T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POPÜLASYON MODELLERİNDE DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
Fatma BOZKURT

Tezi Yöneten
Prof.Dr. İlhan ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Temmuz 2010
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POPÜLASYON MODELLERİNDE DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
Fatma BOZKURT

Tezi Yöneten
Prof.Dr. İlhan ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Bu çalışma Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından FBD-09-807 kodlu proje ile desteklenmiştir

Temmuz 2010
KAYSERİ

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK danışmanlığında **Fatma BOZKURT** tarafından hazırlanan **"Popülasyon Modellerinde Diferensiyel ve Fark Denklemleri için Kararlılık Analizi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

13/07/2010

Jüri:

Başkan: Prof. Dr. Ömer AKIN

Üye : Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 10/08/2010....tarih ve ..2010/28-07 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

10/08.2010.

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Popülasyon Modellerinde Diferensiyel ve Fark Denklemleri için Kararlılık Analizi" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof.Dr. İlhan Öztürk ve Sayın Prof.Dr. Fuat GÜRCAN'a teşekkür ederim.

Tez konum ile ilgili yurt içi ve yurt dışı çalışmalarımı desteklemek amacıyla maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve verdikleri burstan dolayı çalışmalarımı aksatmadan yürütmemi sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca ve özellikle de tez çalışmam esnasında bana her zaman destek veren, beni sabırla dinleyen ve yol gösteren, bana eleştirel düşünce yapısı kazandıran değerli hocam ve ağabeyim Cihangir BOZKURT'a ve tez çalışmalarım boyunca onunla az vakit geçirmemi anlayışla karşılayan biricik yeğenim Ali Hasan BOZKURT'a sonsuz teşekkür ederim.

POPÜLASYON MODELLERİNDE DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

Fatma BOZKURT
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Temmuz 2010
Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu tezin amacı, belirli koşullar altında oluşturulan lojistik diferensiyel denklemleri birer popülasyon modeli olarak ele almak ve bu denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışlarını incelemektir. Ayrıca, düşük yoğunluktaki popülasyonun mevcut olduğu modellerde Allee etkisinin önemini tespit etmek olmuştur. Birinci bölümde lojistik diferensiyel denklemler ve bu tip denklemlerin modellenmesi ile ilgili kısa bir tarihçe verilmiştir.

İkinci bölümde, fark ve diferensiyel denklemler ile bunların kararlılık teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümün alt kısımlarında, bir lojistik diferensiyel denklem oluşturulmuş, bu denklemin çözümlerinin yerel davranışları incelenmiştir. Ayrıca, bu denklem Euler ve Runge-Kutta metotları kullanılarak fark denklemlerine dönüştürülmüş, çözümlerinin yerel kararlılığı incelenerek elde edilen sonuçlar anılan diferensiyel denklemin çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, $\alpha, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ ve r pozitif reel sayılar, $[\![t]\!]$, $t \in [0, \infty)$ için t'nin tam değeri ve t zamanı göstermek üzere;

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x([\![t]\!]) - \beta_1 \cdot x([\![t-1]\!])\}$$

ve

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{r(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])) + \gamma_1 x([t]) + \gamma_2 x([t-1])\}$$

diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları Allee etkili ve Allee etkisiz olmak üzere tespit edilmiş, bulgular grafiklerle gösterilmiştir.
Son bölümde, zamana göre gecikmeli (delay) lojistik diferensiyel denklemler ile ilgili belirli temel tanım ve teoremler verilmiş, α, β bilinen pozitif reel sayılar, $r, \gamma \in R - \{0\}$ ve $\tau > 0$ gecikme zamanı olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)$$

ve

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t)$$

diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları Allee etkili ve Allee etkisiz olmak üzere tespit edilmiş, bulgular grafiklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lojistik diferensiyel denklem, fark denklem; yerel asimptotik kararlılık; global asimptotik kararlılık; Allee etkisi.

STABILITY ANALYSIS FOR DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS IN POPULATION MODELS

Fatma BOZKURT
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Science
PhD Thesis, July 2010
Thesis Supervisor: Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

ABSTRACT

The purpose of this thesis, which consists of four chapters, is to examine some logistic equations under spesific conditions as several population models and to investigate the local and global behavior of solutions for these equations. In addition, our goal is to show the importance of models whose population density are low.

The first chapter presents, briefly, the history of logistic differential equations and their modelling.

The second chapter illustrates fundamental definitions and theorems about difference and differential equations and explains their stability theory. In the sub sections of this chapter a logistic differential equation has been produced and it has been applied to examine the local behavior of the solutions of this equation. Euler and Runge-Kutta methods has been applied to this equation and difference equations have been obtained. The local stability of solutions of these difference equations have been investigated and the results have been compared with the solutions of the differential equation.

In the third chapter, we examine the behaviors of the solutions of the equations

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x([\![t]\!]) - \beta_1 \cdot x([\![t-1]\!])\}$$

and

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left\{r\left(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])\right) + \gamma_1 x([t]) + \gamma_2 x([t-1])\right\}$$

with and without Allee effect, where $\alpha, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ and r are positive real numbers, $[\![t]\!]$ denotes the integer part of $t \in [0, \infty)$ and t defines the time. The graphical presentation of these results have been provided.

The last chapter gives fundamental definitions and theorems about delay logistic differential equations. It illustrates the local and global behavior of the differential equations

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)$$

and

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t)$$

with and without Allee effect, where α, β are known real numbers, $r, \gamma \in R - \{0\}$ and $\tau > 0$ is delay time. The results have been presented graphically.

Key words: logistic differential equation; difference equation; local asymptotic stability; global asymptotic stability; Allee effect.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY i
TEŞEKKÜR.....ii
ÖZET iii
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLER LİSTESİ ix
1. BÖLÜM
GİRİŞ 1
2. BÖLÜM
DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR VE UYGULAMALAR 11
2.1. Diferensiyel Denklem Ve Fark Denklem Kavramı.....11
2.2. Bir Lojistik Diferensiyel Denklemin Çözümünün Analizi 18
2.3. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin İleri Euler Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi 22
2.4. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin Geri Euler Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi 29
2.5. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin Runge-Kutta Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi.....36
2.6. Genel Değerlendirme 52
3. BÖLÜM
SABİT KATSAYILI VE TAM DEĞER FONKSİYONLU LOJİSTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ.....58
3.1. Fark Denklemin Kararlılık Analizi İle İlgili Bazı Tanım Ve Teoremler 58
3.2. $\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x([\![t]\!]) - \beta_1 \cdot x([\![t-1]\!])\}$ Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi.....63
3.2.1. Yerel Kararlılık Analizi.....65
3.2.2. Çözümlerin Sınırlılığı Ve Yarı Devir Uzunlukları.....77
3.2.3. Pozitif Denge Noktasının Global Asimptotik Kararlılığı 89
3.2.4.(3.2.1) Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde

Allee Etkisi 93
3.2.5. Kesim 3.2 İçin Genel Değerlendirme.....101
3.3. $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{r(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])) + \gamma_1 x([t]) + \gamma_2 x([t-1])\}$
Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi 102
3.3.1. Yerel Kararlılık Analizi.....104
3.3.2. Çözümlerin Sınırlılığı Ve Yarı Devir Uzunlukları.....120
3.3.3. Pozitif Denge Noktasının Global Asimptotik Kararlılığı 135
3.3.4. (3.3.1) Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi 139
3.3.5. Kesim 3.3 İçin Genel Değerlendirme.....148
4. BÖLÜM
ZAMANA GÖRE GECİKMELİ (DELAY) LOJİSTİK
DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ.....150
4.1. Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi İle İlgili Bazı Tanım Ve Teoremler 150
4.2. $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)$ Diferensiyel
Denkleminin Kararlılık Analizi.....155
4.2.1. Yerel Ve Global Kararlılık Analizi 155
4.2.2. (4.2.1) Diferansiyel Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi 180
4.2.3. Kesim 4.2 İçin Genel Değerlendirme.....202
4.3. $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t)$ Diferensiyel Denkleminin
Kararlılık Analizi 204
4.3.1. Yerel Ve Global Kararlılık Analizi 205
4.3.2. (4.3.1) Diferansiyel Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi 228
4.3.3. Kesim 4.3 İçin Genel Değerlendirme.....250
KAYNAKLAR 252
ÖZGEÇMİŞ 261

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.2.1. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5,\ \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.2.1) diferensiyel denklemin çözümünün grafiği 21

Şekil 2.2.2. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.2.1) diferensiyel denklemin çözümünün grafiği 22

Şekil 2.3.1. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği 26

Şekil 2.3.2. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği 27

Şekil 2.3.3. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği 28

Şekil 2.3.4. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 3.5, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği 29

Şekil 2.4.1. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği 33

Şekil 2.4.2. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği 34

Şekil 2.4.3. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği 35

Şekil 2.4.4. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2.5, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği 36

Şekil 2.5.1. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -2, h = 1.6$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği.....41

Şekil 2.5.2. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9, h = 1.6$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği.....44

Şekil 2.5.3. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.5, h = 5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği.....47

Şekil 2.5.4. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9, h = 5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği.....51

Şekil 3.2.1. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.6,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 69

Şekil 3.2.2. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.4,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 70

Şekil 3.2.3. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.4,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 74

Şekil 3.2.4. $\alpha = 2,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ r = 0.25,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 78

Şekil 3.2.5. $\alpha = 3,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.2,\ r = 0.9,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 79

Şekil 3.2.6. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 81

Şekil 3.2.7. $\alpha = 0.1,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.5,\ x(0) = 0.8$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 82

Şekil 3.2.8. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 1.88,\ r = 2,\ x(-1) = 0.7,\ x(0) = 0$ değerleri için (3.2.104) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 90

Şekil 3.2.9. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ için (3.2.104) fark denklemin çözümlerinin çatallanması.....91

Şekil 3.2.10. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.117) fark denklemin çözümlerinin çatallanması.....94

Şekil 3.2.11. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.124) fark denklemin çözümlerinin çatallanması.....96

Şekil 3.2.12.(a) $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 0.8,\ \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.129) fark denklemin çözümlerinin çatallanması.....98

Şekil 3.2.12.(b) $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 0.8,\ \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.130) fark denklemin çözümlerinin çatallanması.....99

Şekil 3.3.1. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.6,\ \gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.9,\ r = 0.9,$ $x(-1) = 3$ ve $x(0) = 7$değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....108

Şekil 3.3.2. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 3,\ \beta_1 = 2, \gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 3, r = 3.2, x(-1) = 3.5$ ve $x(0) = 4.5$ ve $x(0) = 7$değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....112

Şekil 3.3.3. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 3.5, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 3, r = 1.61,\ x(-1) = 5.5$ ve $x(0) = 4.85$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 117

Şekil 3.3.4. $\alpha = 0.5,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ \gamma_1 = 0.02, \gamma_2 = 0.03, r = 0.25,$ $x(-1) = 0.2$ ve $x(0) = 1$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....121

Şekil 3.3.5. $\alpha = 0.5,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ \gamma_1 = 0.02, \gamma_2 = 0.03,\ r = 0.25,$ $x(-1) = 4$ ve $x(0) = 2.5$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....122

Şekil 3.3.6. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği 124

Şekil 3.3.7. $\alpha = 2,\ \beta_0 = 3,\ \beta_1 = 2,\ r = 0.4, x(-1) = 1,\ x(0) = 2$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....125

Şekil 3.3.8. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.4,\ \gamma_2 = 0.7, r = 0.8,$ $x(-1) = 3.5, x(0) = 3.6$ değerleri için (3.3.128) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği.....136

Şekil 3.3.9. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,$ $x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ için (3.3.128) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması 137

Şekil 3.3.10. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002, x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,7]$ olmak üzere (3.3.140) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması 141

Şekil 3.3.11. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002, x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.145) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması.....143

Şekil 3.3.12.(a) $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002, x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.150) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması.....145

Şekil 3.3.12.(b) $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,$ $x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.151) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması.....146

Şekil 4.2.1.(a) $\tau = 0.5,\ r = -4.712388,\ \alpha = 0.05,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -6$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 159

Şekil 4.2.1.(b) $\tau = 0.5,\ r = -4.712388,\ \alpha = 0.05,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -6$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 160

Şekil 4.2.2.(a) $\tau = 0.5, r = -4.712388, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = -8$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 161

Şekil 4.2.2.(b) $\tau = 0.5, r = -4.712388, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = -8$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin

çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....162

Şekil 4.2.3.(a) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 163

Şekil 4.2.3.(b) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 164

Şekil 4.2.4.(a) $\tau = 0.5, r = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....165

Şekil 4.2.4.(b) $\tau = 0.5, r = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 166

Şekil 4.2.5.(a) $\tau = 0.5, r = -4.712388975, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 167

Şekil 4.2.5.(b) $\tau = 0.5, r = -4.712388975, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği..168

Şekil 4.2.6.(a) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin

çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 170

Şekil 4.2.6.(b) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği..171

Şekil 4.2.7.(a) $\tau = 0.5, r = 1.570796, \alpha = 0.005, \beta = 0.0003, \gamma = -1.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 0.62$ ve $x(-\tau) = 3$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 173

Şekil 4.2.7.(b) $\tau = 0.5, r = 1.570796, \alpha = 0.005, \beta = 0.0003, \gamma = -1.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 0.62$ ve $x(-\tau) = 3$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 174

Şekil 4.2.8.(a) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 177

Şekil 4.2.8.(b) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği. 177

Şekil 4.2.9.(a) $\tau = 0.5, r^* = 6.664323027642, \alpha = 0.5, \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.01 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$

olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....182

Şekil 4.2.9.(b) $\tau = 0.5, r^* = 6.664323027642,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.01 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 182

Şekil 4.2.10.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5, \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....183

Şekil 4.2.10.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....184

Şekil 4.2.11.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5.2,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....185

Şekil 4.2.11.(b) $\tau = 0.5, r^* = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 185

Şekil 4.2.12.(a) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1,$ p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 187

Şekil 4.2.12.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1,$ p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ için (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 188

Şekil 4.2.13.(a) $\tau = 0.5, r^* = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1.5, p = 0.1$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....191

Şekil 4.2.13.(b) $\tau = 0.5,\ r = 0.04,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma = -1.5,\ p = 0.1$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....192

Şekil 4.2.14.(a) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....193

Şekil 4.2.14.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91)

diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....194

Şekil 4.2.15.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5.2,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 195

Şekil 4.2.15.(b) $\tau = 0.5, r^* = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 196

Şekil 4.2.16.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = 1,$ p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....197

Şekil 4.2.16.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1,$ p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 198

Şekil 4.2.17.(a) $\tau = 0.5, r^* = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1.5, p = 0.001$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....199

Şekil 4.2.17.(b) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5, p = 0.001$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....200

Şekil 4.3.1.(a) $\tau = 0.5,\ r = -5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....208

Şekil 4.3.1.(b) $\tau = 0.5, r = -5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ için (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....209

Şekil 4.3.2.(a) $\tau = 0.5,\ r = -7,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....210

Şekil 4.3.2.(b) $\tau = 0.5,\ r = -5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....211

Şekil 4.3.3.(a) $\tau = 0.5, r = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = 1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin

zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....212

Şekil 4.3.3.(b) $\tau = 0.5, r = 5,\ \alpha = 1.2, \beta = 0.2,\ \gamma = 1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 213

Şekil 4.3.4.(a) $\tau = 0.5, r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....214

Şekil 4.3.4.(b) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 215

Şekil 4.3.5.(a) $\tau = 0.5,\ r = -5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 216

Şekil 4.3.5.(b) $\tau = 0.5, r = -5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3, \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 217

Şekil 4.3.6.(a) $\tau = 0.5, r = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = -1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği.....219

Şekil 4.3.6.(b) $\tau = 0.5,\ r = 4,\ \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = -1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$

olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 220

Şekil 4.3.7.(a) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = 3$ ve $x(0) = 2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği ..222

Şekil 4.3.7.(b) $\tau = 0.5, r = 5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3, \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = 3$ ve $x(0) = 2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 223

Şekil 4.3.8.(a) $\tau = 0.5, r = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = -0.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 225

Şekil 4.3.8.(b) $\tau = 0.5,\ r = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = -0.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 226

Şekil 4.3.9.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 230

Şekil 4.3.9.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9,\ p = 0.5$ ve

$x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 231

Şekil 4.3.10.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 232

Şekil 4.3.10.(b) $\tau = 0.5, r^* = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 233

Şekil 4.3.11.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ için (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 235

Şekil 4.3.11.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 236

Şekil 4.3.12.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 239

Şekil 4.3.12.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği.....240

Şekil 4.3.13.(a) $\tau = 0.5, r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 241

Şekil 4.3.13.(b) $\tau = 0.5, r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9, p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ için (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 242

Şekil 4.3.14.(a) $\tau = 0.5, r^* = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 243

Şekil 4.3.14.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(t-\tau) = x(t) = 0.9$ için (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 244

Şekil 4.3.15.(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9, p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel

denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 245

Şekil 4.3.15.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 246

Şekil 4.3.16.(a) $\tau = 0.5, r^* = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği 247

Şekil 4.3.16.(b) $\tau = 0.5, r^* = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği 248

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İlk popülasyon modeli Fibonacci tarafından tasarlanmıştır. Fibonacci,

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1), \qquad F(1) = F(2) = 1, \quad n = 2,3,\ldots \tag{1.1}$$

ikinci mertebeden bir fark denklemi oluşturarak tavşanların popülasyonunu incelemek istemiştir. Bu modelde Fibonacci, tavşanların hiç ölmediğini, her ay bir dişi tavşanın bir dişi ve bir erkek olmak üzere çift yavruladığını kabul etmiştir. Gerçeğe pek uymayan bu modelleme biyolojik çalışmalara katkı sağlayan ilk çalışma olması bakımından önemli olarak kabul edilmektedir [1-3].

Euler [4] ve daha sonraki yıllarda da Babbage'ın [5,6] sonlu fark analizi ile ilgili yaptıkları çalışmalar, diferensiyel denklemler ve fark denklemler arasında bağlantı kuracak ilk adımlar olarak düşünülebilir. Böylece Δ fark operatörü kullanılarak fark denklemlerin ifade ediliş şekli kolaylaşmıştır.

1801-1825 yıllarında Gompertz, $V(t)$ tümör'ün büyüklük ölçüsü (yoğunluğu, kütlesi vs.), $r(t)$ büyüme katsayısı, α büyümeyi engelleyen veya geciktiren katsayı ve β 'da tümör yoğunluğunun küçülmesini ifade eden bir parametre olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = r(t) \cdot V(t), & V(0) = V_0 \\ \frac{dr(t)}{dt} = \alpha \cdot r(t), & r(0) = \beta \end{cases} \tag{1.2}$$

şeklinde tümör hücresinin popülasyon modelini diferensiyel denklem sistemi şeklinde oluşturmuştur [7,8].

1826-1850 yıllarında Verhulst, bir popülasyon modelinde bir önceki kuşağın bir sonrakini etkilediğini vurgulamak amacıyla

$$P(t+1) = r \cdot P(t) \tag{1.3}$$

fark denklemini incelemiştir. Burada t zamanı, $P(t)$, t anındaki popülasyon büyüklüğünü, $P(t+1)$, t+1 anındaki popülasyon büyüklüğünü ve r de Malthusian katsayısı olarak bilinen büyüme katsayısını ifade etmektedir. Bu model incelendiğinde, besini her zaman kendisine yeterli olan, avlanma durumuyla hiçbir zaman karşı karşıya kalmayan ve ölmeyen (kütlesi azalmayan) bir tür için geçerli olabileceği görülmektedir. Verhults'un bu modeli geliştirilerek, bir popülasyonun bulunduğu ortamda o popülasyonu taşıyabileceği kapasitenin de önemli olmasından dolayı, lojistik denklem olarak bilinen

$$P(t+1) = r \cdot P(t)\frac{(K-P(t))}{K} \tag{1.4}$$

denklemi oluşturulmuştur. Bu popülasyon modelinde, türün artışı ancak K kapasiteye kadardır. Bu tür modeller, yoğunluğa bağlı popülasyon modelleme mekanizmalarında oldukça önem kazanmaktadır [9-11].

