu cümleyi içerir ve sonuç olarak $\alpha = [M_0]$ olacak şekilde en az bir $M_0 \in \alpha$ vardır. Açık olarak, $M_0 \subseteq \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\} \times \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ ve eğer $i_k \neq i_l, k = 1, 2, \dots, n$ ve $k \neq l$ ise, ilk şart gereği $(x_i, x_j) \notin M_0$ olduğu görülür ve ikinci şart gereği $M_0 = [(x_{i_1}, x_{i_1}), (x_{i_2}, x_{i_2}), \dots, (x_{i_n}, x_{i_n})]$ mümkün değildir. O halde, $\alpha = [M_0] = [x_i] \times [x_i], (i \in I)$ olur.

Eğer $W = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\} \in \alpha$, Dolayısıyla, α sonsuz cümleyi içerir ve sonuç olarak $\alpha = [M_0]$ olacak şekilde en az bir $M_0 \in \alpha$ vardır ve $M_0 \subseteq W = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\}$ dir.

Eğer $M_0 = W = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\}$ ise, $\forall i \in I$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \in \mathfrak{S}$. Dolayısıyla, üçüncü şartı gereği $M_0 = W = \{x_1, x_2, \dots\} \times \{x_1, x_2, \dots\}$ olması mümkün değildir. Eğer $k, m > 1$ ve $m \leq k$ için $M_0 = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \times \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$ ise, o zaman $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \cap ([p] \times [x]) \cap ([x] \times [p]) \in \mathfrak{S}$. Dolayısıyla, üçüncü şartı gereği $M_0 = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \times \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$ olması mümkün değildir. Eğer $M_0 = \{(x_i, x_j), i, j \in I, i \neq j\}$ ise $\forall i \in I$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [p]) \in \mathfrak{S}$ veya $([p] \times [x]) \in \mathfrak{S}$. O halde, ilk şartı gereği $M_0 = \{(x_i, x_j), i, j \in I, i \neq j\}$ olması mümkün değildir. Eğer $M_0 = \{(x_i, x_i), i \in I\}$ ise $\forall i \in I$ için $(\pi_i A_p^\infty \times \pi_i A_p^\infty)(\alpha) = ([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \in \mathfrak{S}$. O halde ikinci şartı gereği $M_0 = \{(x_i, x_i), i \in I\}$ olması mümkün değildir. Eğer $M_0 = \{(x_i, x_i), i \in I\} \cup \{(x_k, x_{k+1})\}$ veya $M_0 = \{(x_i, x_i), i \in I\} \cup \{(x_k, x_{k+1}), (x_{k+3}, x_k)\}$ veya $M_0 = \{(x_i, x_i), i \in I\} \cup \{(x_k, x_{k+1}), (x_{k+1}, x_k), (x_{k+3}, x_{k+10})\}$ ise ikinci şartı gereği M_0 in bu durumları söz konusu olamaz.

Dolayısıyla, eğer $\alpha \in \mathfrak{S}_W^\infty$ ise $\alpha = [x_i] \times [x_i], (i \in I)$, $\alpha = [(p, p, \dots)] \times [(p, p, \dots)]$ veya $\alpha = [\emptyset]$ olur. Yani 3.1.7 gereği $A_p^\infty : \bigvee_p B \rightarrow U((B^\infty, \mathfrak{S}^\infty)) = B^\infty$ ve $\nabla_p^\infty : \bigvee_p B \rightarrow U((B, \mathfrak{S}_d)) = B$ tarafından doğrulan $\bigvee_p B$ üzerindeki $\mathfrak{S}_W^\infty$ yapı diskre yarı-düzgün yakınsak yapıdır. O halde, Tanım 4.1.4 gereği $\{p\}$ B de kapalıdır.

Yardımcı Teorem 4.2.5. $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B, \beta \in \mathfrak{S}$ ve $q : U(X) = B \rightarrow B/M = (B \setminus M) \cup \{*\}$, $q, B \setminus M$ üzerinde birim ve M yı $*$ noktasına götüren fonksiyon her $a, b \in M$ için $a \notin M$ ve $b \in M$ olsun.

- i. $\beta \subset [b] \times [a]$ veya $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeç olması için gerek ve yeter koşul $(q \times q)(\beta) \subset [*] \times [a]$.
- ii. $\beta \cap ([M] \times [M]) \subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ ve $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeç olması için gerek ve yeter koşul $(q \times q)(\beta) \subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*])$.
- iii. $(q \times q)(\beta) \subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) \cap ([a] \times [*]) \cap ([*] \times [a])$ öz-süzgeç olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\beta \subset [b] \times [a]$ veya $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeçtir.

(b) $\beta \subset [a] \times [b]$ veya $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz-süzgeçtir.

(c) $\beta \cap ([M] \times [M]) \subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ ve $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeçtir.

İspat. (i) Kabul edelim ki $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$, $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$ olmak üzere $\beta \subset [b] \times [a]$ veya $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeç olsun. $(q \times q)(\beta) \subset [*] \times [a]$ olduğunu göstermemiz gerekir.

Eğer $\beta \subset [b] \times [a]$ ise $(q \times q)(\beta) \subset (q \times q)([b] \times [a]) = [*] \times [a]$ dir. $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeç ve $W \in (q \times q)(\beta)$ olsun. $W \supset (q \times q)(U)$ olacak şekilde en az bir $U \in \beta$ vardır. $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeç olduğundan $U \cap (M \times \{a\}) \neq \emptyset$ dir. O halde, bazı $b \in M$ için $(b, a) \in U$ ve $(q \times q)((b, a)) = (*, a) \in (q \times q)(U) \subset W$ ve sonuç olarak $W \in [*] \times [a]$ ve $(q \times q)(\beta) \subset [*] \times [a]$ olur.

Tersine olarak, Kabul edelim ki $\beta \in \mathfrak{I}, a \notin M$ ve $(q \times q)(\beta) \subset [*] \times [a]$ olsun. Eğer bazı $b \in M$ için $\beta \not\subset [b] \times [a]$ ve $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz olmayan süzgeç ise en az bir $U \in \beta$ için $U \cap (M \times \{a\}) = \emptyset$. Buradan $\forall c \in M$ için $(c, a) \notin U$ ve $(q \times q)((c, a)) = (*, a) \notin (q \times q)(U) \in (q \times q)(\beta)$ ve dolayısıyla, $(q \times q)(\beta) \not\subset [*] \times [a]$ olup bir çelişki elde edilir. O halde, $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$ olmak üzere $\beta \subset [b] \times [a]$ veya $\beta \cup ([M] \times [a])$ öz-süzgeçtir.

(ii) Kabul edelim ki $\beta \cap ([M] \times [M]) \subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ ve $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeç olsun. $(q \times q)(\beta) \subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*])$ olduğunu göstermemiz gerekir. İlk olarak $(q \times q)(\beta) \subset ([*] \times [*])$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $(q \times q)(\beta) \not\subset ([*] \times [*])$ ise $(*, *) \notin W$ olacak şekilde en az bir $W \in (q \times q)(\beta)$ vardır. $W \in (q \times q)(\beta)$ olduğundan $(q \times q)(V) \subset W$ olacak şekilde en az bir $V \in \beta$ vardır. $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeç olup $V \cap (M \times M) \neq \emptyset$ ve sonuç olarak $(q \times q)(V \cap (M \times M)) = (*, *) \in (q \times q)(V) \subset W$. Buradan da $(*, *) \in W$ olup bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $(q \times q)(\beta) \subset ([*] \times [*])$ olmalıdır. $(q \times q)(\beta \cap ([M] \times [M])) = (q \times q)(\beta) \cap (q \times q)([M] \times [M]) = (q \times q)(\beta) \cap ([*] \times [*]) = (q \times q)(\beta)$ ve sonuç olarak;

$$(q \times q)(\beta) = (q \times q)(\beta \cap ([M] \times [M])) \subset (q \times q)([a] \times [a]) \cap (q \times q)([M] \times [M]) = ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]).$$

Tersine olarak, Kabul edelim ki $(q \times q)(\beta) \subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*])$ olsun. $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeç olduğunu göstereceğiz. Eğer $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeç ise,

$W \cap (M \times M) = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $W \in \beta$ vardır. $(q \times q)(W) \in (q \times q)(\beta) \subset [*] \times [*]$ ve sonuç olarak $(*, *) \in (q \times q)(W)$ olur. O halde $(q \times q)((x, y)) = (*, *)$ olacak şekilde $(x, y) \in W$ vardır. Buradan da $(x, y) \in W \cap (M \times M)$ olup bir çelişki elde edilir. O halde $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz-süzgeçtir. Şimdi, $\beta \cap ([M] \times [M]) \subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $U \in \beta \cup ([M] \times [M])$ ise $M \times M \subset U \in \beta$ ve $(q \times q)(U) \in (q \times q)(\beta) \subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) = (q \times q)([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$. Buradan da $(q \times q)(V) \subset (q \times q)(U)$ olacak şekilde en az bir $V \in ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ vardır. $V \in ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ olduğundan $V \cap (M \times M) \neq \emptyset$ ve $V \subset V \cup (M \times M) = (q \times q)^{-1}((q \times q)(V)) \subset (q \times q)^{-1}((q \times q)(U)) = U \cup (M \times M) = U$ ve sonuç olarak $U \in ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$. O halde, $\beta \cap ([M] \times [M]) \subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ elde edilir.

(iii) in ispatı (i) ve (ii) şıktan açıktır.

