T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ

Biyolojik Modellerin Fuzzy Başlangıç Değer Problemleri

Proje No: FBA-2014-4808

Proje Türü
Normal Araştırma Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Yrd. Doç. Dr. Fatma Berna Benli
Eğitim Fakültesi/ İlköğretim Bölümü

Araştırmacılar:
Doç. Dr. Fatma Bozkurt
Bahatdin Daşbaşı
Özgür Keskin

Ekim 2016

KAYSERİ

TEŞEKKÜRLER

"*Biyolojik Modellerin Fuzzy Başlangıç Değer Problemleri*" isimli projenin araştırma sürecinde başarılı sonuçlar elde etmemizi sağlayan Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederiz.

Bu çalışma FBA-2014-4808 proje kodu ile BAP birimi tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	5
ABSTRACT	6
1. GİRİŞ	7
2. FUZZY SAYILARI VE FUZZY TÜREVLER	9
3. GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN MATEMATİKSEL MODELİ	25
4.GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN FUZZY BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	28
5. SONUÇ	36
6.KAYNAKLAR	37

ÖZET

Diferansiyel denklemler, biyoloji, fizik, mühendislik ve tıp gibi bilim dalları için önem arz eden problemleri modellemede vazgeçilmez bir araç olmuştur. Ne yazık ki bu bilim dallarını ilgilendiren bazı problemler, içerdiği bir takım belirsizlikler sebebiyle modellense bile arzu edilen sonucu vermemektedir. Bu belirsizliğin sebepleri ise eksik veriler, ölçüm hataları veya yanlış belirlenen başlangıç koşulları olmuştur. Fuzzy cümle teorisi (veya Bulanık cümle teorisi) bu tür belirsizlikleri ortadan kaldıran güçlü bir araçtır.

Bu çalışmada, öncelikle Fuzzy başlanıç koşullu GBM (Glioblastoma Multiforme) beyin tümörünün modeli tasarlanacak, genelleştirilmiş differensiyellenebilirlik kavramı kullanılarak oluşturulan model teorik ve nümerik olarak incelenecektir. Daha sonraki aşamalarda Fuzzy başlanıç koşullu GBM (Glioblastoma Multiforme) ve vücudun direnç sistemi IS arasındaki iç çekişme tasarlanacak, genelleştirilmiş differensiyellenebilirlik kavramı kullanılarak oluşturulan model teorik ve nümerik açıdan incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Sayıları, Fuzzy Türevi, Fuzzy Diferansiyel Denklemler, Fuzzy Başlangıç Koşulları

ABSTRACT

Differential equations has become an indispensable tool for modeling significant problems for sciences such as medicine, biology, physics, engineering. Unfortunately, some problems concerning these disciplines, due to a number of uncertainties that include modeling, even if does not provide the desired results. The causes of this uncertainty missing data, measurement errors or has been incorrectly specified initial conditions. The theory of fuzzy set is a powerful tool that eliminates these uncertainties.

In this study, primarily by initial fuzzy conditional GBM (glioblastoma multiforme) brain tumor model to design, model created using a generalized concept will be studied theoretical and numerical differentiability. In the later stages internal strife between the GBM (glioblastoma multiforme) with fuzzy initial conditions and the body's resistance called IS system will be designed, the model created by using generalized differentiability concepts will be discussed from theoretical and numerical point of view.

Anahtar Kelimeler: Impulsive diferantial equations, global stability, logistic equations, population dynamics.

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi, diferansiyel denklemler, son zamanlarda biyoloji, fizik, mühendislik ve tıp gibi bilim dalları için önem arz eden problemleri modellemede vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Ancak, bu bilim dallarını ilgilendiren bazı problemler, içerdiği bir takım belirsizlikler sebebiyle modellense bile istenilen edilen sonucu vermemektedir. Bu belirsizliğin sebepleri ise eksik veriler, ölçüm hataları veya yanlış belirlenen başlangıç koşulları şeklinde sıralanabilir. Fuzzy cümle teorisi bu tip belirsizlikleri ortadan kaldıran güçlü bir araçtır.

Fuzzy değerli dönüşümler için türev kavramı ilk olarak Puri ve Ralescu [1] tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra bu çalışma geliştirilmiş ve cümle değerli yapılardan fuzzy yapılarına Hukuhara differensiyellenebilirlik kavramı oluşturulmuştur. Hukuhara türevinden faydalanarak Kaleva [2] Fuzzy Diferansiyel Denklemler (Fuzzy Differential Equation) için bir teori geliştirmiştir. Fakat, zamana göre denklemin çözümünün bulanıklaştırılmasında Hukuhara türevinde eksiklikler veya yetersizlikler olduğu tespit edilmiştir. Fuzzy Diferansiyel Denklemlerin çözümü için bir başka yaklaşım da "Zadeh' in Genişleme Prensibi" olarak bilinen çözümdür. Buradaki temel düşünce, Fuzzy Diferansiyel Denklemlerini deterministik diferansiyel denklem olarak düşünüp, bu deterministik diferansiyel denklemi çözmek ve çözüme genişleme prensibini uygulayarak fuzzy çözümünü elde etmektir. Fakat Zadeh' in Genişleme prensibi' nde de fuzzy sayı değerli fonksiyonlar türeve sahip değildir. Bu eksikliğin giderilmesi için kuvvetli genelleştirilmiş türevler [3, 4] fuzzy teorisine dahil edilmiş ve bu sayede yüksek mertebeden fuzzy diferansiyel denklemler çözülebilmiştir [5].

Günümüzde büyük boyutlu gerçek dünya problemlerinin zorluğu araştırmacıları yeni ve güçlü çözüm yöntemleri geliştirmeye sevk etmiştir. Bu amaçla, araştırmacıların ilgisi büyük oranda yapay zeka tekniklerine veya bulanık küme problemlerine yönelmiştir. Bu yöntemler ise birçok alandaki zor problemlerin çözümünde oldukça başarılı ve etkili sonuçlar sağlamışlardır.

Bu proje çalışmasında, Fuzzy başlanıç koşullu GBM (Glioblastoma Multiforme) beyin tümörünün modeli tasarlanacak, genelleştirilmiş differensiyellenebilirlik kavramı kullanılarak oluşturulan model teorik ve nümerik olarak incelenecektir. Ayrıca Fuzzy başlanıç koşullu GBM (Glioblastoma Multiforme) ve vücudun direnç sistemi IS arasındaki iç çekişme

tasarlanacak, genelleştirilmiş differensiyellenebilirlik kavramı kullanılarak oluşturulan model teorik ve nümerik açıdan incelenecektir.

2. FUZZY SAYILARI VE FUZZY TÜREVLER

Geleneksel matematiksel modellemeler bazı ön kabuller dikkate alınarak oluşturulmaktadır. Bu nedenle ortaya konan model ile gerçek davranış modeli arasında doğal olarak sapmalar ortaya çıkmaktadır. Matematiksel modeller genellikle muhtelif sayıda parametrelere sahiptir ve bu parametreler için uygun değerlerin belirlenmesi modelin başarısı için son derece önemlidir. Ancak, oluşturulan modelin fuzzy (bulanık) parametreli ve fuzzy başlangıç koşullu bir model olarak incelenmesi oluşacak belirsizliği ortadan kaldıracaktır. Bu kısımda, fuzzy sayısı, Hukuhara türevi gibi kavramları inceleyecek, model için kullandığımız çözüm yönteminden bahsedeceğiz.

Tanım 2.1. [6,7] Herhangi bir X evrensel kümesinde A bulanık kümesi $A(x): X \to [0,1]$ dönüşümü ile verilsin. A bulanık kümesinde gösterilen her bir $x \in X$ elemanının üyelik derecesi, $0 \leq A(x) \leq 1$ dır. $\mathcal{F}$ reel eksenin bulanık kümelerinin belirli bir sınıfı olsun. $A(x): X \to [0,1]$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. A konveks bulanık kümedir, $\ni r, s \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için
$A(r\lambda + (1-\lambda)s) \geq \min[A(r), A(s)]$,

ii. A normaldir, $\ni \exists x_0 \in X$ için $A(x_0) = 1$,

iii. A üstten yarı süreklidir, $\ni A(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^{\pm}} \mathrm{A(x)}$,

iv. $[A]^0 = \overline{sup\, p(A)} = \overline{\{x \in R | A(x) \geq 0\}}$ kompakttır. Burada $\bar{A}$, A nın kapanışıdır.

Bu yüzden, $\mathcal{F}$ bulanık sayıların uzayı olarak isimlendirilir.

Eğer A bir bulanık sayı kümesi ise, $[A]^\alpha = \{x \in X | \mu_A \geq \alpha\}$, A nın α −kesmesi $(0 < \alpha \leq 1)$ olarak tanımlanır. $u, v \in \mathcal{F}$ ve $\lambda \in R$ için $u \oplus v$ toplamı ve $\lambda \odot u$ çarpımı $[u \oplus v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$, $\lambda \odot u = \lambda[u]^\alpha$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$ ile tanımlanır. Buna ek olarak $u \oplus v = v \oplus u$, $\lambda \odot u = u \odot \lambda$ dır. Ayrıca eğer $u \in \mathcal{F}$, u nun α −kesmesi ise $[u]^\alpha = [\underline{u^\alpha}, \overline{u^\alpha}]$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$ şeklinde gösterilir.

$D: \mathcal{F}x\mathcal{F} \rightarrow R_+ \cup \{0\}$, $D(u,v) = \sup_{\alpha\epsilon[0,1]} max\{|\underline{u^\alpha}, \underline{v^\alpha}|, |\overline{u^\alpha}, \overline{v^\alpha}|\}$, bulanık sayılar arasında Hausdorff uzaklığı olsun, burada $[u]^\alpha = [\underline{u^\alpha}, \overline{u^\alpha}]$ ve $[v]^\alpha = [\underline{v^\alpha}, \overline{v^\alpha}]$ dır.

Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır [8,9].

i. $D(u \oplus \omega, v \oplus \omega) = D(u,v), \quad \forall\, u,v,\omega \in \mathcal{F},$

ii. $D(k \odot u, k \odot v) = |k| D(u,v), \quad \forall\, k \in R, \quad u,v \in \mathcal{F},$

iii. $D(u \oplus v, \omega \oplus e) \leq D(u,\omega) + D(v,e), \forall\, u,v,\omega,e \in \mathcal{F},$

ve $(\mathcal{F}, D)$ tam metrik uzaydır.

Tanım 2.2. (Hukuhara Türevi)[1] $t_0 \in (a,b)$ için herhangi bir $F: (a,b) \rightarrow \mathcal{F}$ dönüşümünü göz önüne alalım. F, $t_0 \in (a,b)$ de diferansiyellenebilirdir eğer $F'(t_0) \in \mathcal{F}$ nin herhangi bir elemanı var ise öyle ki bütün yeterince küçük $h > 0$ için $\exists F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ ve limitleri D metriğinde

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0)$$

dır.

Tanım 2.3. (Genelleştirilmiş Bulanık Türev) [3,4] $t_0 \in (a,b)$ için $F: (a,b) \rightarrow \mathcal{F}$ olsun. F, t_0 da kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirdir denir eğer $F'(t_0) \in \mathcal{F}$ için herhangi bir elemanı aşağıdaki dört şarttan birini sağlıyorsa,

i. Yeterince küçük $h > 0$ ve $\exists F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır.

ii. Yeterince küçük $h > 0$ ve $\exists F(t_0) \ominus F(t_0 + h)$, $F(t_0 - h) \ominus F(t_0)$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 - h) \ominus F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır.

iii. Yeterince küçük $h > 0$ ve $\exists F(t_0 + h) \ominus F(t_0),\ F(t_0 - h) \ominus F(t_0)$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 - h) \ominus F(t_0)}{(-h)} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır.

iv. Yeterince küçük $h > 0$ ve $\exists F(t_0) \ominus F(t_0 + h),\ F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 - h) \ominus F(t_0)}{h} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.4. [6,2] $t_0 \in (a, b)$ için $F: (a, b) \to \mathcal{F}$ olsun. F, t_0 da birinci veya ikinci formdan diferansiyellenebilirdir denir eğer $F'(t_0) \in \mathcal{F}$ için herhangi bir elemanı aşağıdaki şartlardan birini sağlıyorsa,

i. Yeterince küçük $h > 0$ için $\exists F(t_0 + h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ için

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır. Buna birinci formdan diferansiyellenebilirlik denir.

ii. Yeterince küçük $h > 0$ için $\exists F(t_0 + h) \ominus F(t_0),\ F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$ için

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0)$$

eşitliği sağlanır. Buna da ikinci formdan diferansiyellenebilirlik denir.

Aşağıda ifadesi verilen teorem ise bulanık diferansiyel denklemin çözümünde esas olan teoremlerden biridir.

Teorem 2.1. [2,10] $F: T \to \mathcal{F}$ herhangi bir fonksiyon ve $\forall\ \alpha \in [0,1]$ için $[F(t)]^{\alpha} = [f_{\alpha}(t)\ ,\ g_{\alpha}(t)]$ bulanık kümesi verilsin. Bu takdirde,

i. Eğer F, birinci formdan diferansiyellenebilir ise bu takdirde $f_{\alpha}(t)$ ve $g_{\alpha}(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[F'(t)]^{\alpha} = \left[f'_{\alpha}(t)\ ,\ g'_{\alpha}(t)\right]$ dir.

ii. Eğer F, ikinci formdan diferansiyellenebilir ise bu takdirde $f_{\alpha}(t)$ ve $g_{\alpha}(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[F'(t)]^{\alpha} = \left[g'_{\alpha}(t)\ ,\ f'_{\alpha}(t)\right]$ dir.

İlk olarak 1951 yılında Steinhaus [11] tarafından, Polonya'da yapılan bir konferansta tanıtılan ve yine aynı yılda Fast [12] tarafından geliştirilen "İstatistiksel Yakınsaklık" kavramı, Toplanabilme Teorisi [13-15], Fourier Serileri [16], Fonksiyonel Analiz [16-18], Sayılar Teorisi [19] ve son zamanlarda ise, Ölçü Teorisi [20], Optimizasyon Teorisi [22-23] ve Fonksiyon Dizileri [23] gibi matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Özellikle 1993 yılında Fridy [24] tarafından "istatistiksel limit noktaları" kavramı verildikten sonra 1997 yılında Fridy ve Orhan [25] tarafından "istatistiksel limit supremum ve limit infimum" kavramları verilerek bir çeşit yeni bir analiz kavramı ortaya konulmuştur.

Bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizileri ilk olarak Matloka [26] tarafından tanıtıldı. Nanda [27] bulanık sayı dizileri uzayının tam metrik uzay olduğunu ispatladı. Daha sonra Nuray ve Savaş [28] bulanık sayılar için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizilerini tanımladılar. Nuray [29], Savaş [30] ve Kwon [31,32] istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı sonuçların bulanık sayılar için benzerlerini yaptılar. Aytar [33-35] bulanık sayı dizileri için istatistiksel limit noktaları, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel monotonluk ve istatistiksel limit supremum, istatistiksel limit infimum kavramlarını tanımladı.

Bulanık sayı dizileri için λ-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λ-toplanabilme kavramları ise, Mursaleen [36] ve Savaş [37] tarafından tanımlandı.

Tanım 2.5. [38] Bulanık sayı $X : R \to [0,1]$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur;

i) X normaldir, yani $X(t_0) = 1$ olacak şekilde $\exists t_0 \in R$ vardır.

ii) X bulanık konveksdir, yani

$\forall t_1, t_2 \in R$, $0 \le \lambda \le 1$ için $X(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \ge \min\{X(t_1), X(t_2)\}$ dir.

iii) X üst yarı sürekli, yani $\forall t \in [0,1]$ için $\{x : X(x) < t\}$ cümlesi açık olmalı.

iv) $X^0 = \{t \in R : X(t) > 0\}$ cümlesinin kapanışı kompakt olmalı.

Bulanık sayıların cümlesi $L(R)$ ile gösterilir.

Bulanık sayılar üzerindeki $\overline{d}$ Hausdorff metriği de $\overline{d} : L(R) \times L(R) \to R^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\overline{d}(X,Y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{ \left|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha\right| \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $X^\alpha = \left[\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha\right]$, X bulanık sayısının α kesmesidir. Burada $\overline{d}$, $L(R)$ üzerinde bir metriktir. $(L(R), \overline{d})$ tam metrik uzaydır [1].

Bulanık sayılar için sıralama bağıntısı

$$X \le Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X^\alpha} \le \overline{Y^\alpha} \text{ ve } \underline{X^\alpha} \le \underline{Y^\alpha}$$

şeklinde tanımlanır. Bu $\le$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$X < Y \Leftrightarrow X \le Y,\ \exists \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X^\alpha} < \overline{Y^\alpha} \text{ ve } \underline{X^\alpha} < \underline{Y^\alpha}$$

şeklindedir [39]. Eğer $X \le Y$ ve $Y \le X$ bağıntılarından her ikisi de sağlanmıyor ise, X ve Y bulanık sayıları karşılaştırılamaz denir ve $X \not\sim Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6. [28] Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \overline{d}(X_k, X_0) \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, bulanık sayılarının $X=(X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-\lim X_k = X_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.7. [36] $\lambda=(\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan bir dizisi, $\lambda_{n+1}\le\lambda_n+1,\ \lambda_1=1$ ve $X=(X_k)$ dizisi de bulanık sayılarının bir dizisi olsun. $I_n=[n-\lambda_n+1,n]$ olmak üzere eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : \bar{d}(X_k,X_0)\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise, bulanık sayılarının $X=(X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $s_\lambda-\lim X_k = X_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. [40] $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k(j)\in I_n : j\in N\right\}\right|=0$$

ise, $(X_{k(j)})$ altdizisine λ-seyrek (thin) altdizi, eğer

$$\limsup_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k(j)\in I_n : j\in N\right\}\right|>0$$

ise, λ-seyrek olmayan (nonthin) altdizi denir.
Kısalık için, $K=\{k(j): j\in N\}$ olmak üzere $(X_{k(j)})$ altdizisini $(X)_K$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.1. $X=(X_n)$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer her $\alpha\in[0,1]$ için $\lim_n \underline{X_n}^{\alpha}=\underline{X_0}^{\alpha}$ ve $\lim_n \overline{X_n}^{\alpha}=\overline{X_0}^{\alpha}$ oluyorsa $X=(X_n)$ dizisi X_0 bulanık sayısına λ-levelwise yakınsaktır denir ve $\lambda l-\lim X_n = X_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. $X=(X_n)$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{n\in I_n : \max\left\{\left|\underline{X_n}^{\alpha}-\underline{X_0}^{\alpha}\right|,\left|\overline{X_n}^{\alpha}-\overline{X_0}^{\alpha}\right|\right\}\geq\varepsilon\right\}\right|=0 \qquad (2.1)$$

oluyorsa $X=(X_n)$ dizisi X_0 bulanık sayısına λ-levelwise istatistiksel yakınsaktır denir ve $s\lambda_l-\lim X_n=X_0$ ile gösterilir. Bu şart $\forall\alpha\in[0,1]$ için $s\lambda-\lim \underline{X_n}^{\alpha}=\underline{X_0}^{\alpha}$, $s\lambda-\lim \overline{X_n}^{\alpha}=\overline{X_0}^{\alpha}$ ifadelerine denktir.