Lojistik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelemek amacıyla farklı metotlar geliştirilmiştir. Burada, bir popülasyon için diferensiyel denklemin uygun modellenmesiyle çözümünün davranışını irdeleyebilmek için çeşitli yöntemler uygulanmaya çalışılmıştır. Bu doğrultuda ilk aşamada en basit yapılı tek parametreli lojistik diferensiyel denklemin çözümü ile uyumluluğu muhtemel kabul edilen metotlar irdelenmiştir. Bu çalışmalar içerisinde en dikkat çekici metotlar arasında Euler Geri Fark (**Backward difference**), İleri Fark (**Forward Difference**) ve Runge-Kutta metotlarıdır.

$$\dot{u} = f(\lambda, u), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \;\; u_0 = u(0) \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

başlangıç değer problemi Orta Nokta Euler metodu ile incelendiğinde bu yapının, diferensiyel denklemin kritik noktalarından farklı olarak hayali (spurious) kritik noktalar ürettiği tespit edilmiştir [12]. Başlangıç koşulunun ve λ parametresinin yapısına bağlı olarak söz konusu diferensiyel denklemin çözümü kritik noktalardan birine yaklaşırken, Orta Nokta Euler metodunun bu denkleme uygulanmasıyla yeni denklemin çözümlerinin aynı koşullar altında hayali bir kritik noktaya yaklaştığı görülmüştür. Yine [13-15], yapılan bir çok çalışmada diferensiyel denkleme İleri Fark yöntemi uygulandığında oldukça küçük $h \leq h_0$ adımlarda hem diferensiyel denklem hem de elde edilen yeni denklemin çözümleri aynı denge noktasına yakınsarken, $h > h_0$ olması durumunda diferensiyel denklemin çözümü kararlı, ancak İleri Fark ile elde edilen denklemin çözümlerinin kararsız olduğu tespit edilmiştir.

Geri Fark metodu yukarıda anılan diferensiyel denklemin çözümlerinin kararlılık analizi için daha uygun özelliklere sahip olmasına karşın, bazı durumlarda diferensiyel denklemin kararsız çözümleri bu metotla kararlı davranışlar göstermektedir.

Yukarıda izah etmeye çalıştığımız gibi fark yöntemleri lineer diferensiyel denklemlerin kararlılığını incelemek için geliştirilmiş yöntemler olduklarından lineer olmayan diferensiyel denklemlere uygulandıklarında, cevaplanması gereken soruları ve problemleri de beraberinde getirmektedir [12-20].

K. Grote ve R. Meyer-Spasche [21], bu metotlarla birlikte Runge-Kutta metodunu tek parametreli bir lojistik diferensiyel denklemine uygulamışlar, elde edilen sonuçları nümerik ve grafiksel olarak yorumlamışlardır. Buna göre, oldukça basit yapıdaki lojistik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelemek amacıyla Geri Fark, İleri Fark ve Runge-Kutta metotlarının kullanılmasında denklemin çözümleri hakkında belirli fikirler elde edilirken, çözümlerin global davranışlarının analizinde bu metotların yetersiz kaldıkları tespit edilmiştir.

Lojistik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin analizi için geliştirilen bir başka modelleme de t zamanı temsil etmek üzere, denklemin $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ değişkeni ve $t \in \mathbb{N}$

değişkeni cinsinden ifade edilen popülasyon fonksiyonlarını aynı anda içerecek şekilde oluşturulan modellemelerdir.

Buna örnek olarak

$$r > 0,\ a_0, a_1, \dots, a_m \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=0}^{m} a_j > 0 \tag{1.6}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t)\{1 - \sum_{j=0}^{m} a_j\, N([\![t-j]\!])\},\ t \geq 0,\ m \geq 1 \\ N(0) = N_0 > 0,\ N(-j) = N_{-j} \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{1.7}$$

tam değer fonksiyonlu lojistik diferensiyel denklemi gösterilebilir [22]. Burada, $r < \frac{\log 2}{m+1}$ olduğunda (1.7) denkleminin

$$N(n+1) = N(n)e^{r\left\{1 - \sum_{j=0}^{m} a_j N(n-j)\right\}},\ n = 0, 1, \dots \tag{1.8}$$

şeklindeki çözümünün pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu ispatlanmıştır. Aynı denklem J.W.H. So ve J.S. Yu tarafından da incelenmiş ve $r < \frac{3}{2(m+1)}$ iken (1.8) denklemin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir [23]. Yine aynı denklem Y. Muroya [24] tarafından,

$$a_0 > \sum_{j=0}^{m} a_j, \qquad 0 < r \leq 1 \tag{1.9}$$

olmak üzere

$$|N(n+1) - \overline{N}| \leq \max_{0 \leq j \leq m} |N(n-j) - \overline{N}| \tag{1.10}$$

formunda ele alınmış ve (1.7) denklemin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelenmiştir. Y. Muroya [25-26] tarafından geliştirilen bu çalışmalara benzer çalışmaların W. Wang tarafından da yapıldığı görülmektedir [27]. G. Seifert ise [28]'de (1.7) denkleminin özel olarak m=1 durumunu ele almış ve $a \geq 0$ olmak üzere $0 < \frac{a_1}{a_0} < a$ ise $r < 2$ koşulu altında denklemin pozitif denge noktasının global

asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. K. Uesugi ve arkadaşları (1.7) diferensiyel denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili yeni ilave yeter koşullar tespit etmişlerdir [29].

Ayrıca, başka çalışmalarda [30-36], r ve b pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t)\{1 - bN([\![t]\!])\}, \ \ t > 0, \\ N(0) = N_0 > 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

diferensiyel denklemin çözümlerinin kararlılığı ve salınımlılığı belirli koşullar altında incelenmiştir. K. Gopalsamy, (1.11) diferensiyel denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşulun $r \leq 2$ olduğunu ispatlamıştır [37]. Yine K. Gopalsamy, $V(n) = (x(n) - \bar{x})^2$ olacak şekilde uygun bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayarak (1.11) denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir [38]. Y. Muroya ve Y. Kato [39], (1.11) denklemini geliştirerek r, a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t)\{1 - aN(t) - bN([\![t]\!])\}, \ \ t > 0, \\ N(0) = N_0 > 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

başlangıç değer problemini oluşturmuşlar ve bu problemin global kararlılığı üzerine çalışmışlardır. Y. Muroya, $r(t)$, $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyon, $r(t) \not\equiv 0, \sum_{j=0}^{m} b_j > 0$ ve $a + b_0 > \sum_{j=1}^{m} b_j$ olmak üzere n=0, 1, …. için

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r(t) \cdot N(t)\left\{1 - aN(t) - \sum_{j=0}^{m} b_j N(n-j)\right\}, \ \ n \leq t < n+1, \\ N(0) = N_0 > 0, \ \ N(-j) = N_{-j} \geq 0, \ \ j = 1, 2, \dots, m, \quad m \geq 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

başlangıç değer problemin çözümlerinin global davranışlarını incelemiştir [40].

Yine Y. Muroya [41], $r(t)$, $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli fonksiyon, $r(t) \not\equiv 0$, $a(t) \geq 0$ ve $b(t) > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = N(t)\{r(t) - a(t)N(t) - b(t)N([\![t]\!])\}, \ n \leq t < n+1, \\ N(0) = N_0 > 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

başlangıç değer problemin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı için yeter koşul araştırmıştır.

J.H. Shen ve I.P. Stavroulakis [42], $a(t), b(t) \in [-1, \infty)$ ve $b(t) \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y(t) + b(t)y([\![t-1]\!]) = 0 \tag{1.22}$$

tam değer fonksiyonlu lojistik diferensiyel denkleminin salınımlılığını incelemişlerdir. Benzer çalışmalar [43-46]'de görülmektedir.

Bu tür çalışmalara ilave olarak kararsız dış etkenler dikkate alındığında

$$x_i(k+1) = x_i(k)\exp\left\{r_i(k)\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_{ij}^{l}(k)x_j(k-l)\right\}, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{1.23}$$

olacak şekilde yeni bir popülasyon modeli oluşturulmuştur [47]. Burada, $x_i(k)$, k. jenerasyonun i. popülasyondaki yoğunluğu, $r_i(k)$, k. jenerasyonun i. popülasyondaki esas büyüme oranı, $a_{ij}(k)$, i. popülasyonu üzerinde j. popülasyonun (k-l). jenerasyondaki etkisinin ölçümüdür. Bu modelin bir özel hali olan birbirini etkileyen popülasyonlar ve alt popülasyonların kararlılık analizi [48]'de görülebilir.

Z. Luo ve J. Shen [49], (1.22) denklemini genelleştirerek

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x(t) + b(t)x([\![t-k]\!]) = 0 \tag{1.24}$$

diferensiyel denklemin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili yeni kriterler belirlemişlerdir.

Popülasyon modelleri için önemli bir çalışma da 1931 yılında yapılmıştır. Burada Allee [50], düşük yoğunlukta popülasyon büyüme oranı üzerinde durmuştur. Her ne kadar lojistik popülasyon modellerinde yoğunluk ile birlikte birim büyüme oranının da monoton azaldığı görülse de laboratuvar çalışmaları düşük yoğunluktaki

popülasyonlarda birim popülasyon oranının önce artış gösterdiği, maksimum değere ulaştığı ve daha sonra tekrar azaldığını göstermiştir [51]. Buna ilave olarak bir çok teorik çalışma Allee etkisinin düşük yoğunlukta önemli olduğunu göstermektedir [52-61].

C. Çelik ve arkadaşları [62]'de

$$N_{t+1} = F(N_t, N_{t-1}) \tag{1.25}$$

şeklindeki bir popülasyon modelinin yerel davranışlarını Allee etkisiz ve Allee etkili incelemişler, elde edilen sonuçları nümerik simulasyonlarla da desteklemişlerdir.

Bir popülasyon modelinin çalışabilir ve elde edilen sonuçların kabul edilebilir olması için popülasyonun üreme döneminin önemli olduğu açıktır. Bu nedenle, popülasyonun t birim zamanda değişiminin dışında üreme evresine ait τ geçmiş birim zamanın da popülasyon değişiminde etkili olduğu kanaatine varılmıştır. Bunlar dikkate alınarak yapılan modellemelerde t ve τ'nun uygun şartlarda yer alması kaçınılmazdır. Bu konu ile ilgili olarak Hutchinson [63], r, popülasyon büyüme oranı ve K'da ortamın taşıyabileceği kapasite olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\left\{1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right\} \tag{1.26}$$

popülasyon modelini oluşturmuş ve daha sonra bu tür modellemeler üzerinde bir çok çalışmalar yapılmıştır [64-68].

Hutchinson denklemini geliştirerek daha gerçekçi ve genel bir denklem elde eden K. Gopalsamy [38], a_1, a_2 ve r pozitif sayılar olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - a_1 x(t) - a_2 x(t-\tau)\} \tag{1.27}$$

diferensiyel denklemini incelemiş ve uygun bir Lyapunov fonksiyonu oluşturarak r ve τ'ya bağlı belirli koşullar altında denklemin çözümlerinin pozitif denge noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Bu konuda bir başka çalışma , a bilinen bir parametre ve r'de bilinmeyen bir parametre olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a \cdot x(t) + r \cdot x(t-\tau)\{1 - x(t-\tau)\} \tag{1.28}$$

diferensiyel denklemin denge noktaları için yerel asimptotik kararlılık analizidir [69-73].

E.C. Pielou [74,75], r popülasyon oranı ve P'de ortamın taşıyabileceği kapasite olmak üzere

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{P}\right), \ t \geq 0 \tag{1.29}$$

diferensiyel denklemini ve ayrık (discrete) değerlerini inceleyerek denklemlerdeki salınımlılığın popülsayonun kendisinin sahip olduğu bir özellik olduğunu göstermeye çalışmıştır. Bu düşünceyi bir çok teorik çalışmada [76-79] ve laboratuvar ortamında [80] görmekteyiz.

M.P. Chen ve J.S. Yu [81], (1.29) diferensiyel denklemin daha genel hali olan

$$\dot{N}(t) = r(t)N(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau(t))}{P}\right), \ t \geq 0 \tag{1.30}$$

diferensiyel denkleminden ayrık benzerini ele alarak

$$\Delta y_n = p_n y_n \left(1 - \frac{y_{n-k_n}}{\lambda}\right) \tag{1.31}$$

fark denklemini elde etmişler ve pozitif denge noktasının kararlılığı üzerinde durmuşlardır. Zamana göre gecikmeli (delay) lojistik diferensiyel denklemin salınımlılığı ve kararlılık analizi ile ilgili çalışmalara [82-85]'te raslanmaktadır.

Allee etki ile ilgili çalışmalar delay diferensiyel denklemler için de görülmektedir [86-92]. Ö. Duman ve H. Merdan $\tau = 0$, λ büyüme oranı, N(t), t anındaki popülasyon yoğunluğu , f(N(t)) popülasyon içinde bireyler arasında oluşan çekişme ve rekabet, g(N(t)) de birbirlerine karşı zararı olan fakat aynı zamanda da birbirine muhtaç olan iki tür arasındaki ilişkinin etkisi olmak üzere

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) f\big(N(t)\big) - N(t) g(N(t)) \tag{1.32}$$

diferensiyel denklemin pozitif denge noktasının yerel kararlılık analizini ele almışlardır. (1.32) denkleme Allee fonksiyonunun uygulanması sonucunda Allee etkili ve Allee etkisiz diferensiyel denklemin çözümlerinin sonuçları mukayese edilmiş, geometriksel olarak gösterilmiştir [91] .

Bu çalışmada, belirli koşullar altında oluşturulan lojistik diferensiyel denklemler birer popülasyon modeli olarak ele alınmış, bu denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. İlave olarak, Allee etkisinin bu denklemlerin çözümlerinde oluşturduğu değişimler tespit edilmiş ve Allee etkisiz çözümlerin davranışları ile mukayeseleri yapılmıştır.

Bölüm 2'de, oluşturulan bir lojistik diferensiyel denklemin çözümlerinin yerel davranışları incelenmiş, bu denklem Euler ve Runge-Kutta metotları kullanılarak fark denklemlerine dönüştürülmüş, çözümlerinin yerel kararlılığı gözden geçirilerek elde edilen sonuçlar anılan diferensiyel denklemin çözümleri ile karşılaştırlılmıştır. Ayrıca, bu metotlarla kararlılık analizi yapılırken karşılaşılan problemler tartışılmıştır.

Bölüm 3'te ise sabit katsayılı ve tam değer fonksiyonlu yeni lojistik diferensiyel denklemleri oluşturulmuş ve bu denklemlerin çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu denklemlerin çözümlerinin global davranışlarını inceleyebilmek için diferensiyel denklemin çözümleri olan fark denklemleri göz önüne alınmış ve uygun yöntemler kullanılarak öncellikle elde edilen fark denklemlerin kararlılık analizi yapılmıştır. Böylece, elde edilen sonuçların söz konusu diferensiyel denklemlerin kararlılık yapısını karakterize ettiği tespit edilmiştir. Ayrıca, göz önüne alınan bu lojistik diferensiyel

denklemlere t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak elde edilen yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin Allee etkili yerel ve global davranışları incelenmiş, bulunan sonuçlar Allee etkisiz lojistik diferensiyel denklemlerin çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Bütün bunlar geometrik olarak gösterilmiştir.

Popülasyon modelini daha gerçekçi hale getirebilmek için delay lojistik diferensiyel denklemler oluşturulmuş ve Bölüm 4'te bu tür denklemler ele alınmıştır. Denklemin kapsadığı parametre ile başlangıç koşullarına göre diferensiyel denklemlerin denge noktalarının yerel ve global asimptotik kararlılığı araştırılmış ve varılan sonuçlar geometrik olarak gösterilmiştir. Ayrıca bunlara ilave olarak anılan lojistik denklemlere farklı t zamanları için tanımlanmış Allee fonksiyonları uygulanmış, Allee etkisi ile çözümlerde meydana gelen davranışlar tespit edilmiş ve Allee etkisiz denklemlerin çözümleri ile mukayeseleri yapılarak elde edilen bulgular grafiklerle gösterilmiştir.

2. BÖLÜM

DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR VE UYGULAMALAR

Bu bölümde diferensiyel denklemler ve fark denklemler ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilecektir. Ayrıca belirli bir lojistik diferensiyel denkleminin çözümü ile Euler metotlarından İleri Fark, Geri Fark ve Runge-Kutta yöntemlerinde elde edilen fark denklemlerinin çözümleri hem teorik hem de geometrik olarak mukayese edilecektir.

2.1. Diferensiyel Denklem Ve Fark Denklem Kavramı

Bu kısımda, bundan sonraki kısımlarda diferensiyel denklemler ve fark denklemler ile ilgili ihtiyaç duyulacak temel tanım, teorem ve çözüm yöntemleri verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Kararlılık Testi)
Bir f fonksiyonun tanım kümesinde birinci mertebeden türevi sıfır veya tanımsız yapan, yani

$$f'(x_0) = 0 \text{ veya tanımsız} \tag{2.1.1}$$

olan x_0 noktasına f fonksiyonun bir kritik noktası denir [93].

f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1.2}$$

diferensiyel denklemin kritik noktası x_0 olsun. Buna göre;

i) eğer $f'(x_0) > 0$ ise, bu taktirde kritik nokta kararsızdır.
ii) eğer $f'(x_0) < 0$ ise, bu taktirde kritik nokta kararlıdır [94] .

Tanım 2.1.2. $p(n)$ ve $q(n)$ (n=0,1,…) tanımlanmış diziler olmak üzere **birinci mertebeden lineer fark denklemi**

$$y(n+1) = p(n)y(n) + q(n) \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanır.
Özel olarak, $p(n) = 1$ olması durumunda (2.1.3) fark denklemi

$$\Delta y(n) = q(n) \tag{2.1.4}$$

şeklindedir.
$q(n) = 0$ olması durumunda, (2.1.3) denklemi **homogendir**, aksi taktirde homogen değildir [95].

Teorem 2.1.1. (Varlık ve Teklik Teoremi)
k=0,1,2,… için f tanımlı bir fonksiyon olmak üzere n. mertebeden

$$y(k+n) = f\big(k, y(k), \dots, y(k+n-1)\big) \tag{2.1.5}$$

fark denkleminin seçilen her bir keyfi $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ başlangıç koşulları için bir ve ancak bir tek çözümü karşılık gelir [96].

Tanım 2.1.3. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \times I \to I$ fonksiyonu verilmiş olsun. Birinci mertebeden

$$y(k+1) = f\big(k, y(k)\big) \tag{2.1.6}$$

fark denklemi ile birlikte $y(k_o) = y_{k_0}$ başlangıç koşulundan oluşan problemlere **başlangıç değer problemleri** denir.

(2.1.3) fark denkleminin çözümünü özel olarak $q(n) = 0$ için incelenirse, $y(0) = \alpha$ başlangıç koşulu olmak üzere $n \geq 0$ için

$$y(n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} p(k)\right)y(0) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} p(k)\right)\alpha \tag{2.1.7}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n \geq 0$ için

$$y(n+1) = p(n)y(n) + q(n), \quad y(0) = \alpha \tag{2.1.8}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} p(k)\right)\alpha + \sum_{j=0}^{n-2} q(j) \prod_{k=j+1}^{n-1} p(k) + q(n-1) \tag{2.1.9}$$

şeklindedir (2.1.3) denkleminde, $p(n) = a$ ve $q(n) = b(n)$ olması durumunda

$$y(n+1) = ay(n) + b(n)\,, \quad y(0) = y_0 \tag{2.1.10}$$

başlangıç değer problemin çözümü

$$y(n) = a^n y(0) + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b(k) \tag{2.1.11}$$

dir. Özel olarak $b(n) = b$ alındığında bu çözüm

$$y(n) = a^n y(0) + b\,\frac{1-a^n}{1-a} \tag{2.1.12}$$

şeklinde yazılabilir [97].

Tanım 2.1.4. $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ ve $s(n)$ ($n=0,1,\ldots$) tanımlanmış diziler olmak üzere **ikinci mertebeden homogen olmayan lineer fark denklemi**

$$p(n)y(n+2)+q(n)y(n+1)+r(n)y(n)=s(n) \tag{2.1.13}$$

şeklinde tanımlanır. $s(n)=0$ ise bu denkleme homogendir denir [97].

Ayrıca, $a \neq 0$, b ve c sabit sayılar olmak üzere $n \geq 0$ için

$$ay(n+2)+by(n+1)+cy(n)=0 \tag{2.1.14}$$

şeklinde sabit katsayılı ikinci merteben lineer fark denkleminin $y(n)=\alpha^n$ formunda bir çözümünün var olduğu kabul edilsin. Bu taktirde denklemin karakteristik denklemi

$$\alpha^n(a\alpha^2+b\alpha+c)=0 \tag{2.1.15}$$

formunda yazılabilir.