Teorem 4.2.6. $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$ nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$, ve $\beta \in \mathfrak{S}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- i. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.
- ii. $\beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.
- iii. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir, veya $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz süzgeçtir, veya $\beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: M nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul Tanım 4.1.4 gereği, $\{*\}, B/M$ de kapalı olmasıdır. Teorem 4.2.4 gereği, B/M de $\forall a \neq *$ için $[a] \times [*] \notin \mathfrak{S}'$, $([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) \notin \mathfrak{S}'$, ve $([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) \cap ([a] \times [*]) \cap ([*] \times [a]) \notin \mathfrak{S}'$, burada $\mathfrak{S}' q: U(X) = B \rightarrow B/M = (B \setminus M) \cup \{*\}$ tarafından B/M üzerinde doğrulan bölüm yarı-düzgün yapısıdır ancak ve ancak $\mathfrak{S}'$ ün tanımı ve Not 3.1.7 gereği, $\forall \beta \in \mathfrak{S}$ ve $a \notin M$ için $(q \times q)(\beta) \not\subset ([a] \times [*])$, $(q \times q)(\beta) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([a] \times [*])$, ve $(q \times q)(\beta) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) \cap ([a] \times [*]) \cap ([*] \times [a])$ ancak ve ancak, Yardımcı Teorem 4.2.5 gereği, $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$, ve $\beta \in \mathfrak{S}$ olmak üzere (i), (ii) ve (iii) şartları sağlanır.

Teorem 4.2.7. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$ nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$, ve $\beta \in \mathfrak{I}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- i. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.
- ii. $\beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat. M nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul Tanım 4.1.4 gereği, B/M^* da T_1 olmasıdır. Teorem 4.2.4 gereği, B/M de $\forall a \neq *$ için $[a] \times [*] \notin \mathfrak{I}'$, $([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*]) \notin \mathfrak{I}'$ dir ancak ve ancak $\mathfrak{I}'$ ün tanımı ve Not 3.1.7 gereği, $\forall \beta \in \mathfrak{I}$ ve $a \notin M$ için $(q \times q)(\beta) \not\subset ([a] \times [*])$, ve $(q \times q)(\beta) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([*] \times [*])$ dir ancak ve ancak, Yardımcı Teorem 4.2.5 gereği, $\forall a, b \in B$ için $a \notin M$ ve $b \in M$, ve $\beta \in \mathfrak{I}$ olmak üzere (i) ve (ii) şartları sağlanır.

Teorem 4.2.8. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay ve $p \in B$. Aşağıdaki denktir.

- i. $(B, \mathfrak{I})$ p de T_1 dir.
- ii. $\{p\}$ kuvvetli kapalıdır.
- iii. Her $x \neq p$ için $[x] \times [p] \notin \mathfrak{I}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([p] \times [p]) \notin \mathfrak{I}$ dir.

İspat. Teorem 4.1.5, Teorem 4.2.7 ve Tanım 4.1.4 ten elde edilir.

Teorem 4.2.9. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$ nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul M klasik anlamda kapalıdır.

İspat. Kabul edelim ki M kuvvetli kapalı olsun. M ın klasik anlamda kapalı olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $a \notin M$ olacak şekilde $\forall a \in B$ ve $\forall (\alpha, a) \in q$ olsun. Buradan $(\alpha \times \alpha) \in \mathfrak{I}_q \subset \mathfrak{I}$, ve özel olarak Teorem 4.2.7 gereği, $(\alpha \times \alpha) \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir, ve sonuç olarak $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. O halde, M klasik anlamda kapalıdır.

Kabul edelim ki M klasik anlamda kapalı olsun. M nin kuvvetli kapalı olduğunu göstereceğiz. $a \notin M, b \in M$ olacak şekilde $\forall a, b \in B$ ve $\beta \in \mathfrak{I}$ olsun. Teorem 4.2.7 nin (i) ve (ii) şartların sağlandığını göstermemiz gerekir. $\beta \in \mathfrak{I}$ ise $\beta \supset (\alpha \times \alpha)$ olacak şekilde

$(\alpha, a) \in q$ vardır. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ olduğunu gösterelim. Eğer $\beta \subset [a] \times [b]$ ise, $\alpha \subset [a]$ ve $\beta \supset (\alpha \times \alpha)$ olduğundan $\alpha \subset [b]$ olur. Buradan da $b \in M$ ve $[M] \subset [b]$ gereği $\alpha \cup [M]$ öz-süzgeç olup M in klasik anlamda kapalı olması ile çelişir. O halde, $\beta \not\subset [a] \times [b]$ dir. Şimdi, $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz. Bunun öz-süzgeç olduğunu varsayalım. $\beta \supset (\alpha \times \alpha)$ olduğundan $(\alpha \times \alpha) \cup ([a] \times [M])$ öz-süzgeç olduğun açık olarak görülür ve sonuç olarak $\alpha \cup [M]$ öz-süzgeç olup bir çelişki elde edilir. Teorem 4.2.7 (ii) şıkı da kolay bir şekilde gösterilir. O halde, M kuvvetli kapalıdır.

Not 4.2.10. $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$ olsun. Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.7 ve Teorem 4.2.9 gereği, eğer M kapalı ise o zaman M hem kuvvetli kapalı hem de klasik anlamda kapalıdır.

Yardımcı Teorem 4.2.11. $f : (A, \mathfrak{S}') \rightarrow (B, \mathfrak{S})$ **SUConv** de bir morfizm olsun.

- Eğer $D \subset B$ kuvvetli kapalı ise $f^{-1}(D)$ de kuvvetli kapalıdır.
- $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay olsun. Eğer $N \subset B$ kuvvetli kapalı ve $M \subset N$ kuvvetli kapalı ise, $M \subset B$ de kuvvetli kapalıdır.

İspat. (a) $D \subset B$ kuvvetli kapalı ve $a \notin f^{-1}(D), b \in f^{-1}(D)$ olacak şekilde $\forall a, b \in A$ için ve $\beta \in \mathfrak{S}'$ olsun.

$f(a) \notin D, f(b) \in D$ olacak şekilde $f(a), f(b) \in B$ ve $(f \times f)(\beta) \in \mathfrak{S}$. D kuvvetli kapalı olduğundan Teorem 4.2.7 gereği

- $(f \times f)\beta \not\subset [f(a)] \times [f(b)]$ ve $(f \times f)\beta \cup ([f(a)] \times [D])$ öz olmayan süzgeçtir.
- $(f \times f)\beta \cap ([D] \times [D]) \not\subset ([f(a)] \times [f(a)]) \cap ([D] \times [D])$ veya $(f \times f)\beta \cup ([D] \times [D])$ öz olmayan süzgeçtir.

Eğer $(f \times f)\beta \not\subset [f(a)] \times [f(b)]$ ise açık olarak $\beta \not\subset [a] \times [b]$. Biz $\beta \cup ([a] \times [f^{-1}(D)])$ öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz. Bunun öz süzgeç olduğunu kabul edelim.

Lemma 2.1 gereği;

$(f \times f)\beta \cup ([f(a)] \times [D]) \subset (f \times f)\beta \cup ([f(a)] \times [ff^{-1}(D)]) \subset (f \times f)\beta \cup ([a] \times [f^{-1}(D)])$, ve sonuç olarak $(f \times f)\beta \cup ([f(a)] \times [D])$ öz süzgeç olması ile çelişir. O halde $\beta \cup ([a] \times [f^{-1}(D)])$ öz olmayan süzgeçtir.

Eğer $(f \times f)\beta \cap ([D] \times [D]) \not\subset ([f(a)] \times [f(a)]) \cap ([D] \times [D])$ ise

$\beta \cap ([f^{-1}(D)] \times [f^{-1}(D)]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([f^{-1}(D)] \times [f^{-1}(D)])$. $\beta \cup ([f^{-1}(D)] \times [f^{-1}(D)])$ öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz. Bunun öz süzgeç olduğunu kabul edelim.

$(f \times f)(\beta) \cup ([D] \times [D]) \subset (f \times f)(\beta) \cup ([ff^{-1}(D)] \times [ff^{-1}(D)]) \subset (f \times f)(\beta) \cup ([f^{-1}(D)] \times [f^{-1}(D)])$ ve sonuç olarak $(f \times f)\beta \cup ([D] \times [D])$ öz süzgeç olması ile çelişir. O halde $\beta \cup ([f^{-1}(D)] \times [f^{-1}(D)])$ öz olmayan süzgeçtir.

(b) $N \subset B$ ve $M \subset N$ kuvvetli kapalı, $a \notin M, b \in M$ olacak şekilde $\forall a, b \in B$ için ve $\beta \in \mathfrak{S}$ olsun. Teorem 4.2.7 gereği,

- i. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.
- ii. $\beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir.

Kabul edelim ki $a \notin N$. $N \subset B$ kuvvetli kapalı olduğundan, Teorem 4.2.7 gereği,

- I. $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [N])$ öz olmayan süzgeçtir
- II. $\beta \cap ([N] \times [N]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([N] \times [N])$ veya $\beta \cup ([N] \times [N])$ öz olmayan süzgeçtir.

Sonuç olarak, (i) $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $\beta \cup ([a] \times [M])$ öz olmayan süzgeç olduğunu elde ederiz. $M \subset N$ olduğundan (ii) $\beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $\beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir. Kabul edelim ki $a \in N$. $i : (N, \mathfrak{S}') \rightarrow (B, \mathfrak{S})$ içine fonksiyon başlangıç kaldırma ve $\beta \in \mathfrak{S}$ olduğundan, Not 3.1.7 gereği,

$(i \times i)^{-1}(\beta) \in \mathfrak{S}'$ $((i \times i)^{-1}(\beta) = \beta \cup [N] \times [N])$ ve $\beta \subset (i \times i)((i \times i)^{-1}(\beta))$. $M \subset N$ olduğundan ve $a, b \in N, a \notin M, b \in M$ Teorem 4.2.7 gereği (i) $(i \times i)^{-1}(\beta) \not\subset [a] \times [b]$ (ve sonuç olarak $\beta \not\subset [a] \times [b]$ ve $(i \times i)^{-1}(\beta) \cup ([a] \times [M]) = \beta \cup ([a] \times [M])$) öz olmayan süzgeçtir.