Tanım 2.1.3. $X=(X_n)$ bulanık sayı dizisi verilsin. X_0 bulanık sayısına (X_n) dizisinin λ-levelwise limit noktası denir, eğer $\forall\alpha\in[0,1]$ için $T_\alpha\in P(I_n)$ cümlesi varsa. Burada T_α sonlu sayıda eleman içerir, $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\in T_\alpha}\underline{X_n}^{\alpha}=\underline{X_0}^{\alpha}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty,\, n\in T_\alpha}\overline{X_n}^{\alpha}=\overline{X_0}^{\alpha}$ dır. (X_n) dizisinin λ-levelwise limit noktalarının cümlesi $L_X^{\lambda l}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. X_0 bulanık sayısına (X_n) dizisinin λ-levelwise istatistiksel yığılma noktası denir, eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{n\in I_n : \max\left\{\left|\underline{X_n}^{\alpha}-\underline{X_0}^{\alpha}\right|,\left|\overline{X_n}^{\alpha}-\overline{X_0}^{\alpha}\right|\right\}<\varepsilon\right\}\right|\neq 0 \qquad (2.2)$$

veya

$$\overline{\delta_\lambda}\left\{n\in I_n : \max\left\{\left|\underline{X_n}^{\alpha}-\underline{X_0}^{\alpha}\right|,\left|\overline{X_n}^{\alpha}-\overline{X_0}^{\alpha}\right|\right\}<\varepsilon\right\}>0 \qquad (2.3)$$

(X_n) dizisinin λ-levelwise istatistiksel yığılma noktalarının cümlesi $\Gamma_X^{\lambda l}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. X_0 bulanık sayısına (X_n) dizisinin λ-levelwise istatistiksel limit noktası denir,eğer $\forall\alpha\in[0,1]$ için $\delta_\lambda(T_\alpha)\neq 0$ şartını sağlayan $T_\alpha\in P(I_n)$ cümlesi varsa. Burada

$$\lim_{n\to\infty,\, n\in T_\alpha}\underline{X_n}^{\alpha}=\underline{X_0}^{\alpha}\ ,\ \lim_{n\to\infty,\, n\in T_\alpha}\overline{X_n}^{\alpha}=\overline{X_0}^{\alpha} \qquad (2.4)$$

(X_n) dizisinin λ-levelwise istatistiksel limit noktalarının cümlesi $\Lambda_X^{\lambda l}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. $X=(X_n)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına λ-levelwise istatistiksel yakınsak ise $X_0 \in \Lambda_X^{\lambda l}$.

İspat. Kabul edelim ki $s\lambda-\lim \overline{X_n}^{\alpha} = \overline{X_0}^{\alpha}$ olsun. $\forall \varepsilon>0$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{X_0}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{X_0}^{\alpha}\right| \right\} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \qquad (2.5)$$

$\varepsilon>0$ için

$$T_\alpha = \left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{X_0}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{X_0}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\} \qquad (2.6)$$

Böylece $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\delta_\lambda(T_\alpha) \neq 0$ elde ederiz. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty, n\in T_\alpha} \underline{X_n}^{\alpha} = \underline{X_0}^{\alpha}, \quad \lim_{n\to\infty, n\in T_\alpha} \overline{X_n}^{\alpha} = \overline{X_0}^{\alpha} \qquad (2.7)$$

yani $X_0 \in \Lambda_X^{\lambda l}$ demektir.

Tanım 2.1.6. [40] $X=(X_k)$ Bulanık sayı dizisinin bir *A* bulanık sayısına klasik yakınsayan ve λ-seyrek olmayan bir altdizisi varsa, *A* bulanık sayısına $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisinin λ-istatistiksel limit noktası denir. *X* dizisinin λ-istatistiksel limit noktalarının cümlesini Λ_X^{λ} ile gösterelim.

Teorem 2.1.2. Eğer $X=(X_n)$ ve $Y=(Y_n)$ iki bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ n \in I_n : X_n \neq Y_n \} \right| = 0 \qquad (2.8)$$

Şartı sağlanıyorsa $\Lambda_X^{\lambda l} = \Lambda_Y^{\lambda l}$ ve $\Gamma_X^{\lambda l} = \Gamma_Y^{\lambda l}$ dir.

İspat. Teoremin ispatı [40] daki ispata benzer şekilde düşünülmek üzere okuyucuya bırakılmıştır.

Teorem 2.1.3. Kabul edelim ki $X=(X_n)$ bulanık sayı dizi olsun. Bu taktirde $\Lambda_X^{\lambda l} \subseteq \Gamma_X^{\lambda l} \subseteq L_X^{\lambda l}$ dir.

İspat. $X_0 \in \Gamma_X^{\lambda l}$ olsun. Burada

$$\left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{X_0}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{X_0}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\} \tag{2.9}$$

Sadece sonlu elemana sahiptir ya da boş cümledir ki bu ise $X_0 \in L_X^{\lambda l}$ demektir. Yani $\Gamma_X^{\lambda l} \subseteq L_X^{\lambda l}$. Şimdi de $m \in \Lambda_X^{\lambda l}$ alalım. $\forall \alpha \in [0,1]$ için $T_\alpha \in P(I_n)$ indis cümlesi vardır ki $\overline{\delta_\lambda}(T_\alpha) = \overline{d}(\alpha) > 0$ şartını sağlar

$$\lim_{n\to\infty, n\in T_\alpha} \underline{X_n}^{\alpha} = \underline{m}^{\alpha}, \quad \lim_{n\to\infty, n\in T_\alpha} \overline{X_n}^{\alpha} = \overline{m}^{\alpha}. \tag{2.10}$$

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\}$$
$$\supseteq \left\{ n \in T_\alpha : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\}, \tag{2.11}$$

olduğundan

$$\left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\}$$
$$\supseteq \{T_\alpha\} - \left\{ n \in T_\alpha : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} \geq \varepsilon \right\} \tag{2.12}$$

elde ederiz. Böylece,

$$\left\{ n \in T_\alpha : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} \geq \varepsilon \right\} \tag{2.13}$$

cümlesi (2.12) den sonlu elemanlıdır deriz. (2.12) ve (2.13) den;

$$\overline{\delta_\lambda}\left(\left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\} \right)$$
$$\geq \overline{\delta_\lambda}(T_\alpha) - \overline{\delta_\lambda}\left(\left\{ n \in T_\alpha : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} \geq \varepsilon \right\} \right)$$
$$= \overline{d}(\alpha) - 0 = \overline{d}(\alpha) > 0 \tag{2.14}$$

elde edilir.

$$\overline{\delta_\lambda}\left(\left\{ n \in I_n : \max\left\{ \left|\underline{X_n}^{\alpha} - \underline{m}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X_n}^{\alpha} - \overline{m}^{\alpha}\right| \right\} < \varepsilon \right\} \right) > 0 \tag{2.15}$$

eşitsizliği

$$\delta_\lambda\left(\left\{n\in I_n:\max\left\{\left|\underline{X_n}^{\alpha}-\underline{m}^{\alpha}\right|,\left|\overline{X_n}^{\alpha}-\overline{m}^{\alpha}\right|\right\}<\varepsilon\right\}\right)\neq 0 \quad , \qquad (2.16)$$

gerektirir ki bu da $m\in\Gamma_X^{\lambda l}$ demektir. Böylece $\Lambda_X^{\lambda l}\subseteq\Gamma_X^{\lambda l}$ bulunur.

Teorem 2.1.4. Kabul edelim ki $s\lambda_l-\lim X_n=X_0$ olsun. Bu taktirde $\Lambda_X^{\lambda l}=\Gamma_X^{\lambda l}=\{X_0\}$.

İspat. Teorem 2.1.1 den $X_0\in\Lambda_X^{\lambda l}$ olduğu açıktır. X_0 ın $\Lambda_X^{\lambda l}$ deki tek eleman olduğunu gösterirsek ispatı tamamlarız. Aksini kabul edelim, $\Lambda_X^{\lambda l}=\{X_0,Y_0\}$ ve $\underline{X_0}^{\alpha_0}\neq\underline{Y_0}^{\alpha_0}$ olsun. Böylece $\underline{X_0}^{\alpha_0}\neq\underline{Y_0}^{\alpha_0}$ ve $\overline{X_0}^{\alpha_0}\neq\overline{Y_0}^{\alpha_0}$ olacak şekilde $\alpha_0\in[0,1]$ vardır. $\overline{\varepsilon}=\left|\underline{X_0}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|/3$ tanımlayalım. $Y_0\in\Lambda_X^{\lambda l}$ olduğundan boş olmayan T_{α_0} cümlesi

$$\delta_\lambda\left(\left\{n\in T_{\alpha_0}:\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|<\overline{\varepsilon}\right\}\right)\neq 0 \qquad (2.17)$$

şartını sağlar. $s\lambda_l-\lim X_n=X_0$ olduğundan

$$\delta_\lambda\left(\left\{n\in N:\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|\geq\overline{\varepsilon}\right\}\right)=0 \qquad (2.18)$$

elde ederiz. $\overline{\varepsilon}$ tanımından

$$\left\{n\in N:\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|\geq\overline{\varepsilon}\right\}\supseteq\left\{n\in T_{\alpha_0}:\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|<\overline{\varepsilon}\right\} \qquad (2.19)$$

yazılabilir. (2.17), (2.18) ve (2.19) birbiri ile çelişmektedir. Bu da X_0 ın $\Lambda_X^{\lambda l}$ deki tek eleman olduğunu gösterir.