Eğer $\alpha=0$ ise $y(n)\equiv 0$ aşikar çözüm elde edilir. Eğer $\alpha \neq 0$ ise;

i) Karakteristik denklemin kökleri α_1,α_2 reel ve farklı olması durumunda (2.1.14) denklemin genel çözümü

$$y(n)=C_1{\alpha_1}^n+C_2{\alpha_2}^n \tag{2.1.16}$$

dir.

ii) Karakteristik denklemin kökleri α_1,α_2 reel ve eşit olması durumunda (2.1.14) denklemin genel çözümü

$$y(n)=(C_1+C_2n){\alpha_2}^n \tag{2.1.17}$$

şeklindedir.

iii) Karakteristik denklemin köklerinin $\alpha_1=\mu+i\varphi$ ve $\alpha_2=\mu-i\varphi$ gibi kompleks sayılar olması durumunda $\rho=\sqrt{\mu^2+\varphi^2}$ köklerin modülü ve θ argümanı olmak üzere (2.1.14) denklemin genel çözümü

$$y(n) = \rho^n(A_1 \cos n\theta + A_2 \sin n\theta) \tag{2.1.18}$$

dır.

Tanım 2.1.5. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f \epsilon C^1[I \times I, I]$ alınsın. n=0,1,2,… için

$$y(n+1) = f\big(y(n), y(n-1)\big) \tag{2.1.19}$$

fark denkleminde $\bar{y} = f(\bar{y}, \bar{y})$ şartını sağlayan $\bar{y} \in I$ noktasına (2.1.19) fark denklemin **denge noktası** denir [98].

Tanım 2.1.6. Lineer olmayan (2.1.19) fark denklemi $f(u, v)$ fonksiyonu şeklinde yazılsın.

$$s = \frac{\partial f(\bar{y},\bar{y})}{\partial u} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\partial f(\bar{y},\bar{y})}{\partial v} \tag{2.1.20}$$

olmak üzere

$$x(n+1) - sx(n) - tx(n-1) = 0 \tag{2.1.21}$$

denklemine (2.1.19) denkleminin $\bar{y}$ denge noktası civarındaki **lineerleştirilmiş şekli** denir [98]. (2.1.21) denklemin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.1.22}$$

şeklinde olup buna göre;

i) Eğer (2.1.22) karakteristik denklemin her iki kökü i=1,2 için $|\lambda_{1,2}| < 1$ ise, bu taktirde $\bar{y}$ denge noktasına **kararlıdır** denir.

ii) Eğer (2.1.22) karakteristik denklemin en az bir i (i=1,2) için $|\lambda_{1,2}| > 1$ ise, bu taktirde $\bar{y}$ denge noktasına **kararsızdır** denir [99].

Şimdi, Euler ve Runge-Kutta metotları ile ilgili bazı özellikler verilecektir.

f fonksiyonu xy-düzlemin açık bir D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon ve t, $t+h, t-h \in [a,b] \subset D$ olmak üzere birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{2.1.23}$$

diferensiyel denklem verilmiş olsun. **İleri Euler metodu**'nda, (2.1.23) türev ifadesi yaklaşık olarak

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \tag{2.1.24}$$

bağıntısına tekabül eder. (2.1.24) düzenlendiğinde

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t,y) \tag{2.1.25}$$

şeklinde yazılabilir. Zaman ile h adım arasındaki ilişki t_0, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, ...şeklinde olmak üzere (2.1.23) diferensiyel denklemin yaklaşık çözümü

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf\big(t_i, y(t_i)\big) \tag{2.1.26}$$

dir.

(2.1.24) bağıntısı yerine

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t)-y(t-h)}{h} \tag{2.1.27}$$

yazıldığında (2.1.23) diferensiyel denklemin çözümüne

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf\big(t_{i+1}, y(t_{i+1})\big) \tag{2.1.28}$$

Geri Euler metodu ile yaklaşılmaya çalışılır [100].

(2.1.23) diferensiyel denklemin **Orta Nokta Euler metodu** veya bir başka ifadeyle **Runge-Kutta metodu**

$$k_1 = f\big(t_i, y(t_i)\big),$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i) + \frac{h}{2}k_1\right)$$

şeklinde olup

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hk_2 \tag{2.1.29}$$

dir [101].

Çatallanma (bifurcation) teorisi, bir çözüm ailesinin nitel yapısının değişimini inceleyen bir çalışma sahası olup bu kısımda sadece transcritical bifurcation ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Bifurcation teorisinde transcritical bifurcation yerel çatallanmanın bir çeşidi olup diferensiyel denklemdeki normal formu

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2 \tag{2.1.30}$$

şeklindedir.

Burada iki kritik nokta mevcut olup birinin kararlı olduğu bölgede diğeri kararsız olmaktadır. Bununla birlikte bu bifurcation yapısı denklemin öz değerleri reel eksende sıfır değerinden geçecek şekilde denge noktalarına sahiptir [102].

2.2. Bir Lojistik Diferensiyel Denklemin Çözümünün Analizi

Bu kısımda belirli bir lojistik diferensiyel denklem oluşturulup bu denklemin çözümünün davranışı incelenecek, elde edilen sonuçlar geometriksel yorumlanacaktır.

Bir popülasyon modelini ifade eden

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, x(t)\} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, x(t) \tag{2.2.1}$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada $\alpha_k (k = 1,2, \dots, n)$ ve r pozitif reel sayılar, $\beta_k (k = 1, 2, \dots, n)'$ler ise reel sayılardır. Bu modellemeye, r popülasyon oranı, $\alpha_k (k = 1,2, \dots, n)$'ler doğum, ölüm, üreme vb. durumları, $\beta_k (k = 1, 2, \dots, n)'$ler de bir gemiden sızan atık, doğal afet vb. koşullar olmak üzere Alaska'da bir popülasyon oluşturmuş sazan balığı örnek olarak verilebilir.

t zamanı temsil etmek üzere (2.2.1) diferensiyel denklem bir Bernoulli diferensiyel denklem olup

$$\frac{dx(t)}{dt} - \{r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \}x(t) = -r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(x(t)\right)^2 \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazılabilir.

$m = 2$ olmak üzere $u(t) = \left(x(t)\right)^{1-m}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du(t)}{dt} + \{r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \}u(t) = r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tag{2.2.3}$$

lineer diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin genel çözümü C bir sabit olmak üzere

$$x(t) = \frac{r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k + C\left(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\right) e^{-\left(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\right)t}} \tag{2.2.4}$$

şeklindedir.

$$x(0) = x_0 \tag{2.2.5}$$

başlangıç koşulu altında (2.2.1) diferensiyel denklemin özel çözümü

$$C = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k - x_0 r \sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{x_0\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)} \tag{2.2.6}$$

olmak üzere

$$x(t) = \frac{x_0\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)}{\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, x_0\left(1-e^{-\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)t}\right)} \tag{2.2.7}$$

dir.

Oluşturulan diferensiyel denklemin çözümünün davranışını incelemek amacıyla bu denklemin kritik noktaları

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{ve} \qquad \bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} \tag{2.2.8}$$

olarak elde edilir.

Şimdi (2.2.1)'den

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \tag{2.2.9}$$

yazılsın. Buradan

$$\frac{df(x(t))}{dx(t)} = \sum_{k=0}^{n}\beta_k + r - 2r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, x(t) \tag{2.2.10}$$

dir.

Tanım 2.1.4'e göre $\bar{x}_1 = 0$ için

$$f'(\bar{x}_1) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k + r \tag{2.2.11}$$

bulunur. Buna göre, $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)'$ler reel sayılar olduğundan (2.2.11)'den

$$f'(\bar{x}_1) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k + r < 0 \qquad (2.2.12)$$

ise bu taktirde $\bar{x}_1$ denge noktası kararlı,

$$f'(\bar{x}_1) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k + r > 0 \qquad (2.2.13)$$

ise kararsızdır.

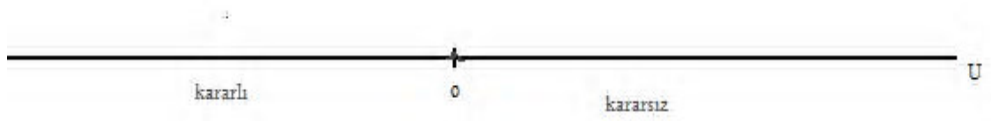
$$\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

için

$$f'(\bar{x}_2) = -(\sum_{k=0}^{n} \beta_k + r) \qquad (2.2.14)$$

olup (2.2.12) koşulu altında $\bar{x}_2$ denge noktası kararsız, (2.2.13) koşulunda ise kararlıdır. Böylece, transcritical bifurcation yapısının mevcut olduğu görülmektedir. U=$\sum_{k=0}^{n} \beta_k + r$ olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

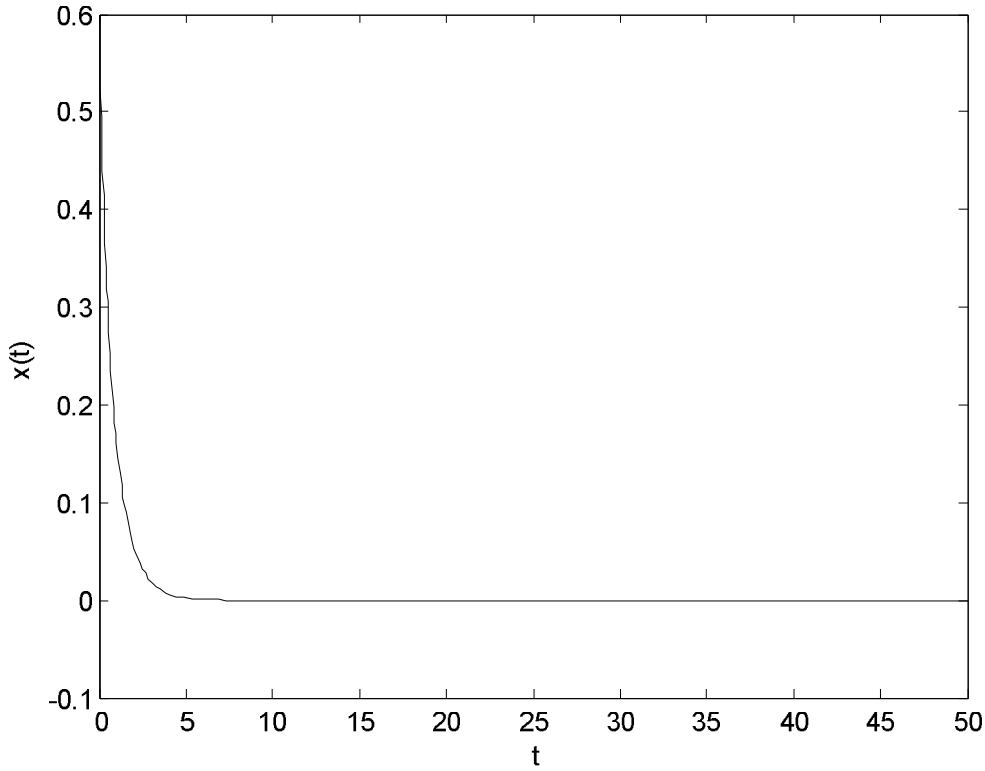


ii) $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

dır.

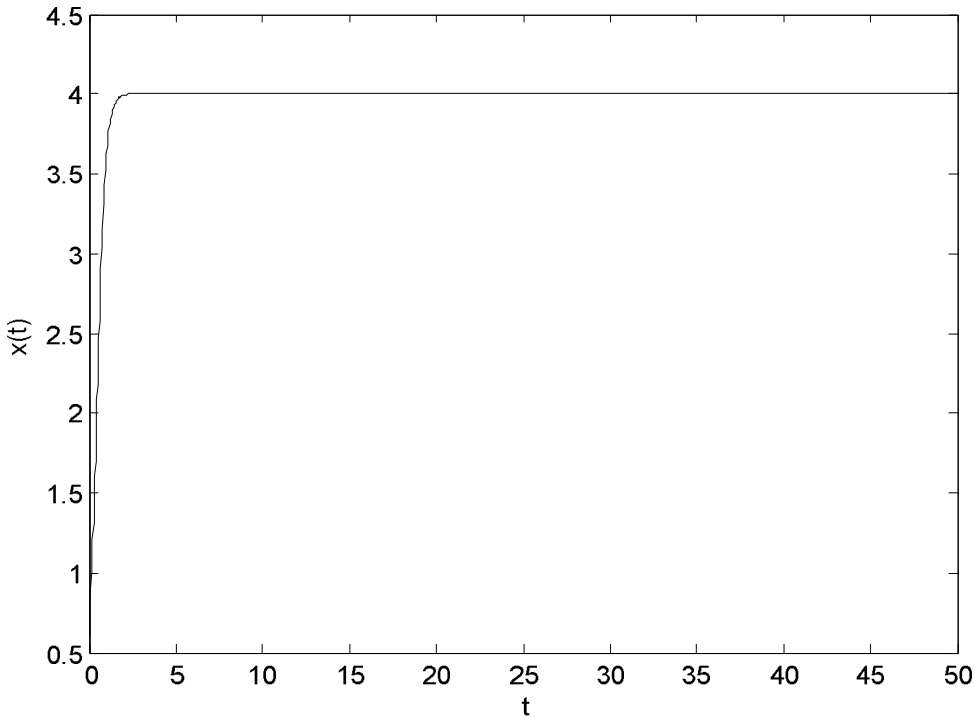
Örnek 2.2.1. (2.2.1) diferensiyel denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$ ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.2.1) diferensiyel

denklemin çözümünün $\bar{x}_1 = 0$ kritik noktasına yakınsadığı Şekil 2.2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.1. $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.2.1) diferensiyel denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.2.2. (2.2.1) diferensiyel denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2$ ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.2.1) diferensiyel denklemin çözümünün $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ kritik noktasına yakınsadığı Şekil 2.2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.2. $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.2.1) diferensiyel denklemin çözümünün grafiği

2.3. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin İleri Euler Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi

Bu kısımda, İleri Euler metodu (2.2.1) lojistik diferensiyel denkleme uygulanacak ve elde edilen lojistik fark denklemin çözümlerinin davranışları incelenip sonuçlar geometrik olarak gösterilecektir.

(2.2.1) diferensiyel denkleme İleri Euler metodu uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x(t+1) = x(t) + h[rx(t)\{1 - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, x(t)\} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, x(t)] \qquad (2.3.1)$$

fark denklemi elde edilir. Bu fark denklemin denge noktaları (2.2.8) olup Tanım 2.1.6 dikkate alınırsa

$$F\big(x(t)\big) = \frac{df\big(x(t)\big)}{dx} = 1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \; - 2r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, x(t)] \qquad (2.3.2)$$

olacak şekilde (2.3.1) fark denklemin lineerleştirilmiş şekli elde edilir.

(2.3.2)'de $x(t) = \bar{x}_1 = 0$ yazılması ile

$$F(0) = 1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,] \qquad (2.3.3)$$

elde edilir. Buna göre,

$$|F(0)| = |1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,]| < 1 \qquad (2.3.4)$$

eşitsizliğini sağlayan koşullar altında $\bar{x}_1 = 0$ denge noktası kararlıdır. (2.3.4) eşitsizliğinden

a) $1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, x(t)] < 1$
b) $-1 < 1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, x(t)]$

yazılabilir. (a)'dan

$$h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,] < 0 \qquad (2.3.5)$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \, x(t) < 0$ olması gerekir.

Aynı koşul altında (b) incelendiğinde

$$-2 < h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,] \qquad (2.3.6)$$

eşitsizliğinden

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \,) \in \left(\frac{-2}{h}, 0\right) \qquad (2.3.7)$$

bulunur.

Diğer taraftan, $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasının kararsız olabilmesi için

$$|F(0)| = |1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,]| > 1 \tag{2.3.8}$$

olması gerekir.

(2.3.8) eşitsizliğinden

$$1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,] > 1 \tag{2.3.9}$$

veya

$$1 + h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,] < -1 \tag{2.3.10}$$

olmalıdır.

Buna göre, (2.3.9) eşitsizliğinden, $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k > 0$ olmak üzere her $h \in \mathbb{R}^+$ için $\bar{x}_1 = 0$ denge noktası kararsız, (2.3.10)'dan ise $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k < 0$ koşulu altında

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,) \in \left(-\infty, \frac{-2}{h}\right) \tag{2.3.11}$$

olması halinde kararsızlık söz konusudur.

Bu durumda, İleri Euler metodu uygulandığında $\bar{x}_1 = 0$ denge noktası (2.3.7) koşulu için kararlı, (2.3.11) aralığı için ise kararsızdır.

$r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k > 0$ olması durumunda ise her $h \in \mathbb{R}^+$ için kararsızlık söz konusudur. Benzer şekilde (2.3.2) diferensiyeli $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ için incelendiğinde

$$F(\bar{x}_2) = 1 - h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\,] \tag{2.3.12}$$

bulunur.

Buna göre, Tanım 2.1.6'dan

$$|F(\bar{x}_2)| = |1 - h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ ]| < 1 \qquad (2.3.13)$$

eşitsizliğinden $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ > 0$ olmak üzere

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ ) \in \left(0, \frac{2}{h}\right) \qquad (2.3.14)$$

ise, bu taktirde $\bar{x}_2$ denge noktası kararlı ve

$$|F(\bar{x}_2)| = |1 - h[r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ ]| > 1 \qquad (2.3.15)$$

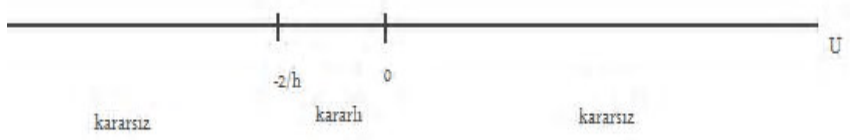
eşitsizliğinden $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ > 0$ koşulu altında

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ ) \in \left(\frac{2}{h}, \infty\right) \qquad (2.3.16)$$

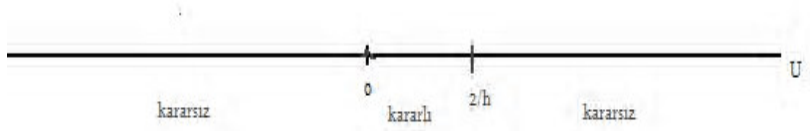
ise kararsız veya $r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ < 0$ koşulunda her $h \in \mathbb{R}^+$ için kararsızdır.

U=$\sum_{k=0}^{n} \beta_k\ + r$ olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

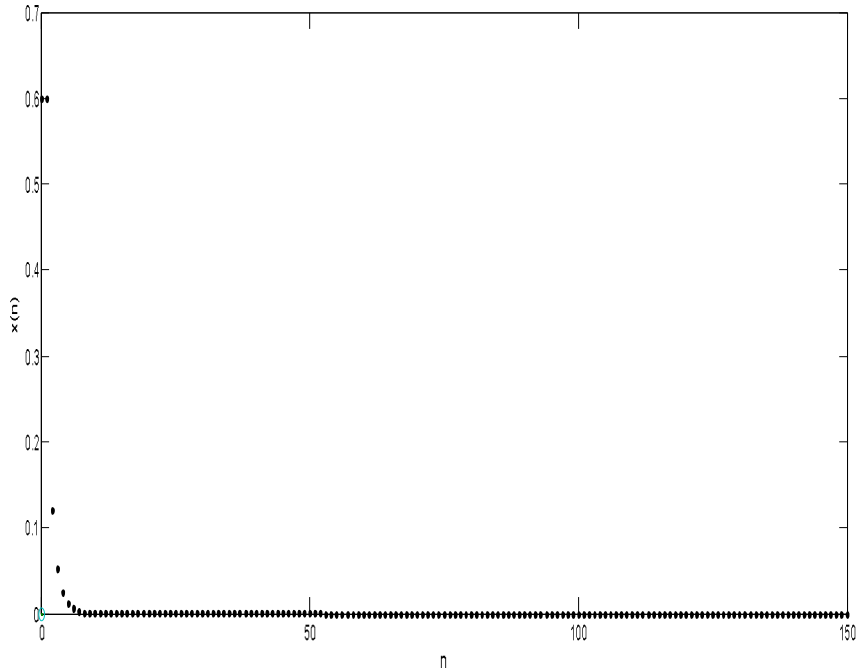


ii) $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



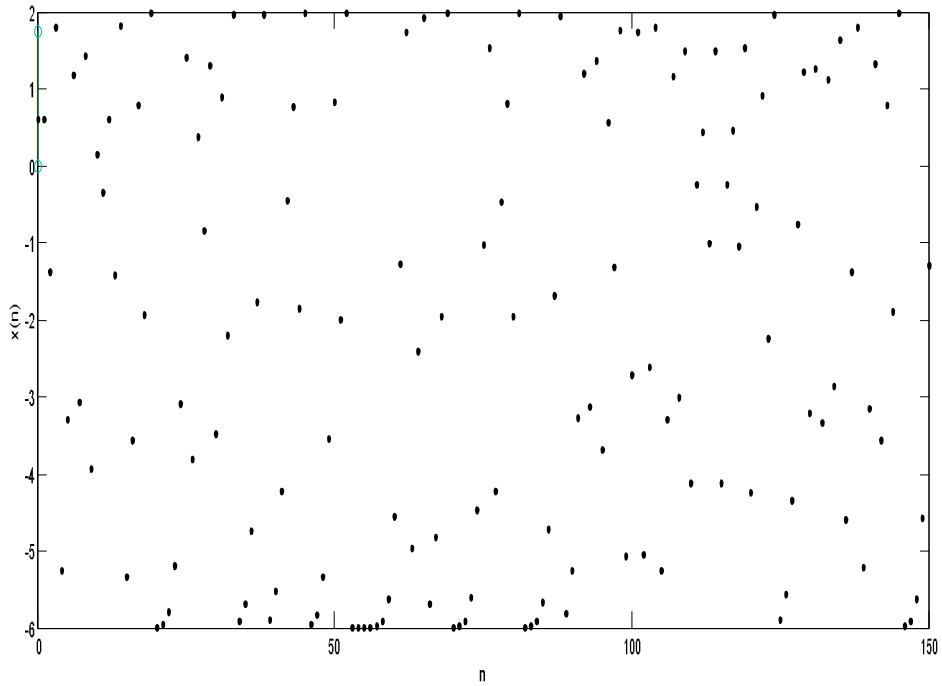
dır.