(ii) $(i \times i)^{-1}(\beta) \cap ([M] \times [M]) = \beta \cap ([M] \times [M]) \not\subset ([a] \times [a]) \cap ([M] \times [M])$ veya $(i \times i)^{-1}(\beta) \cup ([M] \times [M]) = \beta \cup ([M] \times [M])$ öz olmayan süzgeçtir. O halde, Teorem 4.2.7 gereği, $M \subset N$ olduğundan $M \subset B$ kuvvetli kapalıdır.

Yardımcı Teorem 4.2.12. $f : (A, \mathfrak{S}') \rightarrow (B, \mathfrak{S})$ **SUConv** de bir morfizm olsun.

- a. Eğer $D \subset B$ kapalı ise $f^{-1}(D)$ de kapalıdır.

- b. $(B, \mathfrak{I})$ yarı-düzgün yakınsak uzay olsun. Eğer $N \subset B$ kapalı ve $M \subset N$ kapalı ise, $M \subset B$ de kapalı olsun.

İspat. Teorem 4.2.7 yerine Teorem 4.2.6 kullanırsa ispatı Yardımcı Teorem 4.2.11 e benzerdir.

Teorem 4.2.13. (X, R) yansımali uzay ve $p \in X$ olsun. $\{p\}$ nin X de kapalı olması için gerek ve yeter koşul R nin p de anti-simetrik olmasıdır.

İspat. Kabul edelimki $\{p\}$ nin X de kapalı ve $x \in X$ için xRp ve pRx olsun. $\pi_1 A_p^\infty(x_1) R \pi_1 A_p^\infty(x_2) = xRp$, $\pi_2 A_p^\infty(x_1) R \pi_2 A_p^\infty(x_2) = pRx$ bütün $i \geq 3$ için $\pi_i A_p^\infty(x_1) R \pi_i A_p^\infty(x_2) = pRp$ ve $\nabla_p^\infty(x_1) = x = \nabla_p^\infty(x_2)$ olup $\{p\}$ X de kapalı olduğundan 3.1. 10 ve Tanım 4.2.2 den $x_1 = x_2$ ve dolayısıyla, $x = p$, yani, R, p de anti-simetriktir.

Tersine olarak, R, p de anti-simetrik ve u ve v , $\bigvee_p^\infty X$ sonsuz wedge çarpımında herhangi iki nokta olsun. Kabul edelim ki her $i \in I$ için $\pi_i A_p^\infty(u) R \pi_i A_p^\infty(v)$ ve $\nabla_p^\infty(u) = \nabla_p^\infty(v)$ olsun. Eğer $\nabla_p^\infty(u) = x = \nabla_p^\infty(v)$, $x \in X$ ise en az $k, n \in I$ vardır öyleki $u = x_k$ ve $v = x_n$ dir. $\pi_k A_p^\infty(x_k) R \pi_k A_p^\infty(x_n) = xRp$, $\pi_n A_p^\infty(x_k) R \pi_n A_p^\infty(x_n) = pRx$ ve bütün $i \neq k, n$ için $\pi_i A_p^\infty(x_k) R \pi_i A_p^\infty(x_n) = pRp$ ve R, p de anti-simetrik olduğundan $x = p$, yani, $u = v$ dir. Eğer $\nabla_p^\infty(u) = p = \nabla_p^\infty(v)$ ise $u = p = v$ dir. O halde, 3.1. 10 ve Tanım 4.2.2 den $\{p\}$ nin X de kapalıdır.

Teorem 4.2.14. (X, R) yansımali uzay ve M, X nin boştan farklı alt kümesi olsun.

- (1) M nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ varsa $x \in M$ olmalıdır.
- (2) M nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için xRa ve aRx olacak şekilde en az bir $a, b \in M$ varsa $x \in M$ olmalıdır.

İspat. (1) Kabul edelim ki M kuvvetli kapalı ve her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ olsun. $q : (B, R) \rightarrow (B/M, R_1)$ bölüm fonksiyonu, $q(x) R_1(q(a) = *)$ veya $(q(a) = *) R_1 q(x)$, ve M kuvvetli kapalı olduğundan Teorem 4.1.11 den $(B/M, R_1)$ * da diskredir ve dolayısıyla, $q(x) = *$, yani, $x \in M$ dir.

Kabul edelim ki her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ varsa $x \in M$ olsun. M nin kuvvetli kapalı olduğunu gösterelim, yani, Tanım 4.2.2 den $(B/M, R_1)$ nin $*$ 'da T_1 olduğunu gösterelim. $y \in B/M$ için $y R_1 *$ veya $* R_1 y$ olsun. q örten olduğundan $q(x)=y$ ve $q(a)=*$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ ve $a \in M$ mevcuttur. $q : (B, R) \rightarrow (B/M, R_1)$ bölüm fonksiyonu olduğundan 3.1.10 dan xRa veya aRx dır. Kabulden $x \in M$ ve dolayısıyla, $y=q(x)=*$ olur. O halde, Teorem 4.2.8 den $(B/M, R_1)$ $*$ da T_1 dir.

(2) Kabul edelim ki M kapalı ve her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a, b \in M$ olsun. $q : (B, R) \rightarrow (B/M, R_1)$ bölüm fonksiyonu, $q(x) R_1 (q(a) = *)$ ve $(q(b) = *) R_1 q(x)$, ve M kapalı olduğundan Teorem 4.2.8 den R_1 $*$ da anti-simetriktir ve dolayısıyla, $q(x) = *$, yani, $x \in M$ dir.

Kabul edelim ki her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ varsa $x \in M$ olsun. M nin kapalı olduğunu gösterelim, yani, Tanım 4.2.2 den $\{*\}$ ın B/M de kapalı olduğunu gösterelim. $y \in B/M$ için $y R_1 *$ ve $* R_1 y$ olsun. q örten olduğundan $q(x)=y$ ve $q(a)=* = q(b)$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ ve $a, b \in M$ mevcuttur. $q : (B, R) \rightarrow (B/M, R_1)$ bölüm fonksiyonu olduğundan 3.1.10 dan xRa ve aRx dır. Kabulden $x \in M$ ve dolayısıyla, $y=q(x)=*$ olur. O halde, Teorem 4.2.8 den $\{*\}$ B/M de kapalıdır.

Teorem 4.2.15. $f : (A, S) \rightarrow (B, R)$ $\mathbf{RRel}$ de bir morfizm olsun.

(1) Eğer $D \subset B$ (kuvvetli) kapalı ise $f^{-1}(D)$ de (kuvvetli) kapalıdır.

(2) (B, R) yansımali uzay olsun. Eğer $N \subset B$ ve $M \subset N$ (kuvvetli) kapalı ise $M \subset B$ (kuvvetli) kapalıdır.

İspat. (1) Kabul edelim ki $D \subset B$ kapalı ve her $x \in A$ için xSa ve bSx olacak şekilde en az bir $a, b \in f^{-1}(D)$ olsun. Teorem 4.2.9 den $x \in f^{-1}(D)$ olduğunu gösterelim. $f(x) \in B$, $f(a), f(b) \in D$, $f(x)Rf(a)$ ve $f(b)Rf(x)$ dir. $D \subset B$ kapalı olduğundan Teorem 4.2.9 den $f(x) \in D$ ve dolayısıyla, $x \in f^{-1}(D)$ dir. Kuvvetli kapalılık durumu benzer şekilde yapılır.

(2) Kabul edelim ki $N \subset B$ ve $M \subset N$ kuvvetli kapalı, her $x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ mevcut olsun. Teorem 4.2.9 den $x \in M$ olduğunu gösterelim. $N \subset B$ kuvvetli kapalı ve $M \subset N$ olduğundan Teorem 4.2.9 den $x \in N$ olur. $M \subset N$ kuvvetli kapalı olduğundan $x \in M$.

Kapalılık durumu benzer şekilde yapılır.

4.3 Kapanış Operatörleri

Bu bölümde, **SUConv** ve **RRel** kategorilerinde kuvvetli kapalılık ve kapalılık kavramlarının Dikranjan ve Giuli [35] anlamında kapanış operatörleri oluşturduklarını ve bunların bazı özellikleri araştırılmıştır. İlave olarak, bu kapanış operatörleri kullanarak, hem T_0 ve T_1 yarı-düzgün yakınsak uzayları hem de T_0 , T_1 ve T_2 yansımali uzayları karakterize edilmiştir. Son olarak, **SUConv** ve **RRel** kategorilerinde kuvvetli kapalılık, kapalılık (bizim anlamda) ve klasik anlamda kapalılık kavramları arasında ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 4.3.1. X bir cümle olmak üzere, $C : P(X) \rightarrow P(X)$ operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa C ye kapanış operatörü ve (X, C) ye kapanış uzayı denir. M ve N , X in alt cümleleri olmak üzere,

$$1. N \subset M \text{ ise } CN \subset CM$$

$$2. M \subset CM$$

(X, cl) ve (Y, cl') kapanış uzayları olmak üzere eğer X in her A alt kümesi için $f(cl(A)) \subset cl'(f(A))$ ise $f : (X, cl) \rightarrow (Y, cl')$ fonksiyonuna süreklidir denir [35,37].

Eğer $C(M) = M$ ise M ye C -kapalı ve $C(M) = A$ ise M ye C -yoğundur denir [35,37]. Eğer $C(C(M)) = CM$ ise C ye idempotent ve **E** kategorisindeki her obje C -yoğun ise C ye zayıfsal kalıtsal denir [35,37].

Eğer her $X \in \mathbf{E}$ ve $M \subset X$ için $\delta(M) = M$ ise δ ya diskre kapanış operatörü ve $\partial(M) = X$ ise ∂ ya indiskre kapanış operatörü denir [35,37].