İspata $\Gamma_X^{\lambda l}$ in tek nokta cümlesi olduğunu göstererek devam edelim. Hipotezden $X_0\in\Gamma_X^{\lambda l}$ dir ki bu $\Gamma_X^{\lambda l}$ in boş cümle olmaması anlamına gelir. $X_0\neq Y_0$ olacak şekilde $Y_0\in\Gamma_X^{\lambda l}$ bulanık sayısını tanımlayalım. Bu durumda, $\overline{\varepsilon}>0$ ve $\alpha_0\in[0,1]$ için

$$\left|\underline{X_0}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|>\overline{2\varepsilon} \quad \text{veya} \quad \left|\overline{X_0^{\alpha_0}}-\overline{Y_0^{\alpha_0}}\right|>\overline{2\varepsilon} \qquad (2.20)$$

yazılabilir. Kabul edelim ki $\left|\underline{X_0}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|\geq\overline{2\varepsilon}$ olsun. $Y_0\in\Gamma_X^{\lambda l}$ olduğundan

$$\overline{\delta_\lambda}\left(\left\{n\in I_n:\max\left\{\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|,\left|\overline{X_n}^{\alpha_0}-\overline{Y_0}^{\alpha_0}\right|\right\}<\overline{\varepsilon}\right\}\right)>0 \qquad (2.21)$$

Yani

$$\overline{\delta_\lambda}\left(\left\{n\in I_n:\left|\underline{X_n}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|<\overline{\varepsilon}\right\}\right)>0 \qquad (2.22)$$

dir. $\left|\underline{X_0}^{\alpha_0}-\underline{Y_0}^{\alpha_0}\right|>\overline{2\varepsilon}$ için

$$\left\{n \in I_n : \left|\underline{X_n}^{\alpha_0} - \underline{X_0}^{\alpha_0}\right| < \overline{\varepsilon}\right\} \cap \left\{n \in I_n : \left|\underline{X_n}^{\alpha_0} - \underline{Y_0}^{\alpha_0}\right| < \overline{\varepsilon}\right\} = \phi \tag{2.23}$$

$$\left\{n \in I_n : \left|\underline{X_n}^{\alpha_0} - \underline{X_0}^{\alpha_0}\right| \geq \overline{\varepsilon}\right\} \supseteq \left\{n \in I_n : \left|\underline{X_n}^{\alpha_0} - \underline{Y_0}^{\alpha_0}\right| < \overline{\varepsilon}\right\} \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.22) ve (2.24) den

$$\overline{\delta}\left(\left\{n \in I_n : \left|\underline{X_n}^{\alpha_0} - \underline{X_0}^{\alpha_0}\right| \geq \overline{\varepsilon}\right\}\right) > 0 \tag{2.25}$$

bulunur ki bu $s\lambda_l - \lim X_n = X_0$ ile çelişir.

Tanım 2.2.1. [41] Aşağıda λ-istatistiksel sınırlı bulanık sayı dizileri için λ-istatistiksel limit infimum ve λ-istatistiksel limit supremum kavramlarını tanımlayacağız. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi için,

$$A_X^{\lambda} = \left\{M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : X_k < M\}\right| \neq 0\right\}$$

$$\overline{A_X^{\lambda}} = \left\{M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : X_k > M\}\right| = 1\right\}$$

$$B_X^{\lambda} = \left\{M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : X_k > M\}\right| \neq 0\right\}$$

$$\overline{B_X^{\lambda}} = \left\{M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : X_k < M\}\right| = 1\right\}$$

olsun. $\overline{A_X^{\lambda}}$ ve $\overline{B_X^{\lambda}}$ cümleleri sırasıyla dizinin λ-istatistiksel alt ve λ-istatistiksel üst sınırlarıdır. Eğer $X = (X_k)$ λ-istatistiksel sınırlı ise, bu cümlelerin boş olmayacağı açıktır.

Teorem 2.2.1. [42] $X = (X_k)$ bulanık sayıların λ-istatistiksel sınırlı bir dizisi olsun. Eğer $m = s\lambda - \liminf X$ ise bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : X_k < m - \varepsilon_1\}\right| = 0 \tag{2.26}$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : X_k < m+\varepsilon_1\right\} \cup \left\{k \in I_n : X_k \not\prec m+\varepsilon_1\right\}\right| \neq 0 \qquad (2.27)$$

dır.

Teorem 2.2.2. [42] $X=(X_k)$ bulanık sayıların λ-istatistiksel sınırlı bir dizisi olsun. Eğer $M = s\lambda - \limsup X$ ise, bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : X_k > M+\varepsilon_1\right\}\right| = 0 \\ \lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : X_k > M-\varepsilon_1\right\} \cup \left\{k \in I_n : X_k \not\prec M-\varepsilon_1\right\}\right| \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.28)$$

dır.

Teorem 2.2.3. [42] Herhangi λ-istatistiksel sınırlı $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi için $s\lambda - \liminf X \leq s\lambda - \limsup X$ dir.

İspat : $s\lambda - \liminf X = \sup \overline{A_X^\lambda}$ ve $s\lambda - \limsup X = \sup B_X^\lambda$ olduğunu biliyoruz. $\overline{A_X^\lambda}$ ve B_X^λ cümlelerinin tanımından $\overline{A_X^\lambda} \subseteq B_X^\lambda$ olduğunu gördük. Böylece $\sup \overline{A_X^\lambda} \leq \sup B_X^\lambda$ elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.4. Kabul edelim ki $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına λ-istatistiksel yakınsak olsun. Böylece $s_\lambda - \liminf X = s_\lambda - \limsup X = X_0$ dır.

İspat : Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $X=(X_k)$ dizisi X_0 a λ-istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \overline{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \overline{d}(X_k, X_0) < \varepsilon\right\}\right| = 1$$

yazabiliriz. $K=\left\{k\in I_n : \sup_{\alpha\in[0,1]} \overline{d}\left(X_k^{\alpha}, X_0^{\alpha}\right)<\varepsilon\right\}$ olmak üzere $\delta_\lambda(K)=1$ elde ederiz. Bir başka deyişle λ - hemen hemen her k için $\sup_{\alpha\in[0,1]} \overline{d}\left(X_k^{\alpha}, X_0^{\alpha}\right)<\varepsilon$ veya $\sup_{\alpha\in[0,1]} \left|\overline{X_k^{\alpha}}-\overline{X_0^{\alpha}}\right|<\varepsilon$ ve $\sup_{\alpha\in[0,1]} \left|\underline{X_k^{\alpha}}-\underline{X_0^{\alpha}}\right|<\varepsilon$ dur. Böylece λ -hemen hemen her k için $X_0-\varepsilon_1<X_k<X_0+\varepsilon_1$ eşitsizliği sağlanır. Buradan $\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : X_k<X_0+\varepsilon_1\right\}\right|=1$ elde ederiz ki bunun anlamı, $X_0+\varepsilon_1\in\overline{B_X^{\lambda}}$ demektir. Böylece,

$$s\lambda-\limsup X=\inf \overline{B_X^{\lambda}}=M\le X_0+\varepsilon_1 \tag{2.29}$$

dir. Benzer şekilde $\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : X_k>X_0-\varepsilon_1\right\}\right|=1$ elde ederiz ki bu da $X_0-\varepsilon_1\in\overline{A_X^{\lambda}}$ demektir. Böylece,

$$s\lambda-\liminf X=\sup \overline{A_X^{\lambda}}=m\ge X_0-\varepsilon_1 \tag{2.30}$$

dir. (2.29), (2.30) eşitsizliklerinden ve Teorem 2.2.3 den $X_0-\varepsilon_1\le m\le M\le X_0+\varepsilon_1$ elde ederiz. $\varepsilon>0$ keyfi bir sayı olduğundan $m=M=X_0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.1. A ve B bulanık sayıları verilmiş olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir;

i) $\overline{d}(A,B)\le\varepsilon$,

ii) $\varepsilon>0$ olmak üzere $B-\varepsilon_1\le A\le B+\varepsilon_1$.

İspat : $\overline{d}(A,B)=\sup_{\alpha\in[0,1]}\max\left\{\left|\underline{A}^{\alpha}-\underline{B}^{\alpha}\right|,\left|\overline{A}^{\alpha}-\overline{B}^{\alpha}\right|\right\}$ olduğundan (i) eşitsizliği $\forall\alpha\in[0,1]$ için $\left|\underline{A}^{\alpha}-\underline{B}^{\alpha}\right|\le\varepsilon$ ve $\left|\overline{A}^{\alpha}-\overline{B}^{\alpha}\right|\le\varepsilon$ a denktir ki bunun anlamı $\forall\alpha\in[0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığıdır;

$$\underline{A}^{\alpha} \leq \underline{B}^{\alpha} + \varepsilon, \quad \overline{A}^{\alpha} \leq \overline{B}^{\alpha} + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \underline{A}^{\alpha} \geq \underline{B}^{\alpha} - \varepsilon, \quad \overline{A}^{\alpha} \geq \overline{B}^{\alpha} - \varepsilon$$

Diğer bir deyişle $A \leq B + \varepsilon_1$ ve $A \geq B - \varepsilon_1$ dir.

Teorem 2.2.5. Kabul edelim ki $s_\lambda - \limsup X = s_\lambda - \liminf X = M$ ve her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \not\prec M + \varepsilon_1 \right\} \right| = 0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \not\succ M - \varepsilon_1 \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı mevcut ise $s_\lambda - \lim X_k = M$ dir.