Örnek 2.3.1. (2.3.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.3.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.3.1'de gösterilmiştir.



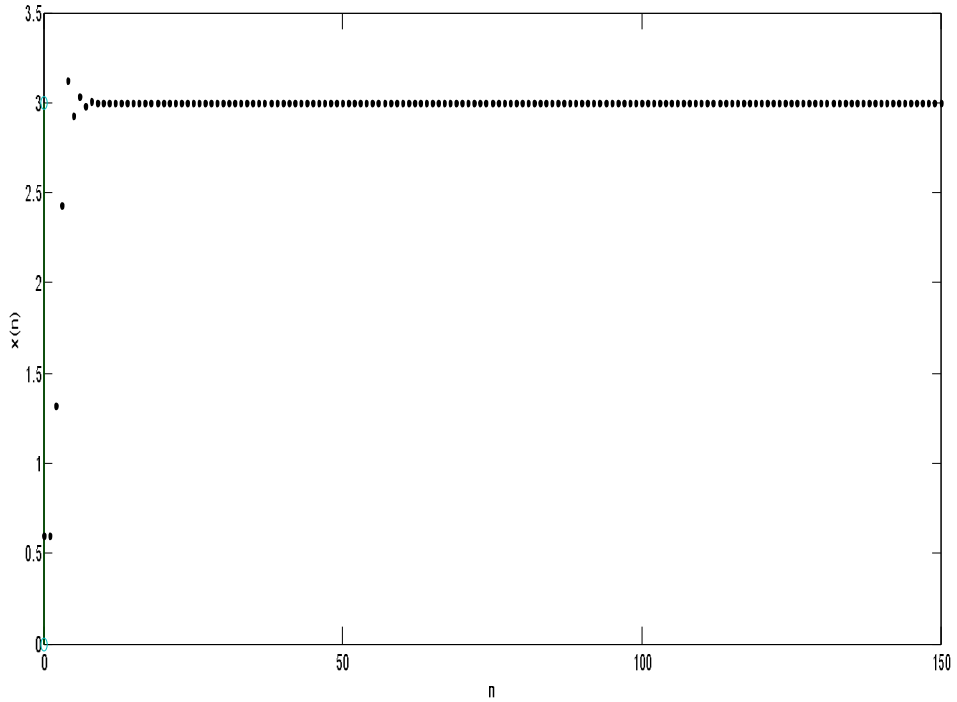
Şekil 2.3.1. $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.3.2. (2.3.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.3.1) fark denkleminin $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasının kararsız olduğu ile ilgili grafik Şekil 2.3.2'de gösterilmiştir.



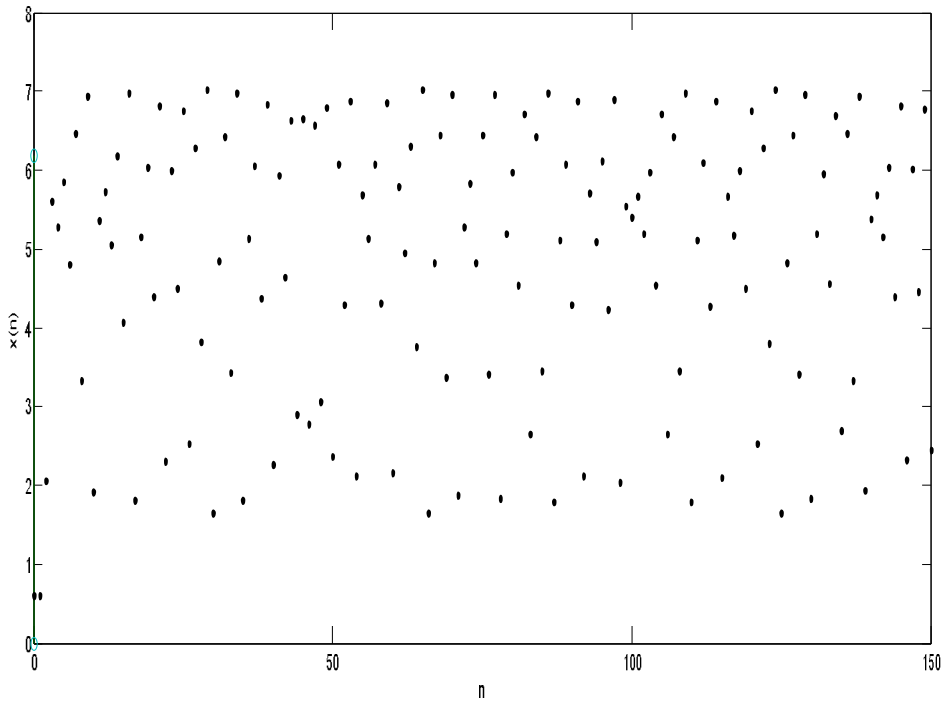
Şekil 2.3.2. $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.3.3. (2.3.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.3.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.3.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3.3 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.3.4. (2.3.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 3.5$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.3.1) fark denkleminin $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasının kararsızlığı ile ilgili grafik Şekil 2.3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3.4 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5,\ \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 3.5, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.3.1) fark denklemin çözümünün grafiği

2.4. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin Geri Euler Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi

Bu kısımda, Geri Euler metodu (2.2.1) lojistik diferensiyel denkleme uygulanacak ve elde edilen lojistik fark denklemin çözümlerinin davranışları incelenip sonuçlar geometrik olarak gösterilecektir.

(2.2.1) diferensiyel denkleme Geri Euler metodu uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x(t+1) = x(t) + h[rx(t+1)\{1 - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, x(t+1)\} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k\, x(t+1)] \qquad (2.4.1)$$

fark denklemi elde edilir.

Bu denklem

$$rh(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)\big(x(t+1)\big)^2+(1-rh-h\sum_{k=0}^{n}\beta_k)x(t+1)-x(t)=0 \qquad (2.4.2)$$

şeklinde bir kuadratik denklem olup bu denklemin pozitif kökü

$$x(t+1)=\frac{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-1+\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-1\}^2+4rh(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)x(t)}}{2rh(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)} \qquad (2.4.3)$$

dir. Bu denklemin denge noktaları yine (2.2.8)'de elde edilmiş olunan kritik noktalardır.

(2.4.3) fark denklemin lineerleştirilmesiyle

$$G\big(x(t)\big)=\frac{dg(x(t))}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-1\}^2+4rh(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)x(t)}} \qquad (2.4.4)$$

elde edilir.

Buna göre sıfır denge noktası için

$$|G(0)|=\left|\frac{1}{\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-1\}^2}}\right|<1 \qquad (2.4.5)$$

ise, denge noktası kararlıdır.

(2.4.5) eşitsizliğinden

$$1<\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-1\}^2} \qquad (2.4.6)$$

yazılabilir ve buradan da

$$h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\{h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)-2\}>0 \qquad (2.4.7)$$

elde edilir. (2.4.7) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) \epsilon (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{h}, \infty\right) \tag{2.4.8}$$

olmalıdır.

Diğer taraftan, $\bar{x}_1 = 0$ denge noktası için

$$|G(0)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k)-1\}^2}} \right| > 1 \tag{2.4.9}$$

olursa

$$1 > \{h(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) - 1\}^2 \tag{2.4.10}$$

olup

$$h(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k)\{h(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) - 2\} < 0 \tag{2.4.11}$$

yazılabilir.

Buna göre, (2.4.11) eşitsizliğinden eğer

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) \epsilon \left(0, \frac{2}{h}\right) \tag{2.4.12}$$

ise, sıfır denge noktası kararsızdır.

Benzer şekilde, $\bar{x}_2$ denge noktası için

$$G\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\{h(r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k)-1\}^2 + 4h(r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k)}} \tag{2.4.13}$$

olup

$$\left|G\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\left\{h\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)-1\right\}^2+4h\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)}}\right| < 1 \qquad (2.4.14)$$

ise, $\bar{x}_2$ kararlıdır.

(2.4.14) eşitsizliği düzenlendiğinde

$$\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) \in \left(-\infty, \frac{-2}{h}\right) \cup (0,\infty) \qquad (2.4.15)$$

ise, $\bar{x}_2$ kararlı ve

$$\left|G\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\left\{h\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)-1\right\}^2+4h\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)}}\right| > 1 \qquad (2.4.16)$$

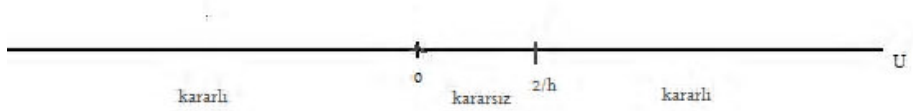
eşitsizliğinden

$$\left(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) \in \left(\frac{-2}{h}, 0\right) \qquad (2.4.17)$$

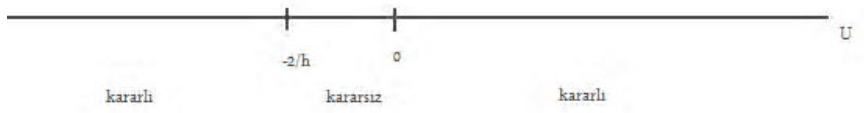
ise, kararsızdır.

$U=\sum_{k=0}^{n}\beta_k + r$ olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

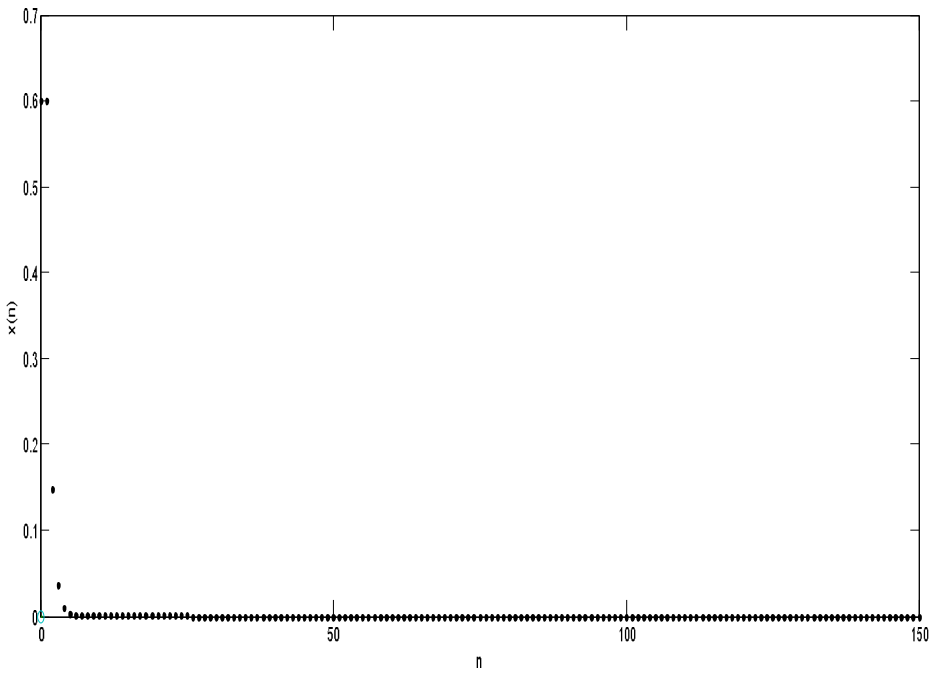


ii) $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



dır.

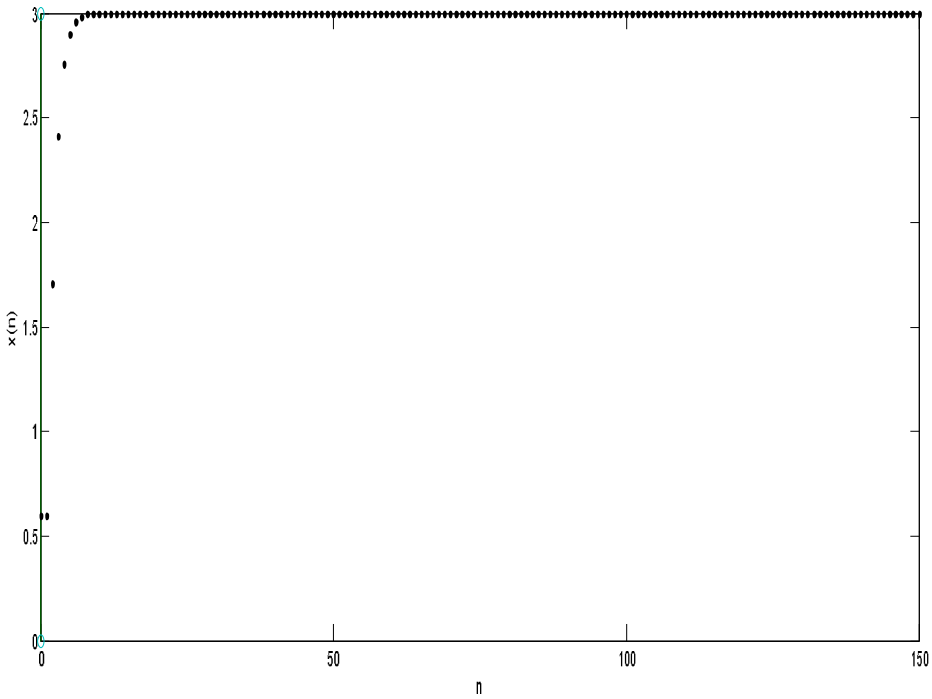
Örnek 2.4.1. (2.4.3) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.4.3) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4.1 $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği

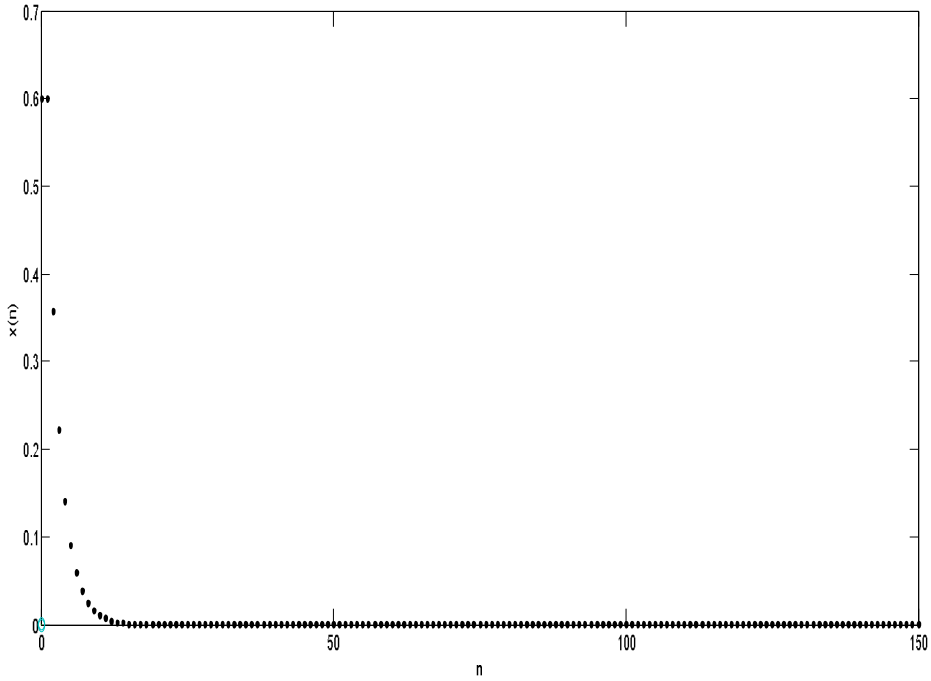
Örnek 2.4.2. (2.4.3) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.4.3) fark

denklemin çözümünün $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.4.2'de gösterilmiştir.



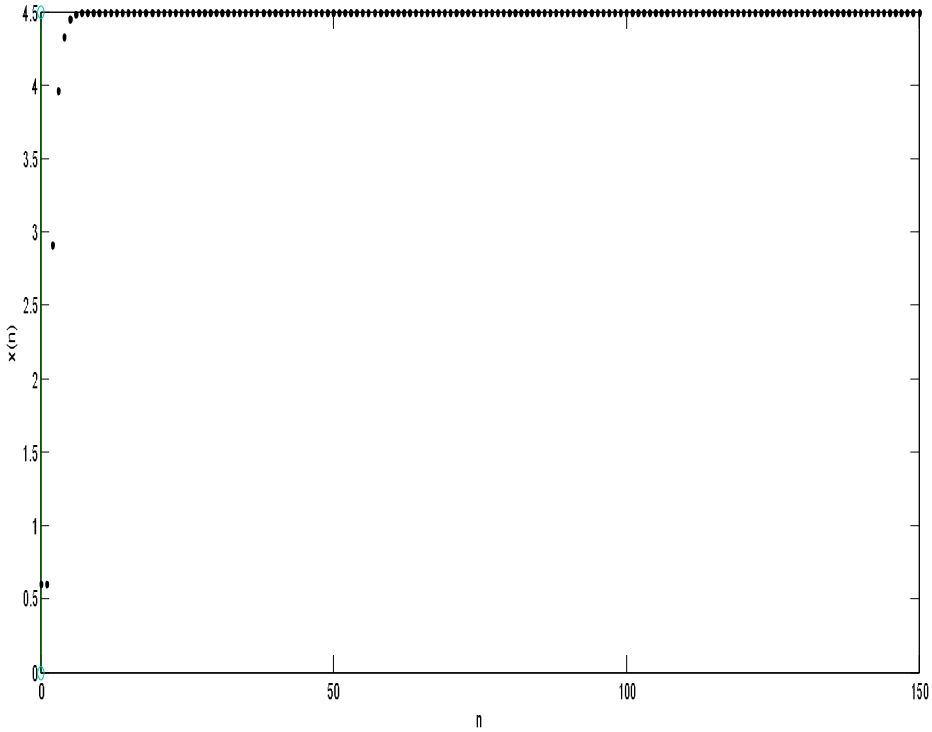
Şekil 2.4.2 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n}\alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n}\beta_k = 1, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.4.3. (2.4.3) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n}\alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n}\beta_k = -3, h = 0.5$ ve x(0)=0.6seçilsin. (2.4.3) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.4.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4.3 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği

Örnek 2.4.4. (2.4.3) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2.5,$ h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.4.3) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.4.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4.4 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2.5, h = 0.5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.4.3) fark denklemin çözümünün grafiği

2.5. (2.2.1) Lojistik Diferensiyel Denklemin Runge-Kutta Metodu Dönüşümü İle Çözümünün Analizi

Bu kısımda, Orta Nokta Euler (**Runge-Kutta**) metodu (2.2.1) lojistik diferensiyel denkleme uygulanacak ve elde edilen lojistik fark denklemin çözümlerinin davranışları incelenip sonuçlar geometriksel gösterilecektir.