E kategorisinin kapanış operatörlerin kümesi δ en büyük ve ∂ en küçük eleman olan tam bir latistir. C ve D kapanış operatörleri olmak üzere her $X \in \mathbf{E}$ ve $M \subset X$ için $(C \wedge D)(M) = C(M) \cap D(M)$ ve $(C \vee D)(M) = C(M) \cup D(M)$ şeklinde tanımlanır. C kapanış operatörü olsun. C nin üstündeki en küçük idempotent kapanış operatörüne C nin hull u denir ve $\hat{C}$ şeklinde gösterilir [35,37]. Her $X \in \mathbf{E}$ ve $M, N \subset X$ için $C(M \vee N) = C(M) \cup C(N) = C(M) \vee C(N)$ ise C ye toplamsal ve her $X \in \mathbf{E}$ ve $M, N \subset X$ ve $M \subset N$ için $C(M_N) = N \wedge C(M)$ ise C ye kalıtsal kapanış operatörü denir, burada $C(M_N)$ M nin N deki kapanışdır [35,37].

C , **E** kategorisinde herhangi bir kapanış operatörü olsun.

$\mathbf{E}_{0C} = \{ X \in \mathbf{E} : x \in C(\{y\}) \text{ ve } y \in C(\{x\}) \text{ ise } x = y \}$, $\mathbf{E}_{1C} = \{ X \in \mathbf{E} : \text{her } x \in X \text{ için } C(\{x\}) = \{x\} \}$ ve $\mathbf{E}_{2C} = \{ X \in \mathbf{E} : C(\Delta) = \Delta \text{ diyagonal} \}$ olsun.

Eğer $\mathbf{E} = \mathbf{Top}$ ve $C = K$ klasik Kurotawski kapanış operatörü ise $\mathbf{E}_{0C} = T_0$ uzayların sınıfını, $\mathbf{E}_{1C} = T_1$ uzayların sınıfını ve $\mathbf{E}_{2C} = T_2$ uzayların sınıfını verir.

Tanım 4.3.2. $(B, \mathfrak{S})$ yarı-düzgün yakınsak uzay, $\emptyset \neq M \subset B$ olsun. M in (kuvvetli) kapanış M yi içeren bütün (kuvvetli) kapalı B alt kümelerin kesişimidir ve $cl(M)(scl(M))$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.3. $\mathbf{SUConv}$ de hem scl hem de cl kapanış operatörleri idempotent, zayıf kalıtsal, çarpımsal ve kalıtsal özellikleri sağlar.

İspat. Tanım 4.3.1, Yardımcı Teorem 4.2.11, Yardımcı Teorem 4.2.12 ve [18, Exercise 2.D, Theorems 2.3 and 2.4, Propositions 2.5 and 3.6] den ispat elde edilir.

Teorem 4.3.4. $\mathcal{E} = \mathbf{SUConv}$ olsun. $\mathcal{E}_{1scl}$ alt kategorisi $\mathcal{E}$ -de bölümsel yansımalı(quotient reflective) dır.

İspat. $\mathcal{E}_{1scl}$ alt kategorisi *dolgun* (full), İsomorfizm-kapalı (isomorphism-closed), bu kategorideki her uzayın alt uzayı da bu kategoriye ait, bu kategorideki bir uzaydan daha geniş yapıya sahip uzay bu kategoriye aittir. Bu kategorideki keyfi uzayların çarpımı yine bu kategoriye ait olduğunu gösterelim. $(B_i, \mathfrak{S}_i)$ ve $B = \prod_{i \in I} B_i$, $(B_i, \mathfrak{S}_i) \in \mathcal{E}_{1scl}$ olsun. $(B, \mathfrak{S}) \in \mathcal{E}_{1scl}$ olduğunu göstermemiz gerekir, burada $\mathfrak{S}$ B üzerinde çarpımsal yarı-düzgün yakınsak yapıdır. $[x] \times [y] \in \mathfrak{S}$ veya $([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \in \mathfrak{S}$ olacak şekilde $\forall x \neq y \in B$ olsun. Buradan da $x_m \neq y_m \in B$ olacak şekilde en az bir $m \in I$ vardır ve $(\pi_m \times \pi_m)([x] \times [y]) = [x_m] \times [y_m] \in \mathfrak{S}_m$ veya $(\pi_m \times \pi_m)([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) = ([x_m] \times [x_m]) \cap ([y_m] \times [y_m]) \in \mathfrak{S}_m$ olup bir çelişki elde edilir. O halde, herhangi $\forall x \neq y \in B$ için $[x] \times [y] \in \mathfrak{S}$ veya $([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \in \mathfrak{S}$ dir.

Not 4.3.5.

(1) (B, q) Kent yakınsak uzay ve $M \subset B$ olsun.

- a. ([17], 2.6(4)) gereği, M kapalıdır (klasik anlamda) ancak ve ancak $x \in B$ için $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç olacak şekilde $(\alpha, x) \in q$ v arsa, $x \in M$ dir.

- b. Eğer M kuvvetli kapalı ise, M hem bizim anlamda hem de klasik anlamda kapalıdır.
- c. Eğer M klasik anlamda kapalı ise M bizim anlamda kapalıdır.
- d. Eğer $(B, q) T_1$ ise [18], Teorem 2.5 (2) gereği, B nın bütün alt kümeleri bizim anlamda kapalıdır ve M kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak M klasik anlamda kapalıdır.

(2) Herhangi set tabanlı bir topolojik kategori $\mathcal{E}$ için, genel olarak cl ve scl kapanış operatörü [19] deki anlamında kapanış operatörü olup olmadığı bilinmiyor.

Tanım 4.3.8. (B, R) yansımali uzay ve $M \subset B$ olsun. $\uparrow_B(M) = \{x \in B : \text{en az bir } a \in M \text{ vardır öyleki } aRx\}$ kümesine M nin *yukarı-kapanışı* (*up-closure*) ve $\downarrow_B(M) = \{x \in B : \text{en az bir } a \in M \text{ vardır öyleki } xRa\}$ kümesine M nin *aşağı-kapanışı* (*down-closure*) denir [37, p. 56].

Teorem 4.3.9. $cl = \widehat{\uparrow \wedge \downarrow}$ ve $scl = \widehat{\uparrow \vee \downarrow}$ dir.

İspat. Teorem 4.2.14, Tanım 4.3.1 ve Tanım 4.3.8 den ispatı elde edilir.

Teorem 4.3. 10. (B, R) yansımali uzay ve $M \subset B$ olsun.

(i) M nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul M nin hem yukarı-kapalı hem de aşağı-kapalı olmasıdır.

(ii) M nin kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter koşul M nin yukarı-kapalı veya aşağı-kapalı olmasıdır.

İspat. (i) Kabul edelim ki M kuvvetli kapalı ve $x \in B$ için xRa olacak şekilde en az bir $a \in M$ mevcut olsun. Teorem 4.2.14 den $x \in M$ ve dolayısıyla, M aşağı-kapalıdır. Eğer aRx ise Teorem 4.2.14 den $x \in M$ ve dolayısıyla, M yukarı-kapalıdır.

Kabul edelim ki M hem yukarı-kapalı hem de aşağı-kapalı olsun. Her $x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde en az bir $a \in M$ olsun. Eğer aRx ise M yukarı-kapalı olduğundan $x \in M$ olur. Eğer xRa ise M aşağı-kapalı olduğundan $x \in M$ olur. Teorem 4.2.14 den M kuvvetli kapalıdır.

(ii) nin ispatı (i) kine benzer.

Teorem 4.3.11. (B, R) yansımali uzay olsun.

(1) $C = \uparrow, \downarrow$ veya cl olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0c}$ olması için gerek ve yeter koşul R anti-simetriktir.

(2) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0scl}$ olması için gerek ve yeter koşul R diskredir.

(3) $C = \uparrow, \downarrow, scl$ veya cl olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{1c}$ olması için gerek ve yeter koşul (B, R) is a diskre uzaydır.

(4) $C = \uparrow, \downarrow, scl$ veya cl olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2c}$ olması için gerek ve yeter koşul (B, R) is a diskre uzaydır.

İspat. (1) $C = \uparrow$ ve $C = \downarrow$ için ispat açıktır. $C = cl$ olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0cl}$, $x, y \in B$ için xRy ve yRx olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0cl}$ olduğundan $x = y$ dir, yani, R anti- simetriktir. Eğer R an anti-simetrik, $x \in cl(\{y\})$ ve $y \in cl(\{x\})$ olsun. xRy , yRx ve R anti-simetrik olduğundan $x = y$ olur. O halde, $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0cl}$ olur.

(2) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0scl}$ ve $x, y \in B$ için xRy olsun. $x \in scl(\{y\}) = \{y\}$ olduğundan $x = y$ olur. O halde, R diskredir. Eğer R is diskre ise her $x \in B$ için, $\{x\}$ kuvvetli kapalıdır ve dolayısıyla, $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0scl}$ dir.

(3) İspat (1) ve (2) nin ispatına benzerdir.

(4) $C = \uparrow$ ve $C = \downarrow$ için ispat açıktır. $C = scl$ olsun. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$, ve $x, y \in B$ için xRy olsun. R^2 , B^2 üzerinde çarpımsal yapı olmak üzere $(x, y)R^2(y, y)$ olur ve dolayısıyla, $(x, y) \in scl(\Delta) = \Delta$ dir. Buradan, $x = y$ olur, yani, (B, R) diskredir. Eğer (B, R) diskre ise Teorem 4.2...3.6 den $\Delta \subset B^2$ kuvvetli kapalıdır ve dolayısıyla, $(B, RL) \in \mathbf{RRel}_{2scl}$ olur.