İspat : Herhangi bir $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ sayısı alalım. $s_\lambda - \liminf X = M$ olduğundan ve Teorem 2.2.1 den $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k < M - \varepsilon_1 \right\} \right| = 0 \tag{2.31}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $s_\lambda - \limsup X = M$ olduğundan ve Teorem 2.2.2 den

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k > M + \varepsilon_1 \right\} \right| = 0 \tag{2.32}$$

elde ederiz. Buradan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \not\prec M + \varepsilon_1 \right\} \right| = 0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \not\gamma\ M - \varepsilon_1 \right\} \right| = 0$$

olduğundan, (2.31) ve (2.32) den

$$K_1 = \left\{ k \in I_n : X_k \geq M - \varepsilon_1 \right\} \text{ ve } K_2 = \left\{ k \in I_n : X_k \leq M + \varepsilon_1 \right\}$$

bulunur ki bu da $\delta_\lambda(K_1) = 1$ ve $\delta_\lambda(K_2) = 1$ sonucunu verir.

$$K_1 \cap K_2 = \left\{ k \in I_n : M - \varepsilon_1 \leq X_k \leq M + \varepsilon_1 \right\}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan lemma 2.2.1 den

$$K_1 \cap K_2 = \left\{ k \in I_n : \overline{d}(X_k, M) \leq \varepsilon \right\}$$

olup,

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}(X_k, M) \leq \varepsilon \right\} \right| = 1$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \overline{d}(X_k, M) > \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olur. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olduğundan $s\lambda - \lim X_k = M$ yazabiliriz.

Teorem 2.2.6. Eğer $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$, $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \right\} \right| = 0$ olacak şekilde birer $\lambda -$istatistiksel sınırlı bulanık sayı dizisi iseler,

i) $s\lambda - \limsup X = s\lambda - \limsup Y$

ii) $s\lambda - \liminf X = s\lambda - \liminf Y$

dir.

İspat : i) $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \} \right| = 0$ olduğundan

$$\left\{ M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ k \in I_n : X_k > M \} \right| \neq 0 \right\} = \left\{ M \in L(R) : \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ k \in I_n : Y_k > M \} \right| \neq 0 \right\}$$

elde ederiz. Yani $B_X^\lambda = B_Y^\lambda$ dır. Böylece $\sup B_X^\lambda = \sup B_Y^\lambda$ dir ki bu da (i) eşitliğini sağlar.

ii) Benzer şekilde $s\lambda - \liminf X = s\lambda - \liminf Y$ olduğunu gösterebiliriz.

3. GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN MATEMATİKSEL MODELİ

Son 20 yılda tümör popülasyon dinamik modelleri ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar [43,44], malignant-normal hücre sisteminden oluşan iç çekişmeli bir dinamik modelleme oluşturarak bu biyolojik olayı farklı yaklaşımlarla ayrıntılı olarak incelemeye almışlardır. Bir çok makalede ([45-51]) malignant ve normal hücre arasındaki iç çekişme, Lotka-Volterra sistemleri veya Verhulst (Lojistik) denklemleriyle ifade edilmeye çalışılmıştır. Özel olarak [48]'deki çalışma tümör büyüme modellerinin farklı tiplerini analiz etmiş, küreye benzer çok hücreli tümörler ile ilgili deneysel veriler hakkında önemli biyolojik bilgiler vermiştir. Üstelik, Lotka-Volterra modellerinde olduğu gibi, iç çekişmeli popülasyon modellerinin (bu durum tümör büyümesinden oluşan bir dinamik sistem için düşünülürse malignant ve normal hücre arasında bir iç çekişme şeklinde yorumlanabilir) hücre-hücre çekişmesi şeklinde görülebileceği tespit edilmiştir. Klinik veriler, Lotka-Volterra denklem sistemleri şeklindeki modellemelerle ifade edilebilen tümör popülasyonunda tümör büyümesinin yavaşladığını göstermiştir [52-56]. Tümör popülasyonu ile ilgili modellemelerde, modelin denge noktasının kararlılık analizinden ve bifurcation diagramının incelenmesinden elde edilen sonuçların, hastalığın tedavi sürecinde olumlu yönde önemli katkılar sağladığı görülmüştür. Özellikle [45,46,55,56] ile verilen çalışmalarda üzerinde durulan modellerde parametre değerlerinin değişmesiyle oluşturulan dinamik sistemin çözümlerinin yapısı ve davranışları ayrıntılı bir şekilde incelenmiş, bu çalışmaların sonuçlarından kemoterapi sürecinin etkisinin değerlendirilmesinde önemli ölçüde yararlanılmıştır.

Geleneksel matematiksel modellemeler bazı ön kabuller dikkate alınarak oluşturulmaktadır. Bu nedenle ortaya konan model ile gerçek davranış modeli arasında doğal olarak sapmalar ortaya çıkmaktadır. Matematiksel modeller genellikle muhtelif sayıda parametrelere sahiptir ve bu parametreler için uygun değerlerin belirlenmesi modelin başarısı için son derece önemlidir. Ancak, oluşturulan modelin fuzzy (bulanık) parametreli ve fuzzy başlangıç koşullu bir model olarak incelenmesi oluşacak belirsizliği ortadan kaldıracaktır.

Popülasyonlar ve türler arasındaki iç çekişmeler ile ilgili ilk çalışmalar, Lotka-Volterra denklem sistemi üzerinedir. Bu model Lotka (1925) ve Volterra (1926) tarafından tasarlanmış olup

$$\begin{cases} R(n+1) = R(n) + \alpha * R(n) - \beta * R(n) * F(n) \\ F(n+1) = F(n) + \delta * \beta * R(n) * F(n) - \gamma * F(n) \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Lotka-Volterra modeli av-avcı popülasyon gelişimi ve çevresel faktörler ile ilgili bazı kabuller esas alınarak tasarlanmıştır. Bu kabulleri şöyle özetleyebiliriz:

i) Av her zaman yeterli besine sahiptir.

ii) Avcı popülasyonun tedarik ettiği besin tamamen bu belirlenmiş olan av popülasyonundan oluşmaktadır.

iii) Bu süreç içinde çevresel faktörler herhangi bir türü korumaya almamakta ve genetik adaptasyon oldukça yavaş işlemektedir.

Bu modelde, yani (3.1) de, α, R-türünün doğal doğum oranını, γ, F-türün doğal ölüm oranı, β, F-türün avlaması sonucunda R-türün ölüm oranı ve δ da R-türün F-türüne sağladığı yeterlilik (verim) oranıdır [57].

Bu model göz önüne alınarak, k_1, k_2, l_1, l_2 negatif olmayan parametreler $\mu_1 < 1$ ve $\mu_2 < 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n)\exp\left(r_1(1 - x(n-k_1) - \mu_1 y(n-k_2)\right) \\ y(n+1) = y(n)\exp\left(r_2(1 - \mu_2 x(n-l_1) - y(n-l_2)\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

denklem sisteminin çözümlerinin davranışları incelenmiştir [58].

Tümör-sağlıklı hücre ile ilgili popülasyon modelini oluştururken malignant hücre av ve sağlıklı hücre de avcı olarak kabul edilmiştir. Avcı popülasyonunda tümöre karşı bir direnç tepkisi oluşmakta ki bunlar T-lenfositler, makrofajlar ve doğal katil hücreleridir. T-lenfositler iki kısma ayrılmaktadır; düzenleyici ve sitotoksik hücreler (hücreler için zehir karakterini taşıyan madde). Düzenleyici hücreler olarak T-lenfositler (bunlar yardımcılar olarak da tanımlanabilir) tümör hücrelerine karşı saldırıyı düzenlerler, yani görevleri aktif olarak

malignant hücresinin yok olması ile ilgili değildir. Fakat, diğer avcı görevini almış olan hücrelerin popülasyonunu teşvik etmektedir. Üstelik avcı hücreler vücutta iki şekilde görülebilmektedir; avlayan ve dinlenme halindeki hücre. Örneğin dinlenme halindeki sitotoksik T-lenfositler eğer bir yardımcı T-hücresinden harekete geçmesi için sinyal alırsa aktif olarak avcı hücre konumuna geçer.

Buna göre örneğin [59]'te M(t) tümör hücresinin yoğunluğu, N(t) savaşan (avlayan) hücreler ve Z(t) de beklemede, dinlenme halindeki hücreler olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dM(t)}{dt} = q + rM(t)\left(1 - \frac{M(t)}{k_1}\right) - \alpha M(t)N(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t)Z(t) - d_1 N(t) \\ \frac{dZ(t)}{dt} = sZ(t)\left(1 - \frac{Z(t)}{k_2}\right) - \beta N(t)Z(t) - d_2 Z(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklinde bir popülasyon modeli oluşturulmuştur. Burada r tümör hücresinin popülasyon oranı, q normal hücrenin malignant hücreye dönüşmesinin oranı, α avcı hücreler ile tümör hücreleri arasındaki ilişki, β dinlenme halindeki hücrelerin avcı hücrelere dönüşmesi, d_1 avcı hücrelerin doğal ölümü, s dinlenen hücrelerin popülasyon oranı, k_1 tümör hücrelerinin maksimum taşıma kapasitesi, k_2 dinlenen hücrelerin maksimum taşıma kapasitesidir.

[6] da bulanık problemlere vurgu yaparak fuzzy başlangıç değer problemli av-avcı modeli göz önüne alınmıştır. Bu modelin çözümü için genelleştirilmiş differensiyellenebilirlik kavramı kullanılmış ve nümerik sonuçlar irdelenmiştir. [7] de ise ikinci mertebeden fuzzy başlangıç değer problemi için bir algoritma tasarlanmıştır. Dikkate alınan başlangıç değer probleminde denklemin katsayıları da fuzzy sayıları olarak seçilmiştir.

4. GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN FUZZY BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, beyin tümörü için erken teşhis durumunda fuzzy başlangıç değeri ile verilen model incelenecektir. Öncelikle [60] da verilen, aşağıdaki model incelenmelidir.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{E+x}\right)(px + r_1(K_1 - \alpha_1 x) - d_1 x - \tau_1 xy) \\ \frac{dy}{dt} = r_2(K_2 - \beta_1 y) - d_2 x - \tau_2 xy \end{cases} \tag{4.1}$$

burada $t \geq 0$ zamanı, $\alpha_1, \beta_1, \tau_1, \tau_2,\ p, d_1, d_2, K_1, K_2,, r_1$ ve r_2 parametreleri ise pozitif sayıları göstermektedir. x(t) monoklonal beyin tümörünü, y(t) de aktif makrofajları temsil etmektedir.