(2.2.1) diferensiyel denkleme Runge-Kutta metodu uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x(t+1) = x(t) + h\left[\left\{x(t)\left(\frac{rh}{2} - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, x(t) + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right)\right\}\right.$$

$$\left.\times\left\{r - r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left\{x(t)\left(\frac{rh}{2} - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\, x(t) + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right)\right\} + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right\}\right] \qquad (2.5.1)$$

elde edilir. Bu denklemin denge noktalarından ikisi (2.2.8)'deki noktalar ve ikisi de

$$\bar{x}_3 = \frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} \quad \text{ve} \quad \bar{x}_4 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} + \frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} \tag{2.5.2}$$

olmak üzere dört denge noktası vardır. Fakat $h \to \infty$ olması durumunda $\bar{x}_3$ ve $\bar{x}_4$ denge noktalarının sırasıyla $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ olduğu görülmektedir. Bu sebeple (2.5.2) noktalarına hayali noktalar denmiştir.

(2.5.1) fark denklemin lineerleştirilmiş şekli

$$\begin{aligned}
H(\bar{x}) = \frac{dh(\bar{x})}{dx} &= 1 + h\Bigg[\left\{\frac{rh}{2} - rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,\bar{x} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right\} \\
&\times\left\{r - r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\left\{\bar{x}\left(\frac{rh}{2} - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,\bar{x} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right)\right\} + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right\} \\
&-\left(r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)\times\left\{\frac{rh}{2} - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,\bar{x} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right\} \\
&\times\left\{\frac{rh}{2} - rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,\bar{x} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right\}\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

dir.

Şimdi, yukarıda elde ettiğimiz denge noktaları için kararlılık analizi yapalım.
i) $\bar{x}_1 = 0$ civarında (2.5.3)'ten

$$\begin{aligned}
H(0) = 1 + h\Bigg[&\left(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)\cdot\left(\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right) \\
&-\left(r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left(\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k + 1\right)^2\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

bulunur.

Buna göre, $\bar{x}_1 = 0$ denge noktası kararlıdır eğer

$$|H(0)| < 1 \tag{2.5.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa. Yani,

a) $H(0) < 1$

b) $H(0) > -1$

durumları dikkate alınmalıdır.

(a)'da $U = (r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k)$'ye göre gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{h}{2}\left(1 - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)(U)^2 + (1 - rh\sum_{k=0}^{n} \alpha_k)U - r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k < 0 \qquad (2.5.5)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin diskritimantı $\Delta_1 = 1$ olmak üzere
elde edildiğinden

$$\frac{1}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} < h < \frac{2}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \qquad (2.5.6)$$

kabulü altında

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) = U \in \left(\frac{-2}{h}, \frac{2r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}{(2 - rh\sum_{k=0}^{n} \alpha_k)}\right) \qquad (2.5.7)$$

dir.

Diğer taraftan, (b)'den $\Delta_2 = -3 + 2rh\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ olmak üzere

$$\frac{h}{2}\left(1 - \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right)(U)^2 + (1 - rh\sum_{k=0}^{n} \alpha_k)(U) - r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k + \frac{2}{h} > 0 \qquad (2.5.8)$$

yazılabilir.

Buna göre, (2.5.6) kabulü dikkate alınacak şeklide

$$\frac{2}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} > h > \frac{3}{2r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} > \frac{1}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \qquad (2.5.9)$$

olması durumunda

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in\left(-\infty,\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1-\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}\right)\cup\left(\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1+\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\infty\right) \qquad (2.5.10)$$

elde edilir.

(2.5.7) ve (2.5.10) birlikte göz önüne alındığında (2.5.9) kabulü altında

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\in\left(-\frac{2}{h},\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1-\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}\right)\cup\left(\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1+\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\frac{2r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}\right) \qquad (2.5.11)$$

ise, $\bar{x}_1=0$ denge noktası kararlıdır.

Diğer taraftan

$$|H(0)|>1 \qquad (2.5.12)$$

ise, $\bar{x}_1=0$ denge noktası kararsızdır. Buna göre (2.5.12)'den

a) $H(0)>1$

b) $H(0)<-1$

eşitsizlikleri incelenmelidir.

(a)'dan

$$\frac{h}{2}\left(1-\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)(U)^2+(1-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)U-r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k>0 \qquad (2.5.13)$$

olmak üzere

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in\left(-\infty,\frac{-2}{h}\right)\cup\left(\frac{2r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\infty\right) \qquad (2.5.14)$$

elde edilir.

(b)'den

$$\frac{h}{2}\left(1-\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)(U)^2+(1-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)U-r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\frac{2}{h}<0 \qquad (2.5.15)$$

olmak üzere

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in\left(\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1-\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1+\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}\right) \qquad (2.5.16)$$

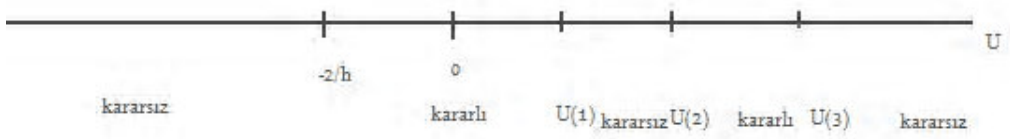
aralığı bulunur. (2.5.14) ve (2.5.16) sonuçları deki sonuçlar (2.5.9) ile birlikte dikkate alındığında

$$U\in\left(-\infty,\frac{-2}{h}\right)\cup\left(\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1-\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1+\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}\right)\cup\left(\frac{2r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)},\infty\right) \qquad (2.5.17)$$

olması durumunda $\bar{x}_1=0$ denge noktası kararsızdır. Bu durumda

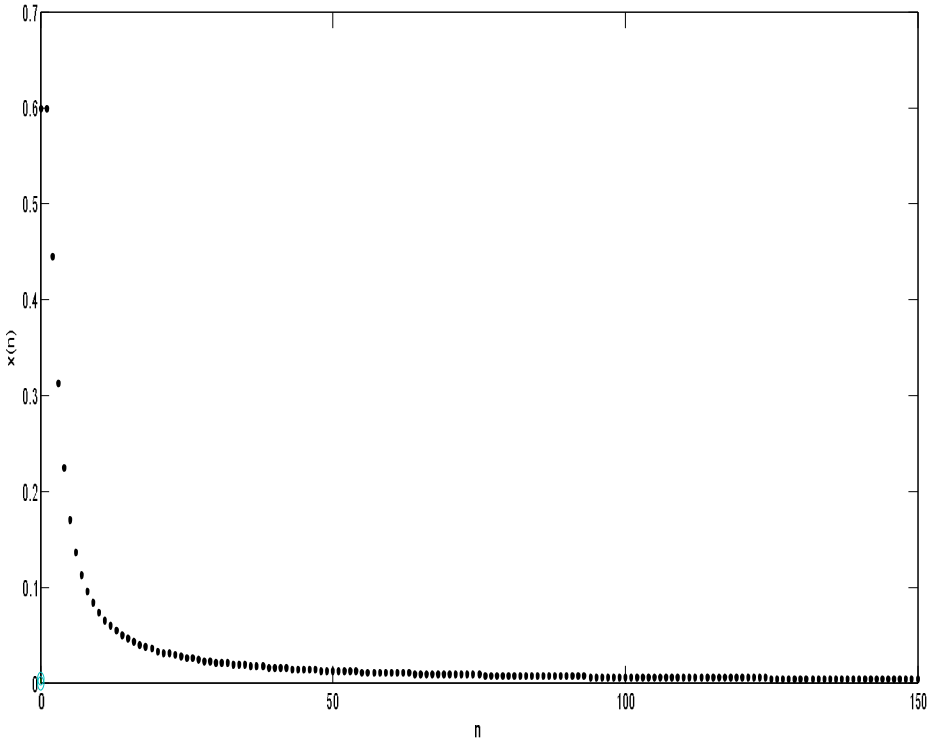
$$\frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1-\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}=U_1\ ,\ \frac{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-1+\sqrt{\Delta_2}}{\frac{h}{2}(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}=U_2 \text{ ve } \frac{2r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{(2-rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)}=U_3 \qquad (2.5.18)$$

olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre $\bar{x}_1=0$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklindedir.

Örnek 2.5.1. (2.5.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r=2$, $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=0.5, \sum_{k=0}^{n}\beta_k=-2$, h=1.6 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.5.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_1=0$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5.1 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -2, h = 1.6$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği

ii) $\bar{x}_2$ denge noktası için (2.5.3) aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$H(\bar{x}_2) = 1 - h\left[\left\{1 - \frac{rh}{2} - \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n} \beta_k\right\}\right.$$
$$\left.\cdot \{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k + \sum_{k=0}^{n} \beta_k + r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{k=0}^{n} \beta_k\}\right] \qquad (2.5.19)$$

$\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı olabilmesi için

$$\left|H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right)\right| < 1 \qquad (2.5.20)$$

olmalıdır.

Buna göre,

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right) < 1 \qquad (2.5.21)$$

eşitsizliğinden

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) = U \in \left(-\infty, \frac{2}{h}\right) \tag{2.5.22}$$

elde edilir.

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right) > -1 \tag{2.5.23}$$

eşitsizliğinden

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) = U \in \left(\frac{2hr \sum_{k=0}^{n} \alpha_k - 4}{h^2 r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}, \infty\right) \tag{2.5.24}$$

bulunur. (2.5.23) ve (2.5.24)'den

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) = U \in \left(\frac{2hr \sum_{k=0}^{n} \alpha_k - 4}{h^2 r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}, \frac{2}{h}\right) \tag{2.5.25}$$

sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan eğer

$$\left|H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right)\right| > 1 \tag{2.5.26}$$

ise, $\bar{x}_2$ denge noktası kararsızdır.

Buna göre

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}\right) > 1 \tag{2.5.27}$$

eşitsizliğini sağlayan aralık

$$(r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k) = U \in \left(\frac{2}{h}, \infty\right) \tag{2.5.28}$$

dur.

Ayrıca

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) < -1 \tag{2.5.29}$$

eşitsizliğinden

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k) \in \left(-\infty, \frac{2hr\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - 4}{h^2 r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \tag{2.5.30}$$

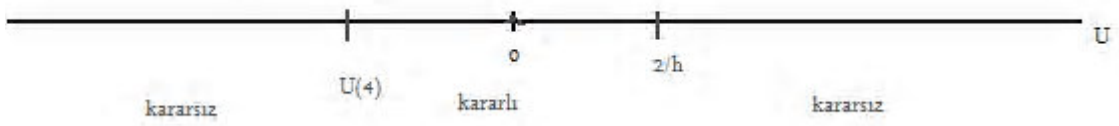
elde edilir. (2.5.28) ve (2.5.30) birlikte düşünüldüğünde

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k) \in \left(-\infty, \frac{2hr\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - 4}{h^2 r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \cup \left(\frac{2}{h}, \infty\right) \tag{2.5.31}$$

aralığı için $\bar{x}_2$ denge noktası kararsızdır. Buna göre

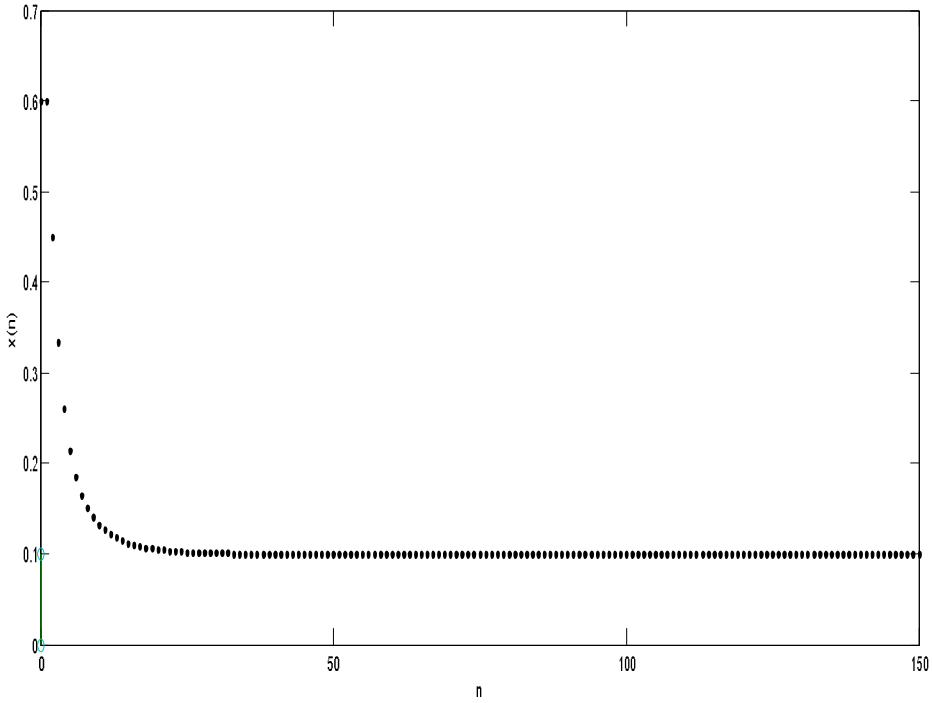
$$\frac{2hr\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - 4}{h^2 r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} = U_4 \tag{2.5.31}$$

olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklindedir.

Örnek 2.5.2. (2.5.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n}\beta_k = -1.9$, h=1.6 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.5.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5.2 $r = 2,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9, h = 1.6$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği

iii) $\bar{x}_3$ için

$$H\left(\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) = 1 + h\left[\left\{\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k - 1\right\}\cdot\left\{r - \frac{2}{h}\left(\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right\}\right.$$
$$\left. -\left(r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left\{\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k\right\}\cdot\left\{\frac{rh}{2} + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k - 1\right\}\right]$$

dir. Bu durumda

$$\left|H\left(\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right| < 1 \qquad (2.5.32)$$

ise, $\bar{x}_3$ denge noktası kararlıdır. (2.5.32) eşitsizliği $(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k)$'ye göre düzenlendiğinde

$$\left(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right)\left\{\frac{h}{2}\left(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) - 1\right\} > 0 \qquad (2.5.33)$$

elde edilir. (2.5.33)'ten

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{h},\infty\right) \tag{2.5.34}$$

sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan, (2.5.32)'den

$$r\frac{h^3}{4}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,(U)^2-r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,(U)-2<0 \tag{2.5.35}$$

yazılabilir. (2.5.35)'ten

$$\sqrt{\Delta_5}=\sqrt{\left(r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)^2+2rh^3\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}>0 \tag{2.5.36}$$

olup

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in\left(\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-\sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k},\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \tag{2.5.37}$$

elde edilir. (2.5.34) aralığı (2.5.37) ile birlikte dikkate alındığında

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)=U\in\left(\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-\sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k},0\right)\cup\left(\frac{2}{h},\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \tag{2.5.38}$$

elde edilmiş olunur.

Ayrıca, $\bar{x}_3$ denge noktası kararsızdır eğer

$$\left|H\left(\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right|>1 \tag{2.5.39}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa. Buna göre,

$$H\left(\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) > 1 \tag{2.5.40}$$

eşitsizliğinden

$$(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k) \in \left(0, \frac{2}{h}\right) \tag{2.5.41}$$

ve

$$H\left(\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) < -1 \tag{2.5.42}$$

eşitsizliğinden

$$(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k) \in \left(-\infty, \frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \cup \left(\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k + \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}, \infty\right) \tag{2.5.43}$$

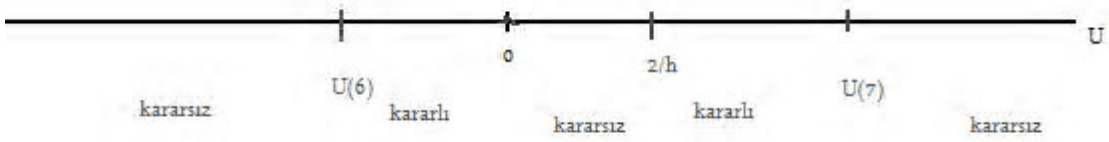
elde edilir. (2.5.41) ve (2.5.43) birlikte dikkate alındığında

$$(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k) \in \left(-\infty, \frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right) \cup \left(0, \frac{2}{h}\right) \cup \left(\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k + \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}, \infty\right) \tag{2.5.44}$$

bulunur. Burada

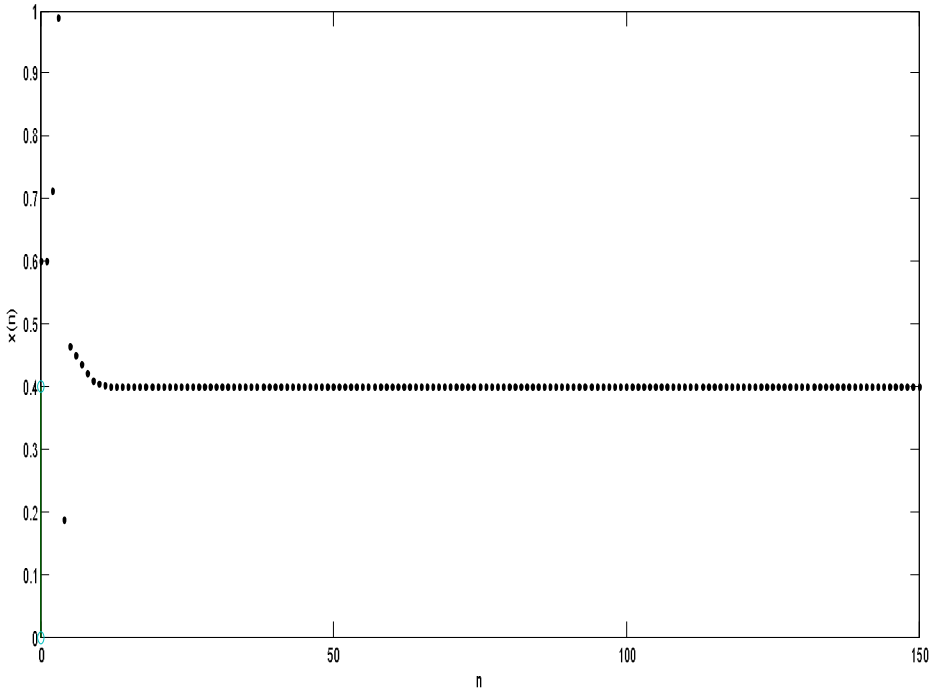
$$\frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k - \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} = U_6 \quad \text{ve} \quad \frac{r\frac{h^2}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k + \sqrt{\Delta_5}}{r\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} = U_7 \tag{2.5.45}$$

olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre $\bar{x}_3$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



dır.

Örnek 2.5.3. (2.5.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.5$, h=5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.5.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_3 = \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.5.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.5.3 $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.5, h = 5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği

iv) Son olarak $\bar{x}_4$ denge noktası için kararlılık analizi yapılsın. Buna göre,

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)=1-h\left[\left\{\frac{rh}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k+1\right\}\cdot\left\{2r+2\sum_{k=0}^{n}\beta_k+\frac{h}{2}\right\}\right.$$
$$\left.+(r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k)\cdot\left\{\frac{rh}{2}+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n}\beta_k+1\right\}\right] \qquad (2.5.46)$$

olmak üzere $\bar{x}_4$ denge noktasının kararlı olabilmesi için

$$\left|H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right|<1 \qquad (2.5.47)$$

olmalıdır. (2.5.47)'den

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)<1 \qquad (2.5.48)$$

olması durumunda

$$h(U)^2+\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}U+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\frac{h}{2}>0 \qquad (2.5.49)$$

eşitsizliği incelenmelidir. Buna göre,

$$\Delta_6=\left[\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)-2\right]^2>0 \qquad (2.5.50)$$

olup

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\in\left(-\infty,\frac{-\left(\frac{h}{2}+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)}{2}\right)\cup\left(\frac{-2}{h},\infty\right) \qquad (2.5.51)$$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)>-1 \qquad (2.5.52)$$

eşitsizliğinde

$$h(U)^2 + \left\{\frac{h^2}{4} + 2 + \frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}U + r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k + \frac{h}{2} - \frac{2}{h} < 0 \qquad (2.5.53)$$

yazılabilir olup

$$\Delta_7 = \left[\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2} + r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right) - 2\right]^2 + 8 > 0 \qquad (2.5.54)$$

dır. h>4 olduğunda

$$r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k + \frac{h}{2} - \frac{2}{h} > 0 \qquad (2.5.55)$$

olup

$$\left(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) \in \left(\frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}-\sqrt{\Delta_7}}{2h}, \frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}+\sqrt{\Delta_7}}{2h}\right) \qquad (2.5.56)$$

elde edilir. (2.5.51) ve (2.5.55) birlikte dikkate alındığında

$$\frac{-\left(\frac{h}{2}+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)}{2} = U_8 \qquad (2.5.57)$$

ve

$$\frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}-\sqrt{\Delta_7}}{2h} = U_9, \frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}+\sqrt{\Delta_7}}{2h} = U_{10} \qquad (2.5.58)$$

olmak üzere

$$\left(r + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\right) = U \in (U_9, U_8) \cup \left(-\frac{2}{h}, U_{10}\right) \qquad (2.5.59)$$

sonucuna ulaşılır.