$(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$ ve $x, y \in B$ için xRy olsun. $(x, y)R^2(y, y)$ ve $(x, x)R^2(x, y)$ olur. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$, olduğundan Tanım 4.3.1 den $(x, y) \in \Delta$ olur. Dolayısıyla, (B, R) diskredir. Eğer (B, R) diskre ise Teorem 4.2.14 den $\Delta \subset B^2$ kapalıdır ve dolayısıyla, $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{2cl}$ olur.

Theorem 4.3.12. $C = \uparrow, \downarrow, scl$ veya cl . $\mathbf{RRel}_{jc}$, $j = 0, 1, 2$ altkategorileri $\mathbf{RRel}$ kategorisinde bölümsel yansımali (quotient-reflective) dırlar.

İspat. Bu altkategorileri *dolgun* (full), İsomorfizm-kapalı(isomorphism-closed), bu kategorideki her uzayın alt uzayı da bu kategoriye ait, bu kategorideki keyfi uzayların çarpımı yine bu kategoriye ait ve bu kategorideki bir uzaydan daha geniş yapıya sahip uzay bu kategoriye ait olduğundan $\mathbf{RRel}_{jc}$, $j = 0, 1, 2$ altkategorileri bölümsel-yansımali dırlar.

Theorem 4.3.13. $C = \uparrow, \downarrow, scl$ veya cl olmak üzere $\mathbf{RRel}_j$, $j = 0, 1, 2$ altkategorileri ve altkategorisi $\mathbf{RRel}_{0scl}$ izomorfik kategorilerdir.

İspat. İspatı Teorem 4.3.11 den görülür.

Theorem 4.3.14. (B, R) yansımali uzay ve $p \in B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) R , p de anti-simetriktir.
- (ii) $\{p\}$ kapalıdır.
- (iii) Eğer $x \in B$ için xRp ve pRx ise $x = p$ dir.

İspat. Teorem 4.1.10, Teorem 4.2.13 ve Tanım 4.1.9 den elde edilir.

Theorem 4.3.15. (B, R) yansımali uzay ve $p \in B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) (B, R) , p de T_1 dir.
- (ii) $\{p\}$ kuvvetli kapalıdır.
- (iii) Eğer $x \in B$ için xRp veya pRx ise $x = p$ dir.

İspat. Teorem 4.1.10, Teorem 4.2.13 ve Tanım 4.1.9 dan elde edilir.

Theorem 4.3.16. $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{0scl}$ veya $(B, R) \in \mathbf{RRel}_j$, $j = 1, 2$, ve $M \subset B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) M kapalıdır
- (ii) M kuvvetli kapalıdır.
- (iii) M yukarı-kapalıdır.
- (iv) M aşağı-kapalıdır.

İspat. Teorem 4.2.14 ve Teorem 4.3.10 den elde edilir.

Sıralama (order) ve topoloji arasında çok derin bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi veren aşağıdaki Teorem [37] de ispat edilmiştir.

Theorem 4.3.17 ([37, p. 58-59])

(1) $\uparrow$ ve $\downarrow$ kalıtsal, çarpımsal, yerleşik(grounded), toplamsal fakat idempotent olmayan kapanış operatörleridir.

(2) (B, R) yansımali uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) $\uparrow_B$ idempotent kapanış operatörüdür.
- (ii) R geçişme(transitive) özelliğine sahiptir.
- (iii) $(B, \downarrow_B)$ topolojik uzaydır.
- (iv) $\uparrow_B$ idempotent kapanış operatörüdür.
- (v) $(B, \uparrow_B)$ topolojik uzaydır.

4.4 Genel Ayırma Aksiyomları

Bu bölümde, hem T_0 ve T_1 yarı-düzgün yakınsak uzaylar hem de T_0 , T_1 ve T_2 genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzaylar karakterize edilmiştir.

Tanım 4.4.1. X boştan farklı bir cümle ve $X^2 = X \times X$ olsun. X^2 nin iki ayrı kopyasının diagonal boyunca çakıştırılması $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ ile gösterilir. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de bir (x, y) noktası birinci bileşende ise $(x, y)_1$ ile, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. Açık olarak $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x = y$ dir.

Temel eksen dönüşümü (principle axis map) $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$;

$$A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Skewed eksen dönüşümü (skewed axis map) $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$;

$$S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Katlama dönüşümü (The folding map), $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$, $i = 1, 2$ için

$$\nabla((x, y)_i) = (x, y)$$

Alt küme fonksiyonları (inclusion maps), $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$;

$$(x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1 \text{ ve } (x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$$

olarak tanımlanır [8].

Teorem 4.4. 2. (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $(X, \tau) T_0$ dır.
- ii. τ^* , X^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau^*)$ ve $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [8,13].
- iii. τ_* , $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi olmak üzere $id : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [8,13].
- iv. (X, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez [69].
- v. Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç kaynağı mono-kaynaktır [51].
- vi. İki elemanlı bir indiskre topolojik uzaydan (X, τ) topolojik uzayına tanımlı her morfizm sabittir [69].
- vii. Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç morfizmi bir monomorfizmdir [28].
- viii. Tanım cümlesi (X, τ) topolojik uzayı olan her başlangıç epimorfizmi bir homeomorfizmdir [46].

Topolojideki klasik T_0 aksiyomunun birçok genelleştirilmesi vardır. İlk olarak 1971’de Brümmer [28] (vii) yi kategoriye genelleştirdi. 1973’te Marny [69] (iv) ve (vi) yı, 1974’te Hoffman [51] (v) i ve 1977’de Harvey [46] (viii) i topolojik kategoriye genişletti. 1991’de Weck-Schwarz (iv), (v), (vi), (vii) ve (viii) in genelleştirmeleri arasındaki ilişkiyi inceledi. 1991’de Baran [8] (ii) ve (iii) ü topolojik kategoriye genişletti ve 1995’te [11] tüm bu farklı genelleştirmelerin ((i)-(viii)) karşılaştırmasını inceledi.

Teorem 4.4. 3. (X, τ) topolojik uzayın T_1 olması için gerek ve yeter koşul τ^* , X^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau^*)$ ve $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır [13].

Baran [8,12] çalışmalarında (ii)-(iii) teki T_0 objelerini kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımladı. 1998’de Baran herhangi bir topolojik

kategorideki T_3 , T_4 , normal, regüler ve tam regüler objelerin ve kuvvetli kapalı alt cümlelerin tanımlanmasında T_1 objeleri kullandı [8, 12, 15,16].

Herhangi bir topolojik kategoride $\overline{T}_0$, T'_0 , T_0 ve T_1 tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.4.4. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X , E nin bir objesi ve $U(X) = B$ olsun.

- 1) Eğer $\{ A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2 \}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X objesine $\overline{T}_0$ objesi denir, burada D , U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [8].
- 2) $(B^2 \vee_{\Delta} B^2)'$, $\{ i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2 \}$ U –kavşağının bitiş kaldırması ve $D(B^2)$ de B^2 üzerindeki diskre yapı olsun. Eğer $\{ id : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(B^2 \vee_{\Delta} B^2)' = B^2 \vee_{\Delta} B^2 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2 \}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X objesine T'_0 objesi denir [8].
- 3) Eğer X objesi en az iki elemanlı indiskre alt objeyi ihtiva etmiyorsa X objesine T_0 objesi denir [69].
- 4) Eğer $\{ S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2 \}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X objesine T_1 objesi denir [8].

Uyarı 4.4.5. (1) Topolojik uzaylar kategorisinde $\overline{T}_0$, T'_0 ve T_0 birbirine denktir ve klasik T_0 ayrılma aksiyomuna indirgenir, T_1 de klasik T_1 ayrılma aksiyomuna indirgenir [11,12,87]. Herhangi bir topolojik kategori için $\overline{T}_0$, T'_0 yü gerektirir fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir. Genelde T_0 ile $\overline{T}_0$ veya T'_0 arasında bir ilişki yoktur [11].

(2) $U : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $X \in ob(\mathcal{E})$, $p \in U(X)$ ve $p : 1 \rightarrow U(X)$ U - kaynağın $h : \overline{1} \rightarrow X$ başlangıç kaldırması retreksiyon olsun. $i = 0,1$ olmak üzere, eğer X T_i ise X p noktasında T_i dir ama tersi genelde doğru değildir [10].

Teorem 4.4.6. $\mathcal{E} = \text{SUConv}$ ve $(B, \mathfrak{T}) \in \mathcal{E}$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

- i. $(B, \mathfrak{T}) \in \mathcal{E}_{1scl}$
- ii. $(B, \mathfrak{T})$ T_1 dir.

iii. $(B, \mathfrak{S}) \overline{T_0}$ dır.

iv. B nin herhangi iki farklı x ve y noktası için $[x] \times [y] \notin \mathfrak{S}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \notin \mathfrak{S}$

İspat. [22] deki Teorem 3.8, Teorem 4.4, Teorem 4.6 ve Not 4.7 (1) açıktır.

Teorem 4.4.7. (X, d) genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzayın $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter koşul d diskredir.