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{0{,}1+x}\right)[0{,}192x + 0{,}65x(4{,}704 - 0{,}55x) - 0{,}6x - 0{,}01xy]$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}5y(1{,}232 - 0{,}25y) - 0{,}06y - 0{,}01xy \tag{4.2}$$

$$X(0) = 0{,}35\ ml\ ,\quad Y(0) = 0{,}2\ ml\ .$$

burada x(t) ve y(t) ler sırasıyla, t zamandaki tümör ve makrofajların yoğunluğunu göstermektedir. Tablo 1 ise (4.1) denklemindeki parametreleri göstermektedir.

p	hassas hücrelerin bölünme oranı	0.192	τ_i	Etkileşimin sebep olduğu yıkım oranı	0.01
K_1	Tümör hücrelerinin taşıma kapasitesi	4.704	d_1	Tümör hücrelerine ilaç tedavisinin etkisi	0.6
K_2	Makrofajların taşıma kapasitesi	1.232	d_2	makrofaj hücrelerine ilaç tedavisinin etkisi	0.06
α_1	Tümör hücre	$\alpha_1 \in [0.5, 0.95]$	β_1	Makrofajların lojistik	$\beta_2 \in [0.05, 0.25]$

	popülasyonunun lojistik popülasyona oranı			popülasyon oranı.	

Tablo 1. (4.1) sisteminin parametre değerleri

Şimdi, aşağıda verilen modeli inceleyelim:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{0{,}1 + x}\right)[2{,}6496x - 0{,}3575x^2 - 0{,}01xy]$$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}556y - 0{,}125y^2 - 0{,}01xy$$

$$X(0) = 0{,}35\ ml\ ,\quad Y(0) = 0{,}2\ ml\ .$$

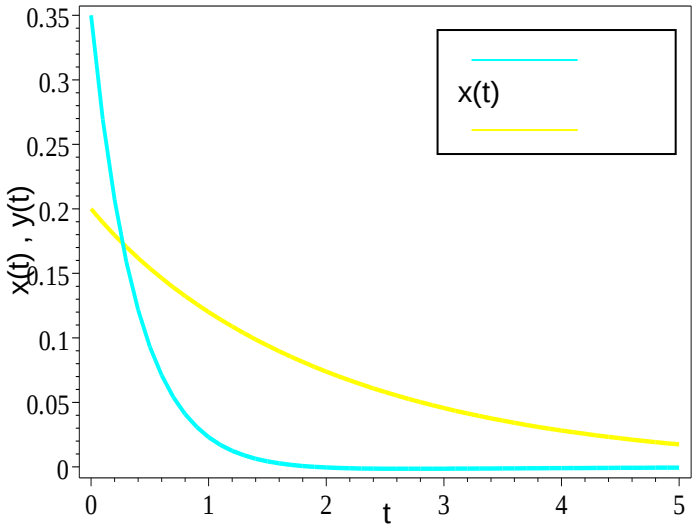
Denklemleri lineerleştirirsek, iki doğrusal denklem elde ederiz ki bu sistem gerçekçi durumlara en yakın çözümü verir.

$$J(7{,}303392; 3{,}863729) = \begin{pmatrix} -2{,}5757 & -0{,}07205 \\ -0{,}03864 & -0{,}48297 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2{,}5757x - 0{,}07205y$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}03864x - 0{,}48297y \qquad (4.3)$$

Problem (4.3) ün crisp çözümünü Şekil 1 de görebiliriz.



Şekil 1: Problem (4.3) ün crisp çözümü

$[u, v] = -2{,}5757[u, v] - 0{,}07205[r, s]$,

$[r, s] = -0{,}03864[u, v] - 0{,}48297[r, s]$.

Eğer $x(t, \alpha)$ ve y(t, α), Tanım 2.4 e göre (i) türevlenebilir ise sistem (4.3)

$u' = -2{,}5757v - 0{,}07205s$,

$v' = -2{,}5757u - 0{,}07205r$,

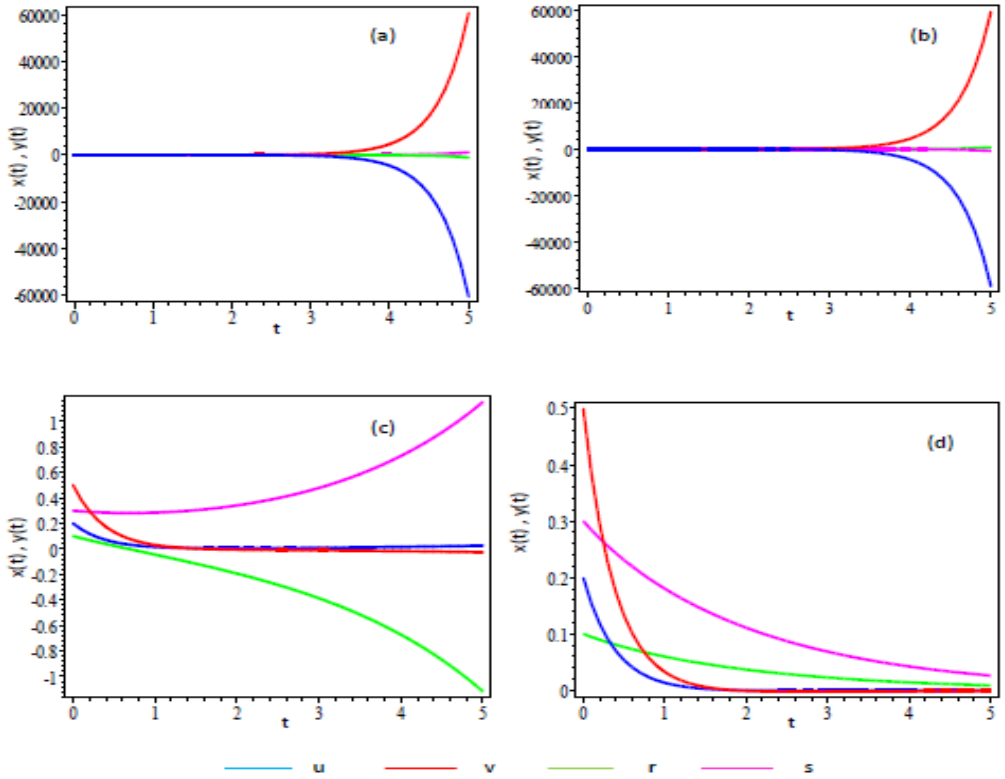
$r' = -0{,}03864v - 0{,}48297s$,

$s' = -0{,}03864u - 0{,}48297r$.

$u(0) = 0{,}20\ ml$, $v(0) = 0{,}50\ ml$, $r(0) = 0{,}10\ ml$, $s(0) = 0{,}30\ ml$

halini alır.

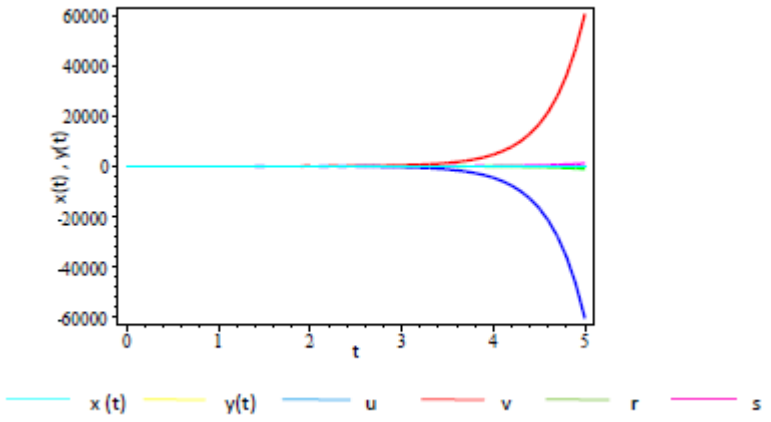
Şekil 2 de, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ için bütün durumların grafik çözümlerini görüyoruz.



Şekil 2 : $\alpha = 0$ için problem (4.3) nin bulanık çözümü

Şekil 2 de, $x(t,\alpha)$ ve y(t,α) nın (ii) formdan türevlenebilmesi durumu sözkonusudur. Aynı zamanda grafik çözümü biyolojik olarak da anlamlıdır. Bunun yanısıra, grafik çözümü ile crisp çözüm uyumludur. Diğer taraftan, $x(t,\alpha)$ ve y(t,α), Şekil 2 deki alt figürlerde (a), (b) ve (c) de gösterildiği gibi türevlenebilirdir. Bunun anlamı ise, grafik çözümlerin biyolojik çözümler ile uyumsuz olması demektir.

Son olarak, $x(t,\alpha)$ ve y(t,α) ların (i) ve (ii) formdan türevlenebilir olması durumlarını inceleyeceğiz. Şekil 3, $\alpha = 0$ and $0 \leq \alpha \leq 1$ için aynı grafik üzerinde fuzzy ve crisp çözümleri göstermektedir.