Ayrıca

$$\left|H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)\right|>1 \qquad (2.5.60)$$

ise, bu taktirde $\bar{x}_4$ denge noktası kararsızdır.

Buna göre

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)>1 \qquad (2.5.61)$$

ise,

$$h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)^2+\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\frac{h}{2}<0 \qquad (2.5.62)$$

olup

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\in\left(\frac{-\left(\frac{h}{2}+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)}{2},\frac{-2}{h}\right) \qquad (2.5.63)$$

elde edilir.

$$H\left(\frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}+\frac{2}{rh\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\right)<-1 \qquad (2.5.64)$$

olması durumunda

$$h(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)^2+\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)+r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k+\frac{h}{2}-\frac{2}{h}>0$$

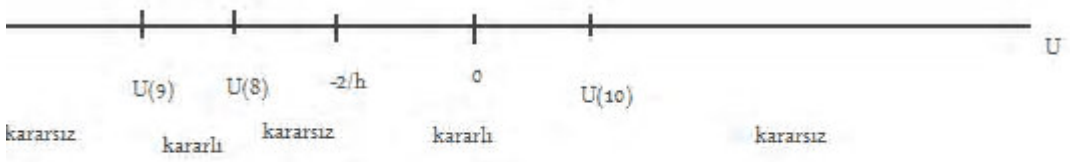
eşitsizliği mevcut olup

$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\in\left(-\infty,\frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}-\sqrt{\Delta_7}}{2h}\right)\cup\left(,\frac{-\left\{\frac{h^2}{4}+2+\frac{rh}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right\}+\sqrt{\Delta_7}}{2h},\propto\right) \qquad (2.5.65)$$

yazılabilir. (2.5.63) ve (2.5.65)'den

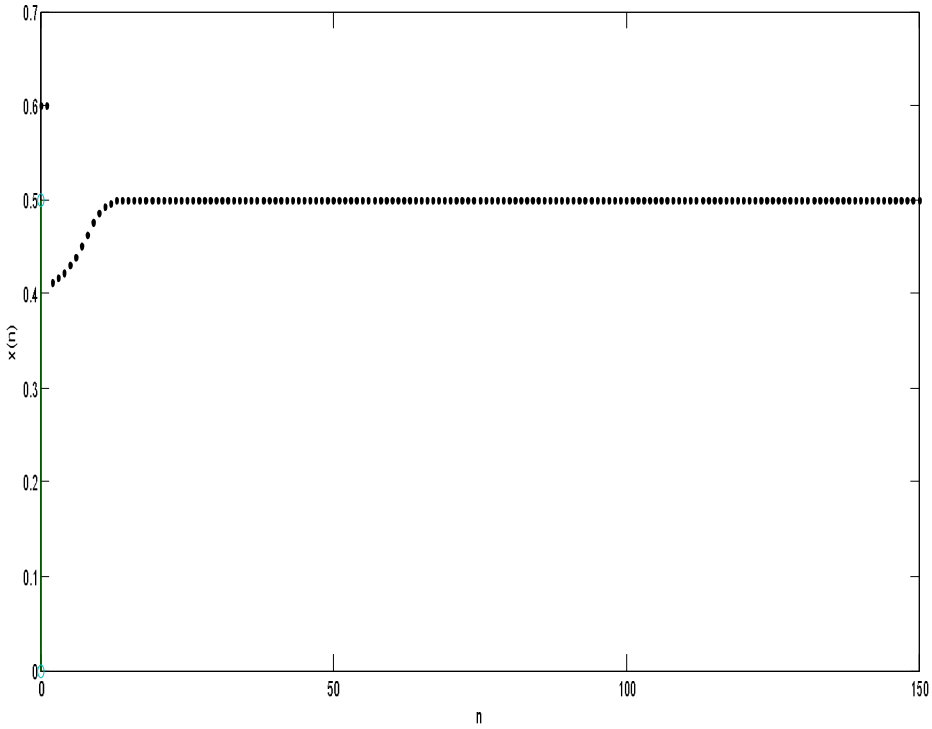
$$(r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k)\in(-\infty,U_9)\cup\left(U_8,\frac{-2}{h}\right)(U_{10},\propto) \qquad (2.5.103)$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre U'nun aldığı değerlere göre $\bar{x}_4$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklindedir.

Örnek 2.5.4. (2.5.1) fark denklemi için elde edilen sonuçlar dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9$, h=5 ve x(0)=0.6 seçilsin. (2.5.1) fark denklemin çözümünün $\bar{x}_4 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.5.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.5.4 $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9, h = 5$ ve x(0)=0.6 olmak üzere (2.5.1) fark denklemin çözümünün grafiği

2.6. Genel Değerlendirme

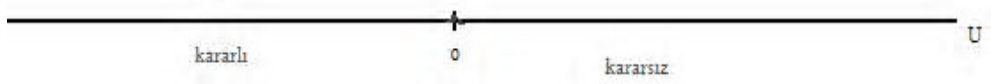
Bu kısımda Kesim 2.2-Kesim 2.5'te elde edilen sonuçlar mukayese edilip yorumlanacaktır.

Kesim 2.2'de (2.2.1) diferensiyel denklemin kritik noktaları

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{ve} \qquad \bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} \tag{2.6.1}$$

olmak üzere U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

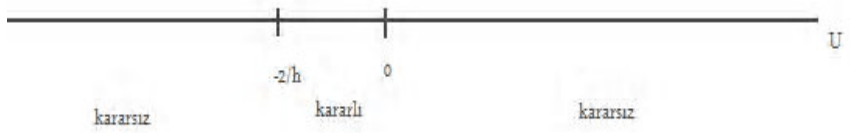


ii) $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar

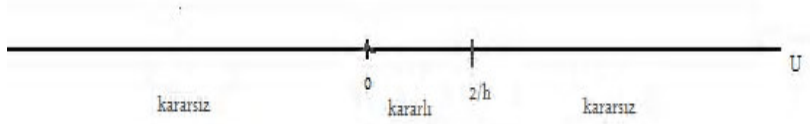
şeklinde elde edilmiştir. Buna göre $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı olduğu durumda $\bar{x}_2$ kararsız, $\bar{x}_1$ denge noktasının kararsız olması durumunda ise $\bar{x}_2$ kararlı elde edilmiştir. Buna göre Örnek 2.2.1'de $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n}\beta_k = -3$ ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve $\bar{x}_1 = 0$ kritik noktasının kararlı olduğu Şekil 2.2.1'de verilmiştir. Örnek 2.2.2'de ise $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k = 0.5$, $\sum_{k=0}^{n}\beta_k = 2$ ve x(0)=0.6 değerleri için $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n}\beta_k}{r\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}$ kritik noktasının kararlı olduğu (Şekil 2.2.2) gözlenmiştir.

Kesim 2.3'te (2.2.1) diferensiyel denklemine İleri Euler metodu uygulanmıştır. Burada yine (2.2.1)'de belirtilmiş olan aynı denge noktaları elde edilmiştir. Yapılan kararlılık analizi sonucunda U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



ii) $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklinde bulunmuştur. Burada görüldüğü üzere, diferensiyel denklemin her iki denge noktasının kararlı olduğu bölgede Kesim 2.3'te kullanılan metotla bazı ilave koşullar altında ya kararlı ya da kararsız çıkmıştır. Diğer taraftan orijinal denklemde belirli koşullar altında kararsız olan denge noktaları İleri Euler metodunun uygulanmasıyla her h adım için yine kararsız olduğu görülmüştür. Bu durumda İleri Euler metodu ile elde edilen fark denklem ve orijinal diferensiyel denklemin denge noktaları aynı olup her iki yöntemle kararsızlık bölgesinde değişiklik yok iken, diferensiyel denklemde belirli koşullarda kararlı olarak bulunan denge noktalarının İleri Euler metodu ile ilave koşullar altında kararsız olduğu gözlenebilmiştir.

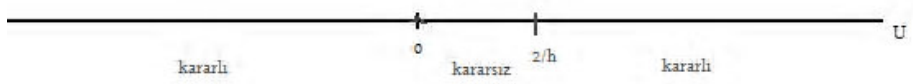
$\bar{x}_1 = 0$ kritik noktası için kararlı olarak elde edilen aralık dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerleri seçildiğinde, (2.3.1) fark denkleminin $\bar{x}_1$ denge noktasının yerel kararlı olduğu Şekil 2.3.1'de görülmektedir. Kararsız olarak nitelendirilen aralık için $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5$, $\sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerleri seçilirse $\bar{x}_1$ denge noktasının kararsız olduğu Şekil 2.3.2'de tespit edilmiştir. Halbuki (2.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{x}_1$ kritik noktasının bu değerleri için de kararlı olduğu bilinmektedir.

Örnek 2.3.3'te $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve (2.3.1) fark denkleminin $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasının yerel kararlı olduğu gösterilmiş ve bu durum Şekil 2.3.3'te verilmiştir. Diğer taraftan, (2.3.1) fark denkleminin $\bar{x}_2$ denge noktası $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 3.5$, h=0.5 ve

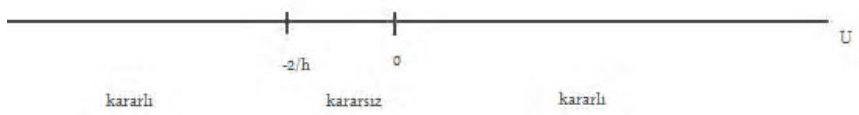
x(0)=0.6 değerleri için kararsız olarak elde edilmiştir (Şekil 2.3.4). Halbuki (2.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{x}_2$ kritik noktası verilen bu değerler için de kararlıdır.

Kesim 2.4'te (2.2.1) diferensiyel denklemine Geri Euler metodu uygulanmasıyla yine (2.2.1) de belirtilmiş olan aynı denge noktaları elde edilmiştir. Bu metottan elde edilen fark denkleminin denge noktaları için kararlılık analizi yapıldığında U'nun aldığı değerlere göre

i) $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



ii) $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklinde bulnmuştur. Kesim 2.2'de elde edilen sonuçlar ile burada elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında (2.2.1) diferensiyel denklemin kritik noktalarının kararlı olduğu bölgelerde Geri Euler metodu ile elde edilen (2.4.3) fark denkleminin denge noktalarının da kararlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, diferensiyel denklemin kritik noktalarının kararsız olduğu bölge ile Geri Euler metodu ile oluşturulan fark denklemin denge noktalarının kararsız olduğu bölge ile kısmen uyumlu olduğu belirlenmiştir.

Bu sonuçları geometriksel olarak da görebilmek için (2.4.3) fark denkleminde $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -8$, h=0.5 ve x(0)=0.6 seçilirse (2.4.3) denkleminin çözümlerinin $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasına yakınsadığı Şekil 2.4.1'de verilmiştir. Diğer taraftan, $\bar{x}_1$ denge noktasının kararsız olarak elde edilen aralık için $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 1$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve bu değerler için $\bar{x}_2 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasının kararlı olduğu elde edilmiştir (Şekil 2.4.2).

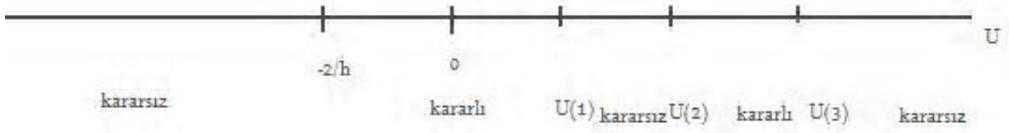
Örnek 2.4.3'te $\bar{x}_2$'nin kararsız olabileceği aralık dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -3$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve (2.4.3) fark denkleminin $\bar{x}_1 = 0$ kritik noktasının bu değerler için yerel kararlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, $\bar{x}_2$ denge noktasını kararlı yapan değerler dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = 2.5$, h=0.5 ve x(0)=0.6 değerlerinin seçilmesi halinde (2.4.1) fark denkleminin çözümlerinin $\bar{x}_2$ denge noktasına yakınsadıkları Şekil 2.4.4'te görülmüştür.

Kesim 2.5'te Orta Nokta Euler metodu, yani Runge-Kutta metodu (2.2.1) diferensiyel denklemine uygulanmıştır. Burada, (2.2.1)'de belirtilen denge noktaları dışında

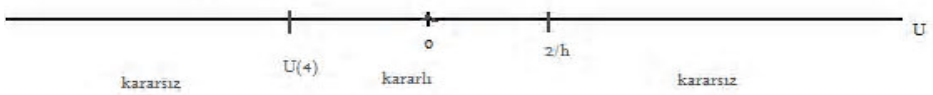
$$\bar{x}_3 = \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \quad \text{ve} \quad \bar{x}_4 = \frac{r + \sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \tag{2.6.2}$$

hayali denge noktaları da elde edilmiştir. Bu hayali denge noktaları incelendiğinde $h \to \infty$ iken (2.6.1) denge noktaları olduğu görülür. Her bir denge noktası için kararlılık analizi yapıldığında U'nun aldığı değerlere göre

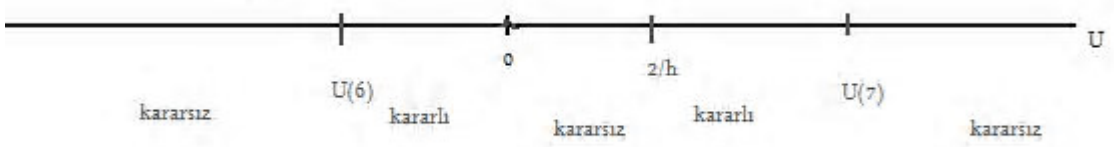
i) $\bar{x}_1$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



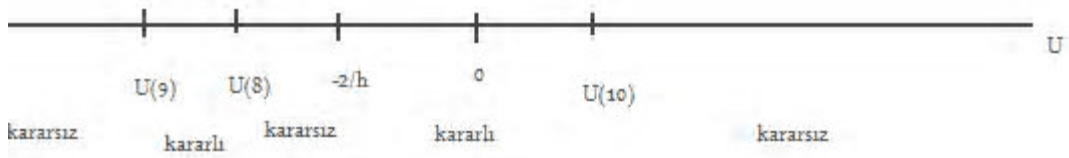
ii) $\bar{x}_2$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



iii) $\bar{x}_3$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



iv) $\bar{x}_4$ denge noktasının kararlı ve kararsız olduğu aralıklar



şeklinde elde edilmiştir.

Bu sonuçlar için Örnek 2.5.1'de $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -2$, h=1.6 ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve (2.5.1) fark denkleminin çözümlerinin $\bar{x}_1 = 0$ denge noktasına yakınsadıkları tespit edilmiştir. $\bar{x}_2$'nin kararlı olarak belirlenen aralığı dikkate alınarak $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9$, h=1.6 ve x(0)=0.6 değerleri seçilmiş ve (2.5.1) fark denkleminin $\bar{x}_2$ denge noktasının yerel kararlı olduğu Şekil 2.5.2'de görülmüştür. Diğer taraftan, $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.5$, h=5 ve x(0)=0.6 değerlerinin seçilmesi halinde $\bar{x}_3 = \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ hayali denge noktasının kararlı olduğu Şekil 2.5.3'te elde edilmiştir. Son olarak, $r = 2$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0.5, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -1.9$, h=5 ve x(0)=0.6 değerleri için diğer hayali denge noktanın, yani $\bar{x}_4 = \frac{r+\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{r \sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{2}{rh \sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$ denge noktasının yerel kararlı olduğu belirlenmiştir (Şekil 2.5.4).

Buna göre, Orta Nokta Euler metodu ile elde edilen denge noktaları ile diferensiyel denklemin kritik noktaları mukayese edildiğinde bazı küçük aralıklarda Orta Nokta Euler metodu ile elde edilen denge noktalarının kararlılığı ile diferensiyel denklemin kritik noktalarının kararlılığının uyumluluğu gözlenebilmiştir.

Sonuç olarak, Euler metodlarından İleri ve Geri Fark yöntemlerinin uygulanması oldukça kolay olmakla birlikte, birinci yöntemde kararlılık aralığı tespitinde problemler oluşurken ikinci yöntemde ise denkleme ait kararsızlık aralıklarının belirlenmesinde problemler yaşandığı gözlenmiştir.

Orta Nokta Euler yönteminin uygulanması daha önceki iki yöntem ile mukayese edildiğinde, hesaplanması diğerlerine göre oldukça zor ve ayrıca hayali denge noktaları üreten bir yöntem olarak gözlenmiştir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar ile (2.2.1) diferensiyel denkleminin kritik noktaları mukayese edildiğinde hem kararlı hem de kararsızlık aralıklarında uyumsuzluk görülmektedir. Başka bir ifadeyle, diferensiyel denkleminin kritik noktalarının kararlı olması gerektiği aralıklarda Orta Nokta Euler yöntemi ile elde edilen denge noktalarının kararsız, kararsız olması gerektiği aralıklarda da kararlı olduğu tespit edilmiştir.

Küçük h değerleri için Euler metodları verimli sonuçlar doğuruyor görünse de gerçek popülasyon modellemelerinde yukarıda izah edildiği gibi bizi gerçek dışı kararlılık analizlerine ulaştırması endişesi her zaman mevcuttur. Bu nedenle popülasyon modellemelerinde kararlılık analizleri yapılırken bu yöntemlerden farklı, daha kullanışlı ve verimli yöntemlerin kullanılmasına ihtiyaç duyulur. Bölüm 3 ve Bölüm 4'te farklı yöntemler uygulanarak lojistik diferensiyel denklemin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir.

3. BÖLÜM

SABİT KATSAYILI VE TAM DEĞER FONKSİYONLU LOJİSTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde sabit katsayılı ve tam değer fonksiyonlu lojistik diferensiyel denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur. Bu çerçevede oluşturulan sabit katsayılı ve tam değer fonksiyonlu diferensiyel denklemlerin çözümleri fark denklemleri formunda elde edilmiş ve bu fark denklemlerinin kararlılık analizi yapılmıştır. Buradan elde edilen sonuçlar söz konusu diferensiyel denklemlerin kararlılık yapısının incelenmesinde kullanılmıştır. Ayrıca bu bölümde oluşturulan lojistik diferensiyel denklemlerine t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak elde edilen yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiş, elde edilen sonuçlar Allee fonksiyonsuz lojistik diferensiyel denklemlerin çözümleri ile mukayese edilmiştir.

Sabit katsayılı ve tam değer fonksiyonlu lojistik diferensiyel denklemlerin kararlılık yapısının incelenmesinden önce bazı tanım ve teoremler gözden geçirilecektir.

3.1. Fark Denkleminin Kararlılık Analizi İle İlgili Bazı Tanım Ve Teoremler

Herhangi bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve $f \epsilon C[I \times I, I]$ tanımlansın. Bu durumda, ikinci mertebeden lineer olmayan

$$y(n+1) = f\big(y(n), y(n-1)\big) \tag{3.1.1}$$

fark denklemi göz önüne alınsın.

Tanım 3.1.1. Eğer (3.1.1) fark denkleminin $y(-1), y(0) \in I$ değerleri için $|y(0) - \bar{y}| + |y(-1) - \bar{y}| < \delta$ olduğunda $\forall n \geq -1$ için $|y(n) - \bar{y}| < \varepsilon$ olacak şekilde $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ varsa, bu taktirde (3.1.1) denkleminin $\bar{y}$ denge noktasına **yerel kararlıdır** denir [98].

Tanım 3.1.2. Eğer (3.1.1) fark denkleminin $y(-1), y(0) \in I$ değerleri için $|y(0) - \bar{y}| + |y(-1) - \bar{y}| < \delta$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} y(n) = \bar{y}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa ve (3.1.1) denkleminin $\bar{y}$ denge noktası yerel kararlı ise, bu taktirde $\bar{y}$ denge noktası **yerel asimptotik kararlıdır** denir [98].

Tanım 3.1.3. Eğer $\forall y(-1), y(0)$ için $\lim_{n\to\infty} y(n) = \bar{y}$ ise, bu taktirde (3.1.1) fark denkleminin $\bar{y}$ denge noktasına **global çekici** denir [98].

Tanım 3.1.4. Eğer (3.1.1) fark denkleminin $\bar{y}$ denge noktası yerel kararlı ve global çekici ise, bu taktirde $\bar{y}$ denge noktasına **global asimptotik kararlıdır** denir [98].