İspat $(X, d) \overline{T_0}$ ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $x=y$ ise d genişletilmiş pseudo-yarı metrik olduğundan $d(x, y) = d(x, x) = 0$ olur. Eğer $x \neq y$ ise $(X, d) \overline{T_0}$ olduğundan 3.1. 13 ve Tanım 4.4.4 den $\infty = \sup \{ d(\pi_i A(x, y)_1, \pi_i A(x, y)_2), d_{\text{dis}}(\nabla(x, y)_1, \nabla(x, y)_2), i = 1, 2, 3 \} = \sup \{ d(x, y) = d(y, x), d(x, x) = 0 = d_{\text{dis}}((x, y), (x, y)) \}$ ve dolayısıyla, $d(x, y) = \infty$ dur, burada, $\pi_i : X^3 \rightarrow X, i = 1, 2, 3$, izdüşüm fonksiyonları ve d_{dis} , X^2 üzerinde diskre genişletilmiş pseudo-yarı metriktir ve 3.1. 13 den d diskredir.

d diskre olsun. (X, d) nin $\overline{T_0}$ olduğunu gösterelim. $\bar{d}, X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpım üzerinde temel eksen dönüşümü $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^3, d^3) = X^3$ (d^3, X^3 üzerinde çarpım genişletilmiş pseudo-yarı metrik) ile katlama dönüşümü $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^2, d_{\text{dis}}) = X^2$, (d_{dis}, X^2 üzerinde diskre genişletilmiş pseudo -yarı metrik) fonksiyonları tarafından elde edilen genişletilmiş pseudo- yarı metrik olsun. $\bar{d}$ nin diskre metrik olduğunu gösterelim. u ve $v \in X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\nabla(u) \neq \nabla(v)$ ise $d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)) = \infty$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = \sup \{ (\pi_i A(u), \pi_i A(v)), d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)), i = 1, 2, 3 \} = \infty$ dur.

Kabul edelim ki $\nabla(u) = (x, y) = \nabla(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq y$, $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ dir. $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ olsun.

$\bar{d}(u, v) = \sup \{ (\pi_i A(u), \pi_i A(v)), d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)), i = 1, 2, 3 \} = \sup \{ d(x, y), d(y, x), d(x, x) = 0 = d_{\text{dis}}((x, y), (x, y)) \} = d(x, y) = d(y, x)$ olur. $x \neq y$ ve d diskre olduğundan $\bar{d}(u, v) = \infty$ olur. d simetri olduğundan $\bar{d}$ simetri olur ve $\bar{d}(v, u) = \infty$ olur. Tanım 4.4.4 ve 3.1.13 den $(X, d) \overline{T_0}$ dir.

Teorem 4.4.8. Tüm genişletilmiş pseudo -yarı metrik uzaylar T_0' dür.

İspat. $d_1, X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpım üzerinde $i_1, i_2 : (X^2, d^2) \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen bitiş genişletilmiş pseudo-yarı metrik ve $\bar{d}$, $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpım üzerinde $id : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, d_1)$ birim fonksiyonu ile $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^2, d_{dis}) = X^2$ katlama fonksiyonu tarafından elde edilen genişletilmiş pseudo-yarı metrik olsun. $\bar{d}$ nin diskre olduğunu gösterelim. u ve v , $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer u ve v noktaları $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpımının aynı bileşeninde ise $d_{dis}(\nabla(u), \nabla(v)) = \infty$ çünkü $\nabla(u) \neq \nabla(v)$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d_{dis}(\nabla(u), \nabla(v)) = \infty, d_1(id(u), id(v)) = d_1(u, v) \} = \infty$ olur. Kabul edelim ki u ve v noktaları $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpımının farklı bileşeninde ve $\nabla(u) = (x, y) = \nabla(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq y$, $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ dir. $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olsun. 3.1. 13 den $d_1(u, v) = \infty$ ve dolayısıyla $\bar{d}(u, v) = \sup \{ d_{dis}(\nabla(u), \nabla(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u, v) = \infty \} = \infty$ olur. O halde, $\bar{d}$ diskredir, yani, 3.1. 13 ve Tanım 4. 4.4 den $(X, d) T'_0$ dır.

Teorem 4.4.9. (X, d) genişletilmiş pseudo -yarı metrik uzayın T_0 olması için gerek ve yeter koşul (X, d) genişletilmiş yarı metrik uzayıdır.

İspat. (X, d) genişletilmiş yarı metrik uzayı T_0 ve her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $d(x, y) = 0$ olsun. $A = \{x, y\}$ ve d_A , A üzerinde alt küme fonksiyonu $i : A \subset (X, d)$ tarafından üretilen başlangıç genişletilmiş pseudo- yarı metrik olsun. $d_A(x, y) = d(x, y) = 0 = d(y, x) = d_A(y, x)$ ve $d_A(x, x) = d(x, x) = 0 = d(y, y) = d_A(y, y)$ olduğundan 3.1.13 ten (A, d_A) indiskre genişletilmiş pseudo- yarı metrik uzay olur. Bu da (X, d) nin T_0 genişletilmiş pseudo- yarı metrik uzay olması ile çelişir. O halde, $x = y$ olmalıdır ve dolayısıyla, (X, d) genişletilmiş yarı metrik uzayıdır.

(X, d) genişletilmiş yarı metrik uzay ve A , X in en az iki elemanlı alt kümesi olsun. $x, y \in A$, $x \neq y$ olsun. Eğer d_A , A üzerinde alt küme fonksiyonu $i : A \subset (X, d)$ tarafından üretilen indiskre genişletilmiş pseudo- yarı metrik ise $0 = d_A(x, y) = d(x, y)$ ve $0 = d_A(y, x) = d(y, x)$ olur. (X, d) genişletilmiş yarı metrik uzay olduğundan $x = y$ olur. Bu da çelişkidir. O halde, (X, d) genişletilmiş yarı metrik uzay en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzaya sahip olamaz ve Tanım 4.4.4 ten $(X, d) T_0$ dır.

Teorem 4.4.10. (X, d) genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzayın T_1 olması için gerek ve yeter koşul d nin diskre olmasıdır.

İspat (X, d) T_1 ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $x=y$ ise d genişletilmiş pseudo-yarı metrik olduğundan $d(x, y) = d(x, x) = 0$ olur. Eğer $x \neq y$ ise (X, d) T_1 olduğundan 3.1. 13 ve Tanım 4.4.4 den $\infty = \sup \{ d(\pi_i S(x, y)_1, \pi_i S(x, y)_2), d_{\text{dis}}(\nabla(x, y)_1, \nabla(x, y)_2), i = 1, 2, 3 \} = \sup \{ d(y, x), d(y, y) = d(x, x) = 0 = d_{\text{dis}}((x, y), (x, y)) \}$ ve dolayısıyla, $d(y, x) = \infty$ dur, burada, $\pi_i : X^3 \rightarrow X$, $i = 1, 2, 3$, izdüşüm fonksiyonları ve d_{dis} , X^2 üzerinde genişletilmiş pseudo-yarı diskre metriktir ve 3.1. 13 den d diskredir.

d diskre olsun. (X, d) nin T_1 olduğunu gösterelim. $\bar{d}$, $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpım üzerinde skewed eksen dönüşümü $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^3, d^3) = X^3$ (d^3 , X^3 üzerinde çarpım genişletilmiş pseudo-yarı metrik) ile katlama dönüşümü $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^2, d_{\text{dis}}) = X^2$, (d_{dis} , X^2 üzerinde diskre genişletilmiş pseudo -yarı metrik) fonksiyonları tarafından elde edilen genişletilmiş pseudo- yarı metrik olsun. $\bar{d}$ nin diskre metrik olduğunu gösterelim. u ve $v \in X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\nabla(u) \neq \nabla(v)$ ise $d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)) = \infty$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = \sup \{ (\pi_i S(u), \pi_i S(v)), d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)), i = 1, 2, 3 \} = \infty$ dur.

Kabul edelim ki $\nabla(u) = \nabla(v)$ olsun. $u \neq v$ olduğundan $x \neq y$, $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ dir. $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ olsun.

$\bar{d}(u, v) = \sup \{ (\pi_i S(u), \pi_i S(v)), d_{\text{dis}}(\nabla(u), \nabla(v)), i = 1, 2, 3 \} = \sup \{ d(y, x), d(y, y) = d(x, x) = 0 = d_{\text{dis}}((x, y), (x, y)) \} = d(y, x)$ olur. $x \neq y$ ve d diskre olduğundan $\bar{d}(u, v) = \infty$ olur. d simetri olduğundan $\bar{d}$ simetri olur ve $\bar{d}(v, u) = \infty$ olur. Tanım 4.4.4 ve 3.1. 13 den (X, d) T_1 dir.

Uyarı 4.4.11. (X, d) genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzay olsun. Teorem 4.4.7-10 den $T_1 \Leftrightarrow \bar{T}_0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow T'_0$ fakat her gerektirmenin karşıtı genellikle doğru değildir.

4.5 Karşılaştırma ve İlişkiler

Uyarı 4.5.1.

(1) (X, d) genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzay olsun. Teorem 4.4.6-9 dan $T_1 \Leftrightarrow \bar{T}_0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow T'_0$ fakat her gerektirmenin karşıtı genellikle doğru değildir. Topolojik uzaylar için $\bar{T}_0$, T_0 ve T'_0 kavramları birbirine denktir ve klasik T_0 ayrılma aksiyomuna indirgenir [11, 87]. Herhangi bir topolojik kategori için $\bar{T}_0$, T'_0 yü gerektirir fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir. Genelde T_0 ile $\bar{T}_0$ veya T'_0 arasında bir ilişki yoktur [11].

(2) $\mathcal{E} = \mathbf{SUConv}$ ve $(B, \mathfrak{I}) \in \mathcal{E}$ olsun.

(a) Teorem 4.2.8 ve [22] deki Teorem 3.8, Teorem 4.4, Teorem 4.6 ve Not 4.7 (1) den aşağıdakiler denktir.

- i. $(B, \mathfrak{I}) \in \mathcal{E}_{1scl}$
- ii. $(B, \mathfrak{I}) T_1$ dir.
- iii. $(B, \mathfrak{I}) \bar{T}_0$ dir.
- iv. B nin herhangi iki farklı x ve y noktası için $[x] \times [y] \notin \mathfrak{I}$ ve $([x] \times [x]) \cap ([y] \times [y]) \notin \mathfrak{I}$.
- v. Her $p \in B$ için $(B, \mathfrak{I}) p$ de T_1 dir.
- vi. Her $p \in B$ için $\{p\}$ kuvvetli kapalıdır.