Şekil 3 : $\alpha = 0$ için crisp ve fuzzy çözüm

Şimdi de aşağıdaki model için yapılan nümerik çalışmaları inceleyeceğiz. Burada Alleethresold tümör modeli yine bulanık başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. $\overline{X} = 0$ kritik noktası stabil olmadığı için tümör popülasyonunun mevcudiyetini açıklamak amacıyla thresold a ihtiyaç duyulmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x - 1{,}5}{x}\right)[0{,}192x + 0{,}65x(4{,}704 - 0{,}55x) - 0{,}6x - 0{,}01xy]$$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}5y(1{,}232 - 0{,}25y) - 0{,}06y - 0{,}01xy \qquad (4.4)$$

$$X(0) = 1{,}6\ ml\ ,\quad Y(0) = 0{,}2\ ml\ .$$

burada x(t) ve y(t), t zamandaki tümör ve makrofaj yoğunluklarını göstermektedir. Tablo 2 de (4.1) denklem sistemindeki parametre değerleri görülmektedir, ki bu (4.4) ü verir.

p	hassas hücrelerin bölünme oranı	0.192	τ_i	Etkileşimin sebep olduğu yıkım oranı	0.01
K_1	Tümör hücrelerinin taşıma kapasitesi	4.704	d_1	Tümör hücrelerine ilaç tedavisinin etkisi	0.6
K_2	Makrofajların taşıma kapasitesi	1.232	d_2	makrofaj hücrelerine ilaç tedavisinin etkisi	0.06
α_1	Tümör hücre popülasyonunun lojistik popülasyona oranı	$\alpha_1 \in [0.5, 0.95]$	β_1	Makrofajların lojistik popülasyon oranı.	$\beta_2 \in [0.05, 0.25]$

Tablo 2. Sistem (4.1) in parametre değerleri

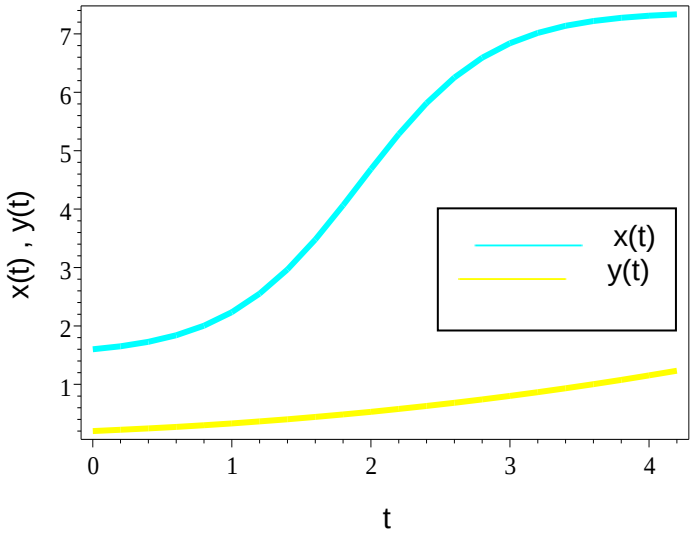
Aşağıdaki modeli gözönüne alalım,

$$\frac{dx}{dt} = 3{,}18585x - 0{,}3575x^2 - 0{,}01xy + 0{,}015y - 3{,}9744$$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}556y - 0{,}125y^2 - 0{,}01xy \qquad (4.5)$$

$$X(0) = 1{,}6\ ml\ ,\quad Y(0) = 0{,}2\ ml\ .$$

Problem (4.5) in crisp çözümü Şekil 4 de gösterilmiştir.



Şekil 4: Problem (4.5) in crisp çözümü

Eğer $x(t,\alpha)$ ve $y(t,\alpha)$ Tanım 2.4 e göre (1) türevlenebilirse, sistem (4.5)

$$[u,v] = 3{,}18585[u,v] - 0{,}3575[u,v].[u,v] - 0{,}01[u,v].[r,s] + 0{,}015[r,s] - [3{,}9744; 3{,}9744],$$
$$[r,s] = 0{,}556[r,s] - 0{,}125[r,s].[r,s] - 0{,}01[u,v].[r,s]$$

halini alır.

Böylece $\alpha = 0$ için (4.5) den aşağıdaki başlangıç değer problemi türetilebilir;

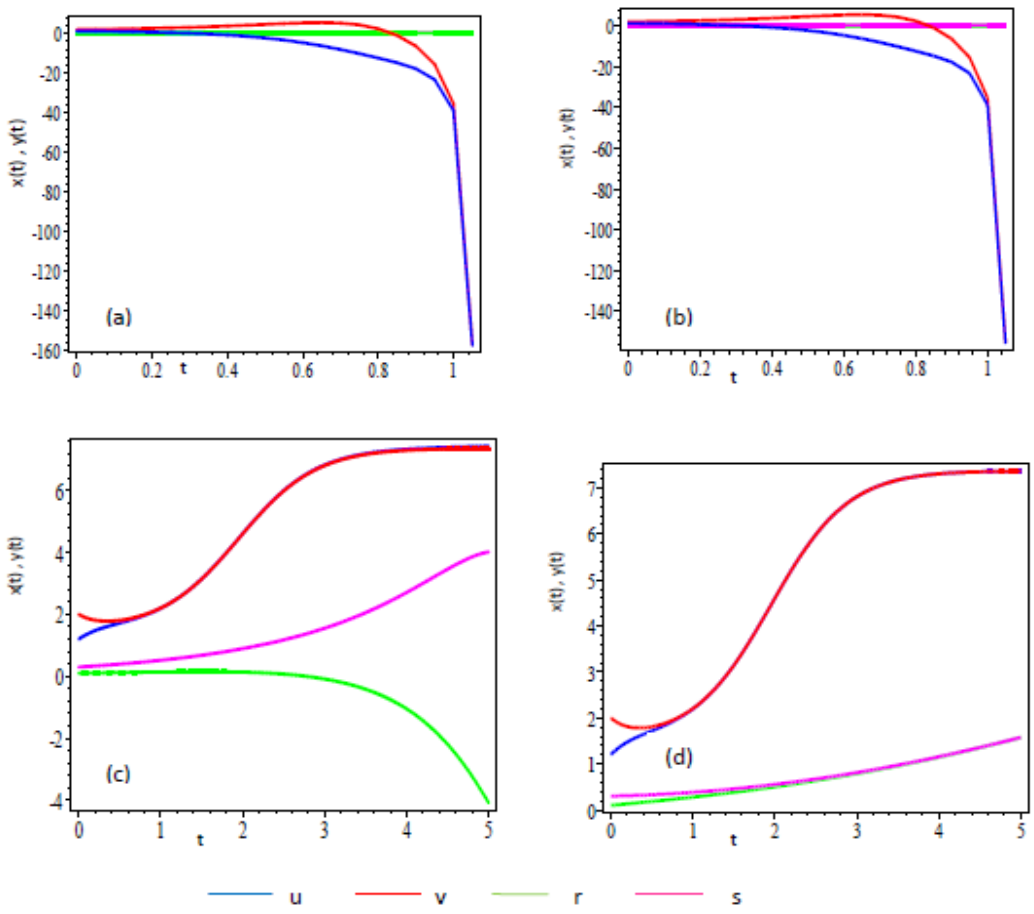
$$u' = 3{,}18585u - 0{,}3575v^2 - 0{,}01vs + 0{,}015r - 3{,}9744\,,$$
$$v' = 3{,}18585v - 0{,}3575u^2 - 0{,}01ur + 0{,}015s - 3{,}9744\,,$$
$$r' = 0{,}556r - 0{,}125s^2 - 0{,}01vs\,,$$

$s' = 0{,}556s - 0{,}125r^2 - 0{,}01ur$.
$u(0) = 1{,}20\ ml$, $v(0) = 2\ ml$, $r(0) = 0{,}10\ ml$, $s(0) = 0{,}30\ ml$.

Şimdi de $x(t,\alpha)$ ve y(t,α), Tanım 2.4 e göre (2) türevlenebilir olsun. Bu durumda sistem (4.5),

$v' = 3{,}18585u - 0{,}3575v^2 - 0{,}01vs + 0{,}015r - 3{,}9744$,
$u' = 3{,}18585v - 0{,}3575u^2 - 0{,}01ur + 0{,}015s - 3{,}9744$,
$s' = 0{,}556r - 0{,}125s^2 - 0{,}01vs$,
$r' = 0{,}556s - 0{,}125r^2 - 0{,}01ur$.
$u(0) = 1{,}20\ ml$, $v(0) = 2\ ml$, $r(0) = 0{,}10\ ml$, $s(0) = 0{,}30\ ml$.

halini alır. Şekil 5 de, $\alpha = 0$ ın bütün durumları için grafik çözümlerini görebiliriz.

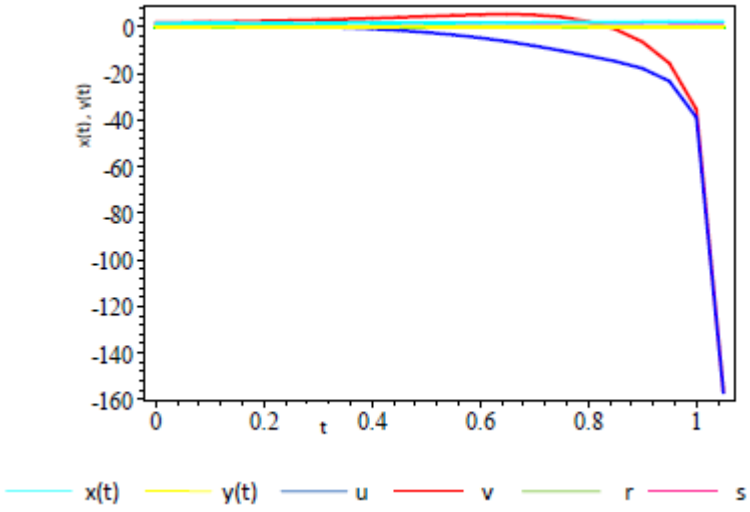


Şekil 5 : $\alpha = 0$ için problem (4.5) in bulanık çözümü

Şekil 5 de $x(t,\alpha)$ ve y(t,α) nın (ii) formda türevlenebildiğini ve grafik çözümlerinin biyolojik olarak da anlamlı olduğunu görüyoruz. bunun yanısıra grafik çözümler crisp çözümler ile de uyumludur. Fakat, $x(t,\alpha)$ ve y(t,α), Şekil 5 deki (a), (b) ve (c) figürlerinde

gösterildiği gibi türevlenebildiği zaman grafik çözümler ile biyolojik gerçeklerin tutarsız olduğu görülmektedir.