Tanım 3.1.5. Eğer n=0,1,2,… için

$$y(n + p) = y(n)$$

ise, $\{y(n)\}$ dizisine **p periyotludur** denir [103].

Teorem 3.1.1. (Lineerleştirilmiş Kararlılık Teoremi)

(3.1.1) fark denkleminin $\bar{y}$ denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi

$$x(n+1) - sx(n) - tx(n-1) = 0 \tag{3.1.2}$$

olsun. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{3.1.3}$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) (3.1.3) denkleminin her iki kökünün mutlak değerinin 1 değerinden küçük olması için gerek ve yeter koşul

$$|s| < 1 - t < 2 \tag{3.1.4}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.1.1) fark denkleminin $\bar{y}$ denge noktası **yerel asimptotik kararlıdır**.

ii) (3.1.3) denkleminin her iki kökünün mutlak değerinin 1'den büyük olması için gerek ve yeter koşul

$$|s| < |1 - t| \quad \text{ve} \quad |t| > 1 \tag{3.1.5}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.1.1) fark denkleminin $\bar{y}$ denge noktasına **itici (repeller)** denir.

iii) (3.1.3) denkleminin köklerinden birinin mutlak değerinin 1'den büyükken diğerinin mutlak değeri 1'den küçük olması için gerek ve yeter koşul

$$s^2 + 4t > 0 \quad \text{ve} \quad |s| > |1 - t| \tag{3.1.6}$$

olmasıdır. Bu durumda kararsız olan $\bar{y}$ denge noktasına bir **eyer (saddle) noktası** denir [98].

Tanım 3.1.6. Bir $x(n+1) = f\big(x(n), x(n-1)\big)$ fark denkleminin $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$çözümünü göz önüne alalım.

i) Eğer $k \geq -1$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere

$$\text{ya } k = -1 \text{ veya } k > -1 \text{ olup } x(k-1) < \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ olup } x(m+1) < \bar{x}$$

olacak şekilde $\{x(k), x(k+1), \dots, x(m)\}$ sıralı terimlerin hepsi $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit ise, bu taktirde bu sıralı terimlere $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün pozitif yarı devri denir.

ii) Eğer $k \geq -1$ ve $m \leq \infty$ olmak üzere

$$\text{ya } k = -1 \text{ veya } k > -1 \text{ olup } x(k-1) \geq \bar{x}$$

ve

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ olup } x(m+1) \geq \bar{x}$$

olacak şekilde $\{x(k), x(k+1), \dots, x(m)\}$ sıralı terimlerin hepsi $\bar{x}$ denge noktasından küçük ise, bu taktirde bu sıralı terimlere $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün negatif yarı devri denir [104].

Teorem 3.1.2. $f \in C[(0,\infty) \times (0,\infty), (0,\infty)]$ ve f(x,y) foksiyonu x ve y'ye göre azalan bir fonksiyon olsun. $\bar{y}$, $y(n+1) = f(y(n), y(n-1))$ fark denkleminin pozitif denge noktası ise, bu fark denkleminin bütün salınımlı çözümlerin yarı devir uzunlukları en fazla ikidir [104].

Tanım 3.1.7. Herhangi bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve $f \epsilon C[I \times I, I]$ fonksiyonu göz önüne alınsın ve f fonksiyonun bir sabit noktası $v \epsilon I$ olsun. Ayrıca, v'nin bir B komşuluğunda reel değerli ve sürekli bir V fonksiyonu tanımlansın. Eğer $u \neq v$ olmak üzere B'de her u için

$$V(v) = 0, \; V(u) > 0 \tag{3.1.7}$$

ve

$$\Delta V(u) = V\big(f(u)\big) - V(u) \leq 0 \tag{3.1.8}$$

koşulları sağlanabiliyorsa, bu taktirde V fonksiyonuna f fonksiyonu için v'deki **Lyapunov fonksiyonu** denir. Bu koşullara göre Lyapunov fonksiyonun varlığı v noktasının kararlı olduğu anlamına gelmektedir [95].

Teorem 3.1.3. v, f fonksiyonun sabit bir noktası ve f fonksiyonu da v noktası civarında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer v'de f için bir Lyapunov fonksiyonu mevcut ise bu taktirde v kararlıdır. Eğer $\Delta V(u) < 0$ ise, bu taktirde v asimptotik kararlıdır [95].

Şimdi **Allee effect** ile ilgili bazı temel bilgiler verilecektir.

Allee etkisi (Allee effect), popülasyon yoğunluğu ve birim popülasyon büyüme oranının korelasyonundan oluşan biyolojik bir olaydır. Bu konu ile ilgili ilk bilgiler W.C. Allee tarafından ortaya atılmıştır. Bir Allee veya alt popülasyon etkisi, birim doğum oranı ile birlikte popülasyon yoğunluğunun bir maksimum değere giderken ölüm oranının sabit kalmasıdır. Her iki duruma ait grafiklerin kesişim noktasına popülasyon eşik noktaları denir. Buna göre, eğer popülasyon büyüklüğü eşik değerinin altına düşüyor ise bu taktirde bu türün yok olduğu kabul edilmektedir [105].
Bu Allee etkisi bir çok sonuçlara yol açmaktadır. Bazı türlerde, büyük alanlar içinde popülasyon yoğunluğu azaldığında üremenin artışı güçleşmektedir. Allee etkisi ya küçük popülayonu büyüdüğü küçük alana kısıtlamaktadır ya da popülasyon yavaş yavaş yok olmaktadır [106].
Bu durum bir matematiksel model olarak aşağıdaki gibi izah edilebilir [107];

a) $\forall N \in [0, \infty)$ için $f'(N) < 0$

b)$f(0)$ bir pozitif sonlu sayı olmak üzere

$$N(t+1) = rN(t)f\big(N(t-1)\big) \tag{3.1.9}$$

lojistik fark denklemi göz önüne alınsın. Bu denklem için Allee etkisini görmek amacıyla $r^* > 0$ olmak üzere

$$N(t+1) = r^* a(N(t))N(t)f\big(N(t-1)\big) \tag{3.1.10}$$

denklemi ele alınmaktadır. Burada kullanılan $a(N(t))$ fonksiyonu için biyolojik anlamda aşağıdaki yorumlar yapılır:

a) N=0 ise, a(N)=0, yani üreme yoktur

b) $N \in (0,\infty)$ için $a'(N) > 0$, yani yoğunluk arttıkça Allee etkisi azalır

c) $\lim_{N\to\infty} a(N) = 1$, yani yüksek yoğunlukta Allee etkisi yakınsar

3.2. $\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x([\![t]\!]) - \beta_1 \cdot x([\![t-1]\!])\}$ Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi

Bu kısımda α, β_0, β_1 ve r pozitif reel sayılar, $[\![t]\!]$ $t \in [0,\infty)$ için t'nin tam değeri ve t zamanı göstermek üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t)\{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x([\![t]\!]) - \beta_1 \cdot x([\![t-1]\!])\} \tag{3.2.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. Bu amaçla $t \in [n, n+1)$ alt ararlıklarda (3.2.1) denkleminin bir fark denklemi olarak elde edilen çözümleri göz önüne alınmış ve bunların kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca, (3.2.1) denklemine belirli tipteki Allee fonksiyonları uygulanarak bu denklemin çözümlerinde meydana gelen değişiklikler tespit edilmiş ve elde edilen bulgular geometrik olarak da gösterilmiştir.

Şimdi yeniden (3.2.1) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (3.2.1) diferensiyel denklemi n=0,1,2,… ve $t \in [n, n+1)$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = r \cdot \{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta_0 \cdot x(n) - \beta_1 \cdot x(n-1)\}dt \tag{3.2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$x(t) = x(n) \cdot \exp\left\{\int_n^t \left(r\left(1 - \alpha x(s) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\right)\right) ds\right\} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Eğer (3.2.1) diferensiyel denkleminin başlangıç koşulu pozitif ise, bu taktirde bunun çözümü olan (3.2.3)'te pozitif olacaktır.

Ayrıca (3.2.2) diferensiyel denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} - r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}x(t) = -\alpha r x^2(t), \ n \leq t < n+1 \tag{3.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu da bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $u(t) = \left(x(t)\right)^{1-2}$ dönüşümü yapılarak (3.2.4)'ten

$$\frac{du(t)}{dt} + r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}u(t) = \alpha r, \ n \leq t < n+1 \tag{3.2.5}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denkleminin çözümü ikinci mertebeden bir fark denklemi olarak

$$x(n+1) = \frac{x(n) \cdot \exp\left(r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\right)}{1 + \alpha x(n)\left\{\frac{\exp\left(r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\right) - 1}{\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}}\right\}} \tag{3.2.6}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1) \neq 0 \tag{3.2.7}$$

olmalıdır.

(3.2.1) diferensiyel denkleminin kararlılık analizini yapabilmemiz için (3.2.6) fark denkleminin çözümlerinin global davranışlarını incelemeye ihtiyaç vardır. Bu nedenle (3.2.6) fark denkleminin çözümlerinin kararlılık analizi yapılacak ve elde edilen sonuçların ve bulguların aynı zamanda (3.2.1) diferensiyel denkleminin çözümleri için geçerli olduğu görülecektir.

Şimdi (3.2.6) fark denkleminin kararlılık analizini yapalım.

3.2.1. Yerel Kararlılık Analizi

Bu kesimde (3.2.6) fark denkleminin denge noktalarının yerel kararlılığı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar geometrik olarak gösterilmiştir. Öncellikle (3.2.6) fark denkleminin denge noktalarını ve bunlara karşılık gelen lineerleştirilmiş denklemlerini bulalım.

Tanım 2.1.5 dikkate alınırsa (3.2.6) fark denkleminin denge noktaları

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1} \tag{3.2.8}$$

şeklinde bulunur. (3.2.6) fark denkleminden

$$\begin{aligned} A_1 = {} & [(1-2\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})-(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\beta_0 r\bar{x}] \times \exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\} \\ & \cdot \left(\alpha\bar{x}\cdot\exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}+(1-\alpha\bar{x}-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\right)-\exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\} \\ & \cdot\bar{x}\cdot(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\cdot(\alpha\cdot\exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\} \\ & -\alpha\beta_0 r\bar{x}\cdot\exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}-\alpha-\beta_0)\ , \end{aligned}$$

$$B_1 = [\alpha\bar{x}\cdot\exp\{r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}+(1-\alpha\bar{x}-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})]^2$$

ve

$$\begin{aligned} A_2 = {} & -\beta_1\bar{x}\ \cdot(\alpha\bar{x}+(1-\alpha\bar{x}-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\cdot\exp\{-r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}) \\ & -\bar{x}\cdot(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\cdot(\beta_1\cdot\exp\{-r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}+\beta_1 r(1-\alpha\bar{x}-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x}) \\ & \cdot\exp\{-r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}), \end{aligned}$$

$$B_2 = [\alpha\bar{x}+(1-\alpha\bar{x}-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\exp\{-r(1-\beta_0\bar{x}-\beta_1\bar{x})\}]^2$$

olmak üzere

$$s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial x(n)} = \frac{A_1}{B_1} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial x(n-1)} = \frac{A_2}{B_2}$$

yazılsın.

Buna göre, (3.2.6) fark denkleminden $\bar{x}_1 = 0$ civarında elde edilen lineerleştirilmiş denklemi

$$A_1(\bar{x}_1) = \exp(r), \quad A_2(\bar{x}_1) = 0 \quad \text{ve} \quad B_1(\bar{x}_1) = 1$$

olduğundan

$$y(n+1) - \exp(r)y(n) = 0 \tag{3.2.9}$$

şeklinde bulunur. Bu denkleme ait karakteristik denklemi ise

$$\mu^2 - \exp(r)\mu = 0 \tag{3.2.10}$$

dır.

Benzer şekilde hareket edilerek (3.2.6) fark denkleminin $\bar{x}_2 = \frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}$ civarında lineerleştirilmiş denklemini;

$$\begin{aligned} A_1(\bar{x}_2) = {} & \left[\left(\frac{\alpha-\beta_0}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\beta_0 r\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\right] \cdot \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} \\ & \cdot \left(\alpha\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) \cdot \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}\right) - \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} \cdot \left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) \\ & \cdot \left(\alpha \cdot \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} - \alpha\beta_0 r\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) \cdot \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} - \alpha - \beta_0\right) \\ = {} & \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} \cdot \alpha(\alpha+\beta_0)\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)^2 - (\alpha\beta_0)\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)^2 \cdot \exp\left\{\frac{2\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}, \end{aligned}$$

$$A_2(\bar{x}_2) = -\beta_1\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) - \left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\beta_1 \cdot \exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\},$$

$$B_1(\bar{x}_2) = \left[\alpha\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right) \cdot \exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}\right]^2$$

ve

$$B_2(\bar{x}_2) = \left[\alpha\left(\frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right)\right]^2$$

olmak üzere

$$z(n+1) + \left(\frac{\beta_0-(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}}{\alpha}\right)z(n) - \frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} - 1\right)z(n-1) = 0 \qquad (3.2.11)$$

şeklinde olup bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + \left(\frac{\beta_0-(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}}{\alpha}\right)\lambda - \frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} - 1\right) = 0 \qquad (3.2.12)$$

dir.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.1. $\beta_0 > \alpha + \beta_1 > 2\alpha$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $3\beta_1 > \alpha + \beta_0$ alınsın. Bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$0 < r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) \qquad (3.2.13)$$

olmasıdır.

ii) $3\beta_1 < \alpha + \beta_0$ alınsın. Bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$0 < r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \qquad (3.2.14)$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.1 dikkate alınırsa, (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{\alpha}\left|(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right| < 1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) < 2 \qquad (3.2.15)$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Bu durumda

a) $\frac{1}{\alpha}\left|(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right| < 1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)$

b) $1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) < 2$

eşitsizlikleri dikkate alınmalıdır. (a)'dan

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)-1 < \frac{1}{\alpha}\left((\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right)$$
$$< 1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) \qquad (3.2.16)$$

olduğu göz önüne alındığında

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)-1 < \frac{1}{\alpha}\left((\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right) \qquad (3.2.17)$$

bulunur ve buradan

$$\beta_0-\beta_1-\alpha < (\alpha+\beta_0-\beta_1)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} \qquad (3.2.18)$$

elde edilir. Hipotez gereğince $\beta_0 > \alpha+\beta_1$ olduğundan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < \frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha} \qquad (3.2.19)$$

yazılabilir. (3.2.19) eşitsizliğinin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1} < ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \qquad (3.2.20)$$

elde edilir. (3.2.20) eşitsizliği r'ye göre düzenlenirse

$$r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.21}$$

sonucu bulunmuş olunur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\alpha}\left((\alpha+\beta_0)\cdot \exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right) < 1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) \tag{3.2.22}$$

eşitsizliğinden

$$(\alpha+\beta_0+\beta_1)\cdot \exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < (\alpha+\beta_0+\beta_1) \tag{3.2.23}$$

elde edilir ve $\alpha+\beta_0+\beta_1 > 0$ olduğundan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} > 1 \tag{3.2.24}$$

yazılabilir. $\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1} > 0$ olduğundan (3.2.24) eşitsizliği her zaman doğrudur.

(b)'den

$$\beta_1-\alpha < \beta_1\cdot \exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} \tag{3.2.25}$$

yazılabilir. $\beta_1 > \alpha$ olduğundan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha} \tag{3.2.26}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının logaritmasının alınıp düzenlenmesiyle

$$r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha} \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.27}$$

bulunur. Şimdi (3.2.21) ve (3.2.27) eşitsizliklerini karşılaştıralım. Bu durumda
i) eğer

$$\frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.28}$$

ise, bu taktirde

$$\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha} < \frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha} \tag{3.2.29}$$

eşitsizliği mevcut olmalıdır. Bu ise

$$\alpha+\beta_0 < 3\beta_1 \tag{3.2.30}$$

olması durumunda sağlanır.

ii) eğer

$$\frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.31}$$

ise, bu taktirde

$$\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha} < \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha} \tag{3.2.32}$$

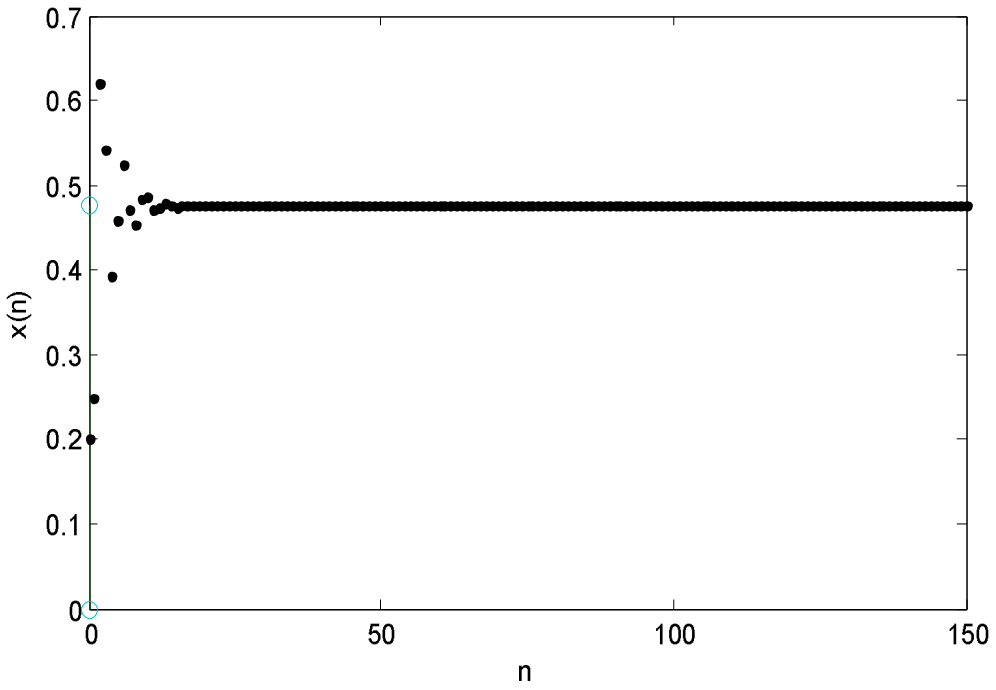
sağlanmalıdır. Bu ise

$$\alpha+\beta_0 > 3\beta_1 \tag{3.2.33}$$

olması durumunda doğrudur.

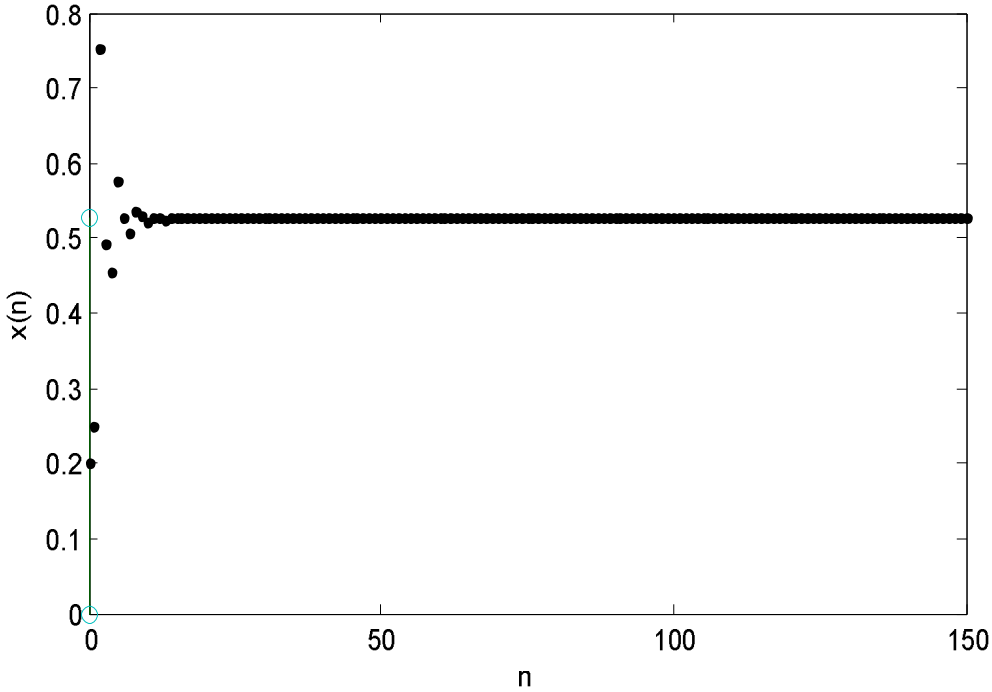
Örnek 3.2.1. Teorem 3.2.1/(i) şartlarını sağlayan $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.6, r = 2,$

$x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri seçilsin. İlk 150 ardışık tekrar için (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlılığı ile ilgili grafik Şekil 3.2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.1. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.6,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.2.2. Teorem 3.2.1/(ii) şartlarını sağlayan $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.4,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerlerini seçebiliriz. İlk 150 ardışık tekrar için (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlılığı ile ilgili grafik Şekil 3.2.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2.2. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.4,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.2.2. $\beta_0 > \alpha + \beta_1 > 2\alpha$ ve $3\beta_1 < \alpha + \beta_0$ olsun. Bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir itici (repeller) nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) < r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.34}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.1'den (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir itici nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\left|\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)\right| > 1 \tag{3.2.35}$$

ve

$$\frac{1}{\alpha}\left|(\alpha+\beta_0)\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right| < \left|1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)\right| \qquad (3.2.36)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Buna göre (3.2.35)'ten

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) > 1 \qquad (3.2.37)$$

eşitsizliği dikkate alındığında

$$\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} > \frac{\beta_1+\alpha}{\alpha} \qquad (3.2.38)$$

olup

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < \frac{\alpha}{\alpha+\beta_1} \qquad (3.2.39)$$

eşitsizliğinin her iki tarafının logaritmasının alınmasıyla

$$r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_1}\right)<0 \qquad (3.2.40)$$

elde edilir. Burada r pozitif bir parametre olduğu için bu eşitsizlik doğru değildir.