(b) $M \subset B$ olsun. Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.7 ve Teorem 4.2.9 gereği, eğer M kapalı ise M hem kuvvetli kapalı hem de klasik anlamda kapalıdır.

(3) (B, q) Kent yakınsak uzay ve $M \subset B$ olsun.

- i. ([17], 2.6(4)) gereği, M kapalıdır (klasik anlamda) ancak ve ancak $x \in B$ için $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç olacak şekilde $(\alpha, x) \in q$ v arsa, $x \in M$ dir.
- ii. Eğer M kuvvetli kapalı ise, M hem bizim anlamda hem de klasik anlamda kapalıdır.
- iii. Eğer M klasik anlamda kapalı ise M bizim anlamda kapalıdır.
- iv. Eğer $(B, q) T_1$ ise [18], Teorem 2.5 (2) gereği, B nin bütün alt kümeleri bizim anlamda kapalıdır ve M kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak M klasik anlamda kapalıdır.

(4) $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{\text{scl}}$ veya $(B, R) \in \mathbf{RRel}_{\text{jc}}$, $j = 1, 2$, ve $M \subset B$ olsun. Teorem 4.2.14 ve Teorem 4.3.10 den aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) M kapalıdır
- (ii) M kuvvetli kapalıdır.
- (iii) M yukarı-kapalıdır.
- (iv) M aşağı-kapalıdır.

(5) (B, R) yansımali uzay ve $p \in B$ olsun. Teorem 4.1.10, Teorem 4.2.13, ve Tanım 4.1.9 dan aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

- (i) $(B, \mathfrak{I}) \bar{T}_0$ dir.
- (ii) Her $p \in B$ için $(B, \mathfrak{I})$ p de $\bar{T}_0$ dir.
- (iii) R anti-simetriktir.
- (iv) Her $p \in B$ için $\{p\}$ kapalıdır.

(6) (B, R) yansımali uzay ve $p \in B$ olsun. Teorem 4.1.10, Teorem 4.2.13, ve Tanım 4.1.9 dan aşağıdakiler denktir.

- (i) $(B, R) T_1$ dir.
- (ii) Her $p \in B$ için (B, R) , p de T_1 dir.
- (iii) R diskredir.
- (iv) Her $p \in B$ için $\{p\}$ kuvvetli kapalıdır.

(6) $\mathcal{E}$, **Set** üzerinde herhangi bir topolojik kategori, $X \in \text{ob}(\mathcal{E})$ ve $p \in U(X)$, X in retreksiyonu (retraction) olsun. O zaman $i = 0, 1$ olmak üzere, eğer $X T_i$ ise X p noktasında T_i dir ama tersi genelde doğru değildir [10].

(7) Baran [17, 18, 20, 21] de kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde karakterize etmiş ve bu kavramların oluşturduğu cl ve scl operatörleri Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü olduğunu göstermiştir. Herhangi set tabanlı bir topolojik kategori $\mathcal{E}$ için, genel olarak cl ve scl kapanış operatörü [35] deki anlamında kapanış operatörü olup olmadığı açık bir problem olarak duruyor.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1 Sonuç

Bu proje çalışmasında, topolojik kategoride 1991 de Baran tarafından tanımlanan **kapalılık** ve **kuvvetli kapalılık** kavramlarını hem yarı-düzgün yakınsak uzaylar hem de yansımali (reflexive) uzaylar kategorisinde karakterize edilmiş, bunlar ile klasik kapalılık kavramları arasında ilişki incelenmiş, bu kavramların 1987 de Dikranjan ve Giuli anlamında kapanış operatörü oluşturduğunu ve bu kapanış operatörlerin zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent gibi bazı özellikleri sağladığını göstermiştir. Ayrıca, T_0 ve T_1 yarı-düzgün yakınsak uzayları ve T_0, T_1 ve Hausdorff yansımali (reflexive) uzayların her biri karakterize edilmiştir. Son olarak, lokal T_0 ve T_1 ve genel T_0, T_1 ve Hausdorff genişletilmiş pseudo-quasi-semi metrik uzaylar karakterize edilmiştir. Proje kapsamında yapılan akademik çalışmalar aşağıda özetlenmiştir:

1. Baran, M., Kula, S., Baran, T. M., and Qasim, M., Closure Operators in Semi uniform Convergence Spaces , Filomat 30:1 (2016), 131–140, DOI 10.2298/FIL1601131B.
2. Baran, M. , and Baran, T. M., Closure Operators in Reflexive Spaces , *International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16) March 19-20, 2016, Kilis*, 140–149.

(Ayrıca, Kilis 7 Aralık Üniversitesi tarafından 19-20 Mart 2016 tarihleri arasında düzenlenen, uluslararası katılımlı “**International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16)**” konferansında sunuldu).

3. Baran, M., T_0 Reflexive Spaces, Konya Selçuk Üniversitesi tarafından 1-3 Eylül 2016 tarihleri arasında düzenlenen uluslararası katılımlı “International Conference on Advanced Technology & Sciences (ICAT'16)” konferansında sunuldu.
4. Baran, T. M., T_0 Pseudo-Quasi-Semi Metric Spaces, Konya Selçuk Üniversitesi tarafından 1-3 Eylül 2016 tarihleri arasında düzenlenen uluslararası katılımlı “International Conference on Advanced Technology & Sciences (ICAT'16)” konferansında sunuldu.

5.2 Öneriler

Genelde, herhangi bir topolojik kategori için kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları birbirinden bağımsız kavramlardır. Hatta topolojik kategorinin nesnesi T_1 olsa bile bu kavramlar birbirinden bağımsızdır [9]. Baran [17-18, 20-21,23] de kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde karakterize etmiş ve bu kavramların Dikranjan ve Giuli anlamında [35] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir.

Bu çalışmanın devamı niteliğinde olabilecek şekilde ve bu çalışmanın Temel Tanımlar bölümünde belirtildiği gibi matematik, biyoloji, deneysel psikoloji, bilgisayar, quantum mekaniği gibi bir çok dallarda uygulama alanı bulunan **SUConv**, **RRel** ve **pqsMet** kategorilerinde aşağıdaki sorular incelenebilir:

- kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını pseudo-quasi-yarı-metrik uzaylar kategorisinde karakterize edilebilir mi? Bunlarla klasik kapalılık arasındaki ilişkiler var mıdır? Bu kavramlar kapanış operatörünü oluşturur mu? Bu kapanış operatörlerin zayıf kalıtsal, kalıtsal, çarpımsal ve idempotent gibi bazı özellikleri sağlayıp sağlamadığını incelenebilir.
- Pre-Hausdorff, Hausdorff, normal ve regüler yarı-düzgün yakınsak uzaylar, yansımali uzaylar ve pseudo-quasi-yarı-metrik uzaylar karakterize edilebilir mi?
- Kompakt ve bağlantılı yarı-düzgün yakınsak uzaylar, yansımali uzaylar ve pseudo-quasi-yarı-metrik uzaylar karakterize edilebilir mi?

Bu problemlerle ilgili ortaya çıkacak sonuçlar yeni çalışma alanları oluşmasına yardımcı olur.

KAYNAKLAR

1. Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E. 1990. Abstract and Concrete Categories, New York: Wiley.
2. Adamek, J. and Reiterman, J. ,1990., "Cartesian Closed Hull for Metric Spaces", Comment. Math. Univ. Carolinae, 31 1-6.
3. Aerts, D., 1999., "Foundations of quantum physics: a general realistic and operational approach", Int. J. Theoret. Phys., 38(1), 289-358.
4. Aerts, D., Colebunders, E., Van der Voorde, A. and B. Van Steirteghem, B., 1999., "State property systems and closure spaces: A study of categorical equivalence", Int. J.Theoret. Phys., 38(1), 359-385.
5. Arhangel'skii, A., and Wiegandt, R., 1975., "Connectedness and disconnectedness in topology", Gen. Topology Appl. 5, 9-33.
6. Arski, A., 1929., "Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques", Ann. Soc. Math. Polon. 7 , 270-272.
7. Aumann , G., 1970., "Kontaktrelationen", Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nt. Kl. Sitzungsber, 67-77.
8. Baran, M. 1991., "Separation properties", Indian J. Pure Appl. Math., 23, 333-341.
9. Baran, M. 1993., "The notion of closedness in topological categories", Comment. Math. Univ. Carolinae, 34, 383-395.
10. Baran, M. 1994., "Generalized Local Separation Properties", Indian J. Pure Appl. Math., 25, 615-620.
11. Baran, M. and Altındis, H. 1995. , "T₀-objects objects in topological categories", J. Univ. Kuwait (Sci.) 22, 123-127.
12. Baran, M., Altındis, H. 1996., "T₂-objects in topological categories", Acta Math. Hungar., 71 (1-2), 41-48.
13. Baran, M. 1996., "Separation Properties in Topological Categories", Math. Balkanica, 10, 39-48.
14. Baran, M. 1997., "A notion of compactness in topological categories", Publ. Math. Debrecen, 50 no. 3-4, 221-234.
15. Baran, M. 1998., "T₃ and T₄-objects in topological categories", Indian J. Pure Appl Math., 29, 59-69.
16. Baran, M. 1998., "Completely Regular Objects and Normal Objects in topological categories", Acta Math. Hungar., 80 no. 3, 211-224.