Son olarak, $x(t,\alpha)$ ve $y(t,\alpha)$ nın, (i) ve (ii) formdan türevlenebilir olduğu durumları gözönüne alalım. Şekil 6, $\alpha = 0$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için aynı düzlem üzerinde bulanık ve crisp grafik çözümlerini göstermektedir.



Şekil 6 : $\alpha = 0$ için crisp ve bulanık çözüm

5. SONUÇ

Proje çalışması boyunca temel amacımız bulanık sayılar ve bulanık türevler arasındaki ilişkileri çözebilmek ve elde ettiğimiz çalışmalar doğrultusunda ise beyin tümörü modellerini bulanık başlangıç değer problemi haline getirmek ve en uygun, biyolojik açıdan anlamlı çözümler elde etmek olmuştur.

Bu çerçevede, elde edilen bilgiler yurt dışı sempozyumlarda sunulmuş ve makaleye dönüştürülerek basılması sağlanmıştır.

Proje kapsamında basılan makaleler şunlardır;

1. Benli F. B., "Relations Between Lambda-Statistical Limit İnferior And Limit Superior For Sequences Of Fuzzy Numbers", International Journal Of Modeling and Optimization, no.4, pp.321-325, 2014.
2. Benli F. B., “Lambda-Levelwise Statistical Cluster and Limit Points of a Sequence of Fuzzy Numbers”, Vol 23, No. 1, 2016.

6. KAYNAKLAR

[1] Puri M., Ralescu D., 1983, Differential and fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.

[2] Kaleva O., 1987, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 24,301-317.

[3] Bede B., Gal S.G., 2005, Generalizations of differentiability of fuzzy number valued Functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 151,581 -599.

[4] Bede B., Rudas I.J., Bencsik A.L., 2007, First order linear fuzzy differential equations Under generalized differentiability, Inform. Sci., 177, 1648-1662.

[5] Khastan A., Bahrami F., Ivaz K., 2009, New results on multiple solutions for n-th order fuzzy differential equations under generalized differentiability, Boundary Value Problems, Article ID 395714, 2009.

[6] Akın O., Oruç O., 2012, A prey predator model with fuzzy initial values, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41(3), 387-395.

[7] Akın O., et al., 2013, An algorithm fort he solution of second order fuzzy initial value problems, Expert Systems with Applications, 40, 953-957.

[8] Gal S. G., 2000, Approximation theory in fuzzy setting, in: G.A. Anastassiou (Ed.), Handbook of Analytic- Computational Methods in Applied Mathematics, 617-666.

[9] Wu C., Gong Z., 2001, On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions I, Fuzzy Sets and Systems, 120, 523-532.

[10] Chalco-Cano Y., Roman-Flores H., 2006, On the new solution fuzzy differential equations, Chaos, Solutions and Fractals, 38, 112-119.

[11] Steinhaus H., Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74, 1951.

[12] Fast H., 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

[13] Schoenberg I., J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[14] Salat T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca,30, 139-150.

[15] Fridy J.A., 1985, On statistical convergence, Analysis 5, 301-313.

[16] Connor J.S., 1988, The statistical and strong P-Cesaro convergence of sequences,

Analysis, 8, 47-63.
[17] Connor J.S., 1989, On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32, 194-198.
[18] Kline J.L., 1995, Statistical Convergence and Densities Gnerated by Sequences of Measures, Ph.D. Thesis, Ohio University, USA.
[19] Erdös P., Tenebaum, G., 1989, Sur les densities de certaines suites d'entries, Proc. London Math. Soc., 50, 417-438.
[20] Miller H.I., Orhan C., 2001, On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungary, 93 (1-2), 135-151.
[21]Mamedov M.A., Pehlivan S., 2000, Statistical convergence of optimal pahts., Math. Jap.,52(1), 51-55.
[22] Pehlivan S., Mamedov M.A., 2000, Statistical cluster point and turnpike, Optimization, 48, 93-106.
[23] Duman O., Orhan C., 2004, μ -statistically convergent function sequences, Czech. Math. J., 54(2), 413-422.
[24] Fridy J.A., 1993, Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1187-1192.
[25] Fridy J.A., Orhan, C., 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer.Math. Soc., 125, 3625-3631.
[26] Matloka M.,1986, Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37.
[27] Nanda S., 1989, On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33, 123-126.
[28] Nuray F., Savaş E., 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273.
[29] Nuray F., 1998, Lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 99(3), 353-355.
[30] Savaş E., On statistically convergent sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 137, 277-282, 2001.
[31] Kwon J.S., 2000, On statistical and p -cesaro convergence of fuzzy numbers, Korean J.C.A.M., 9 (3), 95-203.
[32] Kwon J.S., Shim, H.T., 2001, Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 123, 85-88.
[33] Aytar S.,2004, Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 165, 129 -138.

[34] Aytar S., Pehlivan S., 2006,Statistically monotonic and statistically bounded sequencesof fuzzy numbers, Inf. Sci., 176, 734-744.
[35] Aytar S., Mamedov M.A., Pehlivan S., 2006, Statistical limit inferior and limit superior For sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157, 976-985.
[36] Mursaleen M., 2000, λ-Statistical Convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115.
[37] Savaş E., 2000, On strongly λ-summable sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci. 125, 181-186,
[38] Chang S.S.L., Zadeh L.A., 1972, On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.
[39] Diamond P., Kloeden P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets, Theory and Applications, Word Scientific, Singapore.
[40] Benli F.B., Tuncer A.N., 2007, "Lambda-Statistical Limit Points Of The Sequences Of Fuzzy Numbers", Information Sciences, 3297-3304.
[41] Benli F.B., 2014, "Relations Between Lambda-Statistical Limit İnferior And Limit Superior For Sequences Of Fuzzy Numbers", International Journal Of Modeling and Optimization, 4, 321-325.
[42] Benli F.B., 2013, "Lambda-Statistical Limit İnferior And Limit Superior For Sequences Of Fuzzy Numbers", International Journal Of Modeling and Optimization, 3, 307-310.
[43] Kuznetsov V.A., Makalkin I.A., Taylor M.A., Perelson A.S., 1994, Nonlinear Dynamics Of immunogenictumors: parameter estimation and global bifurcation analysis, Bull. Math. Biol. 56 (2), 295– 321.
[44] Gatenby R.A., 1995, Models of tumor host interaction as Competing populations: İmplications for tumor biology and treatment, J. Theor. Biol. 176, 447–455.
[45] Michelson S., Leith J.T., 1995, A theoretical explanation of concomitant resistance, Bull. Math. Biol. 57 (5), 747–773.
[46] Bajzer Z., Marusic M., Vuk-Pavlovic S., 1996, Conceptual frameworks for mathematical modeling of tumor growth dynamics, Math. Comput. Model. 23 (6), 31–46.
[47] Kirschner D., Panetta J.C., 1998, Modeling immunotherapy of the tumor–immune interaction, J. Math. Biol. 37, 235–252.
[48] de Pillis L.G., Radunskaya A.E., 2001, A mathematical tumor model with immune Resistance and drugtherapy: an optimal control approach, J. Theor. Med. 3, 79–100.
[49] de Pillis L.G., Radunskaya A.E., Wiseman C.L., 2005, A validated mathematical model of cell mediated immune response to tumor growth, CancerRes. 65 (17), 7950–7958.

[50] Sarkar R.R., Banerjee S., 2005, Cancer self remission and tumor stability—a stochastic approach, Math. Biosci. 196 (1), 65–81.
[51] de Pillis L.G., Gu W., Radunskaya A.E., 2006, Mixed immunotherapy and chemotherapy Of tumors: modeling applications and biological interpretations, J. Theor. Biol. 238 (4), 841 862.
[52] Michelson S., Leith J.T., 1991, Autocrine and paracrine growth factors in tumor growth:a mathematical model, Bull. Math. Biol. 53 (4), 639–656.
[53] Michelson S., Leith J.T., 1993, Growth factors and growth control of heterogeneouscell populations, Bull. Math. Biol. 55 (5) 993–1011.
[54] Michelson S., Leith J.T., 1994, Dormancy, regression, andrecurrence: towards a unifying heory of tumor growth control, J. Theor. Biol. 169 (4), 327–338.
[55] Michelson S., Leith J.T., 1997, Positive feedback and angiogenesis in tumor growth control, Bull. Math. Biol. 59 (2), 235–254.
[56] Spratt J.A., vonFournier D., Spratt J.S., Weber E.E., 1992, Decelerating growth and Human Breast cancer, Cancer 71, 2013–2019.
[57] Liu B., Zhang L., 2009, Dynamics of a two-species Lotka-Volterra competition system in A polluted environment with pulse toxicant in pult, Applied Mathematics and Computation, 214(1), 155-162.
[58] Lacitignola D., Tebaldi C., 2005, Effects of ecological differentiation on Lotka-Volterra systems for species with behavioral adaptation and variable growth rates, Mathematical Biosciences, 194 (1), 95-123.
[59] Chenand Y., Zhou Z., 2003, Stable periodic solution of a discrete periodic LotkaVolterra competition system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277 (1), 358-366.
[60] Bozkurt F., 2014, A Mathematical Model of the brain tumor GBM and IS Interaction, International Journal of Mathematics and Computation, 22(1), 58-65.