17. Baran, M. 2000., "Closure operators in convergence spaces", *Acta Mathematica Hungarica*, 87, 33-45.
18. Baran, M. 2002., "Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators", *Applied Categorical Structures*, 10, 403-415.
19. Baran, M., Kula, M. 2006., "A note on connectedness", *Publ. Math. Debrecen*, 68/3-4, 489-501.
20. Baran M., Al-Safar J. 2011., "Quotient-Reflective and Bireflective Subcategories of the category of Preordered Sets", *Topology and its Appl.*, 158, 2076-2084.
21. Baran, M., Kula, S., Baran, T. M., and Qasim, M., 2016., "Closure operators in semi-uniform convergence spaces", *Filomat*, 30 , 131-140, DOI 10.2298/ FIL1601131B.
22. Baran, M., Kula, S., and Erciyes, A., 2013., " T_0 and T_1 semiuniform convergence spaces", *Filomat*, 27 , 537-546, DOI 10.2298/ FIL1304537B
23. Baran, M., and Baran, T. M., 2016., "Closure operators in Reflexive Spaces" , *International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16) March 19-20, 2016, Kilis*, 140–149.
24. Behling, A., 1992., *Einbettung uniformer Räume in topologische Universen*, PhD. Thesis, Free University, Berlin.
25. G. Birkhoff, G., 1940., *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence.
26. Bonsangue, M.M. , van Breugel, F. and Rutten, J.J.M.M. , 1998., "Generalized Metric Spaces: Completion, Topology, and Powerdomains via the Yoneda Embedding", *Theoret. Comput. Sci.* 193, 1-51.
27. Bourbaki, N., 1957., *Topologie générale*, Hermann, Paris.
28. Brümmer, G. C. L. 1971. *A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology*, Thesis, Univ. Of Cape Town.
29. Clementino, M. M., Giuli, E. and Tholen , W. 1996., "Topology in a Category : Compactness", *Port. Math.*, 53, 397-433.
30. Clementino, M. M. and Tholen , W. 1997., "Separation versus connectedness", *Topology and its appl.* 75, 143- 181.
31. Cook, C.H. and Fisher, H.R., 1965., "*On Equicontinuity and Continuous Convergence*" , *Math. Ann.*, 159, 94-104.
32. A. Csaszar, A., 1963., *Foundations of General Topology* , Macmillan, New York.
33. Cunningham, J.P., 1978., "Free Trees and Bidirectional Trees as Representations of Psychological Distance", *J. Math. Psychology*, 17 , 165-188.
34. de Bakker, J.W. and de Vink, E.P. , 1996., *Control Flow semantics*, Foundations of Computing Series. The MIT Press, Cambridge Massachusetts.

35. Dikranjan, D., Giuli, E. 1987., "Closure operators I", *Topology Appl.*, 27, 129-143.
36. Dikranjan, D and Giuli, E 1990. , "Compactness, Minimality and Closedness with Respect to a Closure Operator", *Proc. CAT-TOP Prague 1989*, Edited by J. Adamek and S. MacLane, World Scientific Publ.Singapore, 284-295.
37. Dikranjan, D. , and Tholen, W., 1995., *Categorical Structure of Closure Operators: with Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
38. Doitchinov, D.B., 1964., "A *United Teory of Topological Spaces, Proximity Spaces and Uniform Spaces*", *Soviet Math. Dokl.*, 5 , 595-598.
39. Eilenberg, S., Mac Lane, S. 1945., "General Theory of Natural Equivalences", *Transactions of the American Mathematical Society*, 58 (2), 231-294.
40. Ern , M., 1983., Lattice representations for categories of closure operators, *Categorical Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 197-222.
41. Fletscher, P. and Lindgren, W.F. , 1982., *Quasi-Uniform Spaces* , Marcel Dekker, New York.
42. Fréchet , M., 1906., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Palermo* 22, 1-74.
43. Freyd, P., 1964., *Abelian Categories*, Harper and Row, New York.
44. Ganter, B., and Wille, R., 1998., *Formal Concept Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
45. Gierz, G., Hofmann, K.H. , Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M., Scott, D.S., 2003., *Continuous Lattices and Domains*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 93, Cambridge University Pres.
46. Harvey, J. M. 1977., "T0-Separation in Topological Categories", *Quaestiones Math.*, 2, 177-190.
47. Hausdorff, F., 1914., *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, (Reprint: New York, 1965).
48. Herrlich, H. 1974., "Topological Functors", *Gen. Top. Appl.*, 4, 125-142.
49. Herrlich, H., 1974., "Topolgical Structures", In: *Math. Centre Tracts*, 52: 59-122.
50. Herrlich, H., Salicrup, G., and Strecker, G. E. , 1987, "Factorizations, denseness, sepa-ration, and relatively compact objects", *Topology Appl.*, 27, 157-169.
51. Hoffman, R-E. 1974. (E, M)-Universal Topological Functors, *Habilitationsschrift*, Universitat Duseldorf.
52. Husek, M., 1990., Disconnectedness, *Quaestiones Math.*, 13, 449-459.
53. Johnstone, P. T. 1977. *Topos Theory*. New York: Academic Press.
54. Katetov, M. 1965. , "On *Continuity Structures and Spaces of Mappings*", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 6, 257-278.

55. Kennison, J. F., 1965., "Reflexive functors in general topology and elsewhere", Trans. Amer.Math. Soc., 118, 303-315.
56. Kelly, J.C. , 1963., "Bitopological Spaces", Proc. London Math. Soc., 13, 71-89.
57. Kent, D. C. 1969., "Convergence Quotient Maps", Fund. Math., 165, 197-205.
58. Kuratowski, K., 1922., "Sur l'operation A de l'Analysis Situs", Fund. Math. 3 ,182-199.
59. Künzi,H.-P.A. and Kreinovich, V. , 2008., "Static Space-Times Naturally Lead to Quasi-Pseudometrics" , Theoret. Comput. Sci., 405, 64-72.
60. Lambek, J., 1980., "From lambda-calculus to cartesian closed categories", in J.R. Hindley and J.P. Seldin (eds.) to H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic Press, (375-402).
61. Lawvere, F. W. , 1966. "The Category of categories as a Foundation for Mathematics", in Proc. Conf. on Categorical Algebra, S. Eilenberg et al. (eds.), La Jolla, 1965, Springer-Verlag.
62. Lawvere, F.W. , "Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories", Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 43(1973), 135-166.
63. Lowen, R., 1989., "Approach Spaces: a Common Supercategory of TOP and MET", Math. Nachr. 141 , 183-226.
64. Lowen, R., 1997., Approach Spaces: The Missing Link in the Topology-Uniformity-Metric Triad, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press.
65. Lowen, R. and Lee, Y.J., 1999., "Approach Theory in Merotopic, Cauchy and Convergence spaces I", Acta Math. Hungar., 83(3), 189-207.
66. Lowen, R., 2015., R. Index Analysis Approach Theory at Work, Springer-Verlag London.
67. Mac Lane, S., and Moerdijk, I., 1992., Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory, Springer, New York.
68. Manes, E.G. , 1974., "Compact Hausdorff objects", Gen. Topology Appl., 4, 341-360.
69. Marny, T, H. 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien, Dissertation, Freie Univ., Berlin.
70. Moore, E. H., 1909., "On a form of general analysis, with applications to linear differential and integral equations", in: Atti. del IV Congr. Int. Di Mat. II , Rome, 98-114.
71. Nauwelaerts, M., 2000., "Cartesian Closed Hull for (Quasi-) Metric Spaces", Comment. Math. Univ. Carolinae, 41, 559-573.
72. Preuss, G., 1988., Theory of Topological Structures, An Approach to Topological Categories, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.
73. Preuss, G., 1995. , "*Cauchy Spaces and Generalizations*", Math. Japonica, 38: 803-812.
74. Preuss, G., 1995., "*Semiuniform Convergence Spaces*", Math. Japonica, **41** , 465-491.

75. Preuss, G., 2002., *Foundations of topology, An approach to Convenient topology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
76. Riesz, F. 1908., "Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre", pp. 18-24, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Rome, 1908), Vol. II*.
77. S. Salbany, S., 1976., "Reflective subcategories and closure operators", in Proc. First Categorical Topology Symposium, Lecture notes in Math, 540, Springer, Berlin, 548–565.
78. Schwartz, F. 1978. , "Connections Between Convergence and Nearness", Lecture Notes in Math. No.719, Springer-Verlag, 345-354.
79. Scott, D.S., 1972., "Continuous lattices", in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 274, Springer-Verlag, pp. 97–136.
80. Scott, D.S., 1975., "Data types as lattices", in: Proceedings of the International Summer Institute and Logic Colloquium, Kiel, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 499, Springer-Verlag,, pp. 579–651.
81. Scott, D.S., 1982., "Domains for denotational semantics", in: Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 140, Springer-Verlag, pp. 97–136.
82. Smyth, M.B. , 1988., "Quasi Uniformities: Reconciling Domains with Metric Spaces", In M. Main, A. Melton, M. Mislove, and D. Schmidt(Eds.),Proc. 3rd MFPS, Lecture Notes in Computer Science, 298, 236-253.
83. Spivak, D. I. 2013. Category Theory for Scientists. Free online.
84. Van der Voorde, A., 2000., "A categorical approach to T1 separation and product of state property systems", Int. J. Theoret. Phys., 39(3), 947-953.
85. B. Van Steirteghem, B., 2000., "T0 separation in axiomatic quantum mechanics", Int. J. Theoret.Phys., 39(3), 955-962.
86. Waterman, M.S. , Smith, T.F and Beyer, W.A., 1976., "Some Biological Sequence Metrics", Adv. Math. 20 367-387.
87. Weck-Schwarz, S. 1991., "T0-objects and separated objects in topological categories", Quastiones Math.14, 315-325.
88. Weil, A 1937., "Sur les espaces à structures uniformes et sur la topologie générale", Hermann, Paris, 1937
89. Wilson, W.A. , 1931., "On Quasi-Metric Spaces", Amer.J. Math. 53 , 675-684.
90. Winskel, G., 1993., *The Formal Semantics of Programming Languages, an Introduction*, Foundations of Computing Series. The MIT Press.
91. Wyler, O. 1971., "Top Categories and Categorical Topology", General Topology and its Appl., 11, 17-28.