Diğer taraftan, (3.2.35)'ten

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) < -1 \qquad (3.2.41)$$

göz önüne alındığında

$$\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < \frac{\beta_1-\alpha}{\beta_1} \qquad (3.2.42)$$

bulunur ve buradan da

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} > \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha} \qquad (3.2.43)$$

elde edilir. Ayrıca $\beta_1 > \alpha$ olduğundan (3.2.43)'ün her iki tarafının logaritmasının alınıp r'ye göre düzenlenmesiyle

$$r > \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha} \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) > 0 \tag{3.2.44}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.2.36)'yı göz önüne alalım. Burada iki durum söz konusudur. Ya

$$\frac{1}{\alpha}\left|(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right| < 1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) \tag{3.2.45}$$

veya

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)-1 < \frac{1}{\alpha}\left|(\alpha+\beta_0)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right| \tag{3.2.46}$$

dir.

(3.2.45) eşitsizliği (3.2.16) ile aynı olup hipotez dikkate alınırsa

$$r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.47}$$

elde edilir.

İlave olarak, (3.2.46)'dan

$$\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right)-1 < \frac{1}{\alpha}\left((\alpha+\beta_0)\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right) \tag{3.2.48}$$

yazılabilir ve

$$\beta_1\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_1-\alpha < (\alpha+\beta_0)\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0 \tag{3.2.49}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, $\beta_0 > \alpha + \beta_1$ olduğundan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\} < \frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha} \tag{3.2.50}$$

bulunur. (3.2.50)'nin her iki tarafının logaritma fonksiyonunun alınıp düzenlenmesiyle (3.2.47) yeniden elde ederiz. Yine, (3.2.46)'dan

$$1-\frac{\beta_1}{\alpha}\left(\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-1\right) > \frac{1}{\alpha}\left((\alpha+\beta_0)\exp\left\{\frac{-\alpha r}{\alpha+\beta_0+\beta_1}\right\}-\beta_0\right) \tag{3.2.51}$$

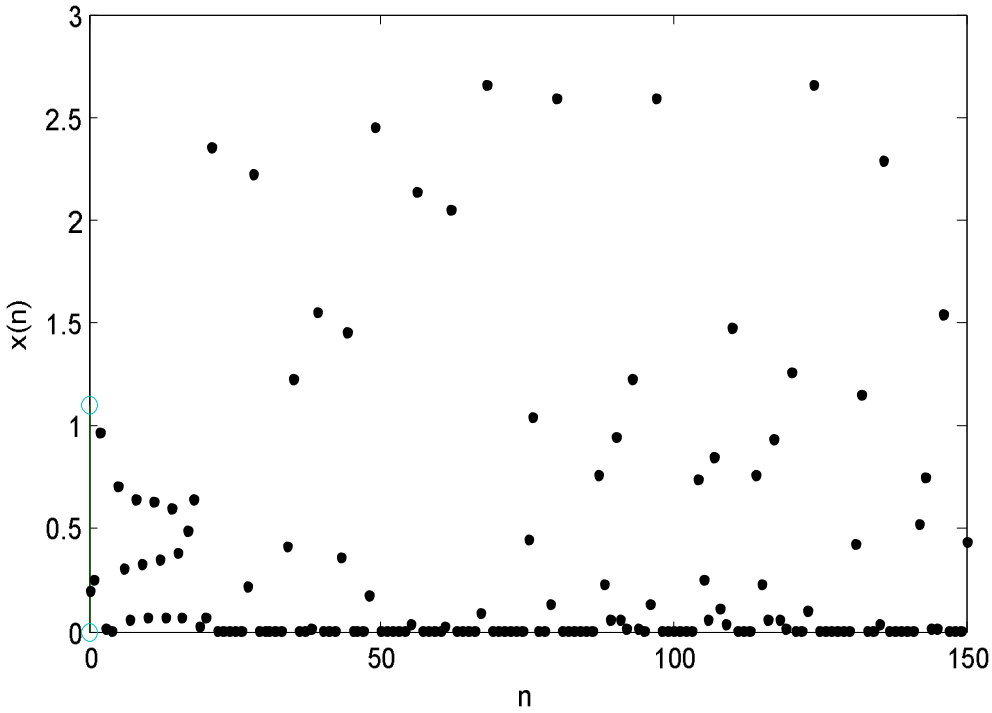
bulunur ve bu eşitsizlik (3.2.22) ile aynı olduğundan $\alpha + \beta_0 + \beta_1 > 0$ hipotezi dikkate alınırsa (3.2.27) elde edilir.

Ayrıca, $\alpha + \beta_0 > 3\beta_1$ hipotezi kullanılarak (3.2.35) ve (3.2.36)'dan

$$\frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) < r < \frac{\alpha+\beta_0+\beta_1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\beta_1-\alpha}\right)$$

eşitziliğini elde etmek mümkündür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.2.3. Teorem 3.2.2 dikkate alınırsa $\alpha = 0.3$, $\beta_0 = 1.2$, $\beta_1 = 0.4$, $r = 2$, $x(-1) = 0.2$, $x(0) = 0.25$ seçilebilir. Bu durumda ilk 150 ardışık tekrar için (3.2.6) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir itici nokta olduğu ile ilgili grafik Şekil 3.2.3'te verilmiştir.



Şekil 3.2.3. $\alpha = 0.3,\ \beta_0 = 1.2,\ \beta_1 = 0.4,\ r = 2,\ x(-1) = 0.2,\ x(0) = 0.25$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.2.3. (3.2.6) fark denkleminin sıfır denge noktası bir eyer noktasıdır.

İspat. (3.2.6) fark denkleminin karakteristik denklemi

$$\mu^2 - \exp(r)\mu = 0 \tag{3.2.52}$$

olmak üzere Teorem 3.1.1'den

$$\mu_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \mu_2 = \exp(r) > 1 \tag{3.2.53}$$

olduğundan bu fark denkleminin sıfır denge noktası bir eyer noktasıdır.

3.2.2. Çözümlerin Sınırlılığı Ve Yarı Devir Uzunlukları

Bu kesimde (3.2.6) fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı ve monoton davranışları incelenecektir. Ayrıca, (3.2.6) fark denkleminin çözümlerinin yarı devir uzunlukları ile ilgili yeter koşullar belirlenecektir.

Teorem 3.2.4. $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi (3.2.6) fark denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) n=0,1,… için $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < 1 < \alpha x(n)$ alınsın. Bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin bütün pozitif çözümleri

$$\left(0, \frac{1}{\alpha(1-\exp(-r))}\right) \tag{3.2.54}$$

aralığındadır.

ii) n=0,1,2,… için $1 < \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < \alpha x(n)$ alınsın. Bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin bütün pozitif çözümleri için

$$x(n) < \frac{x(0)}{\exp(-nr)} - \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\exp(-jr)}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.2.55}$$

dır.

İspat.

i) n=0,1,… için $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < 1 < \alpha x(n)$ alınsın. (3.2.6) fark denkleminin düzenlenmesiyle

$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp(-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\})+\alpha x(n)} \tag{3.2.56}$$

yazılabilir.

n=-1,0,1,…için $x(n) > 0$ ve n=0,1,…için $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < 1 < \alpha x(n)$ olduğundan

$$-r\big(1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\big) > -r \tag{3.2.57}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.2.57)'den

$$\exp\big\{-r\big(1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\big)\big\} > exp\{-r\} \tag{3.2.58}$$

yazılabilir.
Üstelik,

$$-\alpha x(n) < 1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1) < 1-\alpha x(n) < 0 \tag{3.2.59}$$

dır.

(3.2.57)- (3.2.59)'dan

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp\left(-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\right)+\alpha x(n)} \\ &< \frac{x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp(-r)+\alpha x(n)} \\ &< \frac{x(n)}{\{-\alpha x(n)\}\cdot\exp(-r)+\alpha x(n)} \\ &= \frac{1}{\alpha(1-\exp(-r))} \end{aligned}$$

bulunur.
ii) n=0,1,2,… için $1 < \beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1) < \alpha x(n)$ ve n=-1,0,1,…için $x(n) > 0$ olsun. Bu durumda

$$1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1) < 0 \tag{3.2.60}$$

olacağından

$$0 < \frac{1}{\exp\{-r(1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1))\}} < 1 \tag{3.2.61}$$

elde edilir. $1 < \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < \alpha x(n)$ koşulundan ise

$$\frac{-1}{\alpha x(n)} < \frac{1}{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)} < \frac{-1}{\alpha x(n)+\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)} \qquad (3.2.62)$$

yazılabilir.

(3.2.61) ve (3.2.62) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
x(n+1) &= \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp(-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\})+\alpha x(n)} \\
&< \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{-\{\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp(-r)+\alpha x(n)(1-\exp(-r))} \\
&< \frac{\{\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)-1\}x(n)}{\{\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)+\alpha x(n)\}\cdot\exp(-r)} \\
&< \frac{\{\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)-1\}x(n)}{\alpha x(n)\cdot\exp(-r)} \\
&< \frac{\{\alpha x(n)-1\}x(n)}{\alpha x(n)\cdot\exp(-r)} \\
&= \frac{\{\alpha x(n)-1\}}{\alpha\cdot\exp(-r)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

n=0,1,2,… için ardışık tekrar yapılması sonucunda

$$x(1) < \frac{x(0)}{\exp(-r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-r)}$$

$$x(2) < \frac{x(1)}{\exp(-r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-r)} = \frac{1}{\exp(-r)}\left(\frac{x(0)}{\exp(-r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-r)}\right) - \frac{1}{\alpha\exp(-r)} = \frac{x(0)}{\exp(-2r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-2r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-r)}$$

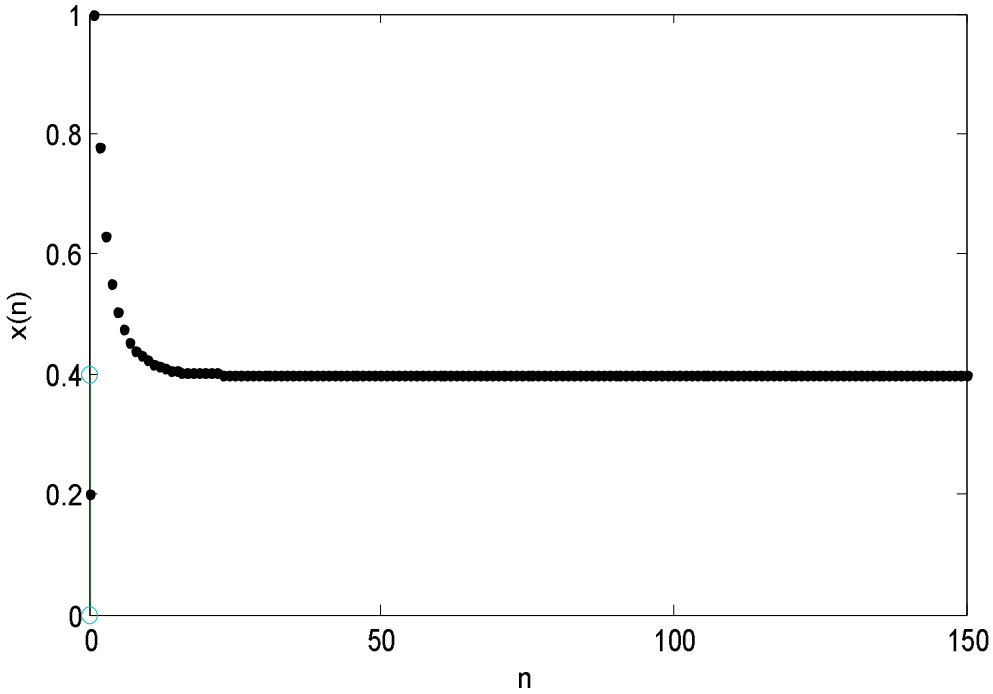
…

$$x(n) < \frac{x(n-1)}{\exp(-r)} - \frac{1}{\alpha\exp(-r)} = \frac{x(0)}{\exp(-nr)} - \frac{1}{\alpha\exp(-nr)} - \frac{1}{e^{-(n-1)r}\alpha\exp(-(n-1)r)} - \cdots - \frac{1}{\alpha\exp(-r)}$$

$$= \frac{x(0)}{\exp(-nr)} - \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\exp(-jr)}$$

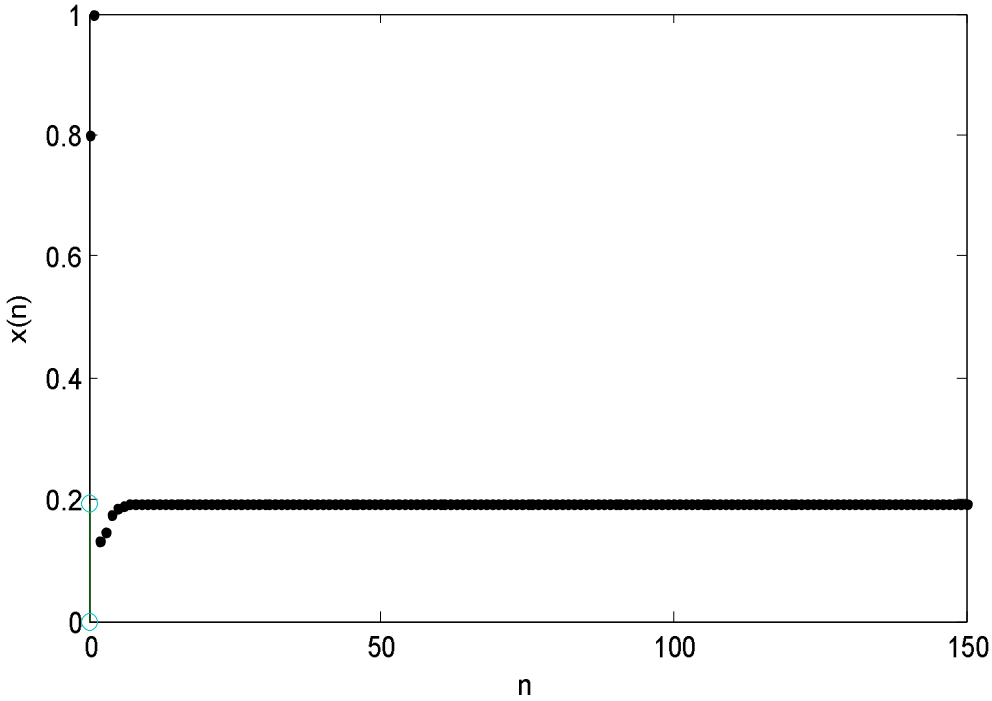
bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.2.4. Teorem 3.2.4/(i) dikkate alındığında $\alpha = 2$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = 0.3$, $r = 0.25$, $x(-1) = 0.2$, $x(0) = 1$ ve e=2.7 seçilebilir. Bu durumda (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin (0,2.27444) ararlığında olduğu görülür. İlk 150 ardışık tekrar için çözüm dizisinin grafiği Şekil 3.2.4'te verilmiştir.



Şekil 3.2.4. $\alpha = 2$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = 0.3$, $r = 0.25$, $x(-1) = 0.2$, $x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.2.5. Teorem 3.2.4 / (ii)'ye göre $\alpha = 3$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 0.2$, $r = 0.9$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 1$ ve e=2.7 seçildiğinde (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin $(0, 0.5294 - 0.2706(2.7)^{0.9n})$ ararlığında olduğu görülür. İlk 150 ardışık tekrar için çözüm dizisinin grafiği Şekil 3.2.5'te verilmiştir.



Şekil 3.2.5. $\alpha = 3,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.2,\ r = 0.9,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.2.5. $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi (3.2.6) fark denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) n=0,1,2,… için $1 < \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1)$ ise, bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton azalandır.

ii) n=0,1,2,… için $1 > \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) > \alpha x(n)$ ise, bu taktirde (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton artandır.

İspat.

i) (3.2.6) denklemi yeniden düzenlenirse

$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot \exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}+\alpha x(n)} \tag{3.2.63}$$

veya

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot \exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}+\alpha x(n)} \tag{3.2.64}$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin monoton azalan olabilmesi için

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} < 1$$

olmalı, başka bir ifadeyle

$$\frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot \exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}+\alpha x(n)} < 1 \qquad (3.2.65)$$

sağlanmalıdır.

Diğer taraftan, $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) > 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1) - \alpha x(n) < 0 \qquad (3.2.66)$$

ve

$$\{1 - \alpha x(n) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} \cdot \exp\{-r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\} + \alpha x(n) < 0 \quad (3.2.67)$$

dır. (3.2.66) ve (3.2.67) eşitsizlikleri dikkate alındığında (3.2.64) eşitsizliği elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

ii) Eğer

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} > 1$$

ise, bu durumda (3.2.63) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton artandır. Çünkü, $\alpha x(n) < \beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) < 1$ koşulu dikkate alınırsa

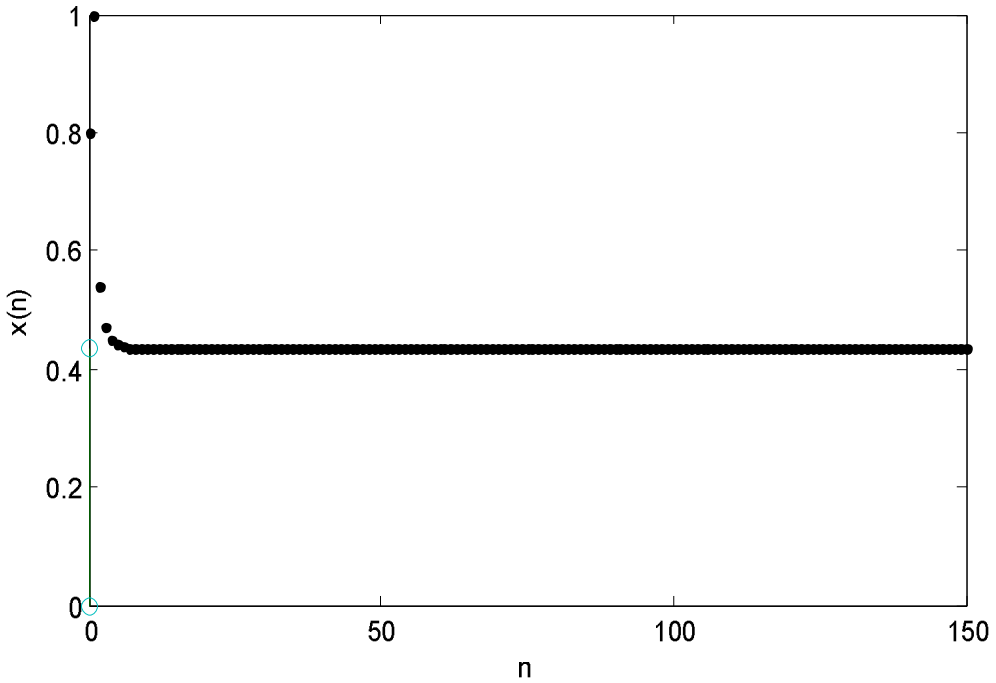
$$1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1) - \alpha x(n) > 0 \qquad (3.2.68)$$

ve

$$\{1 - \alpha x(n) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} \cdot \exp\{-r\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\} + \alpha x(n) > 0 \quad (3.2.69)$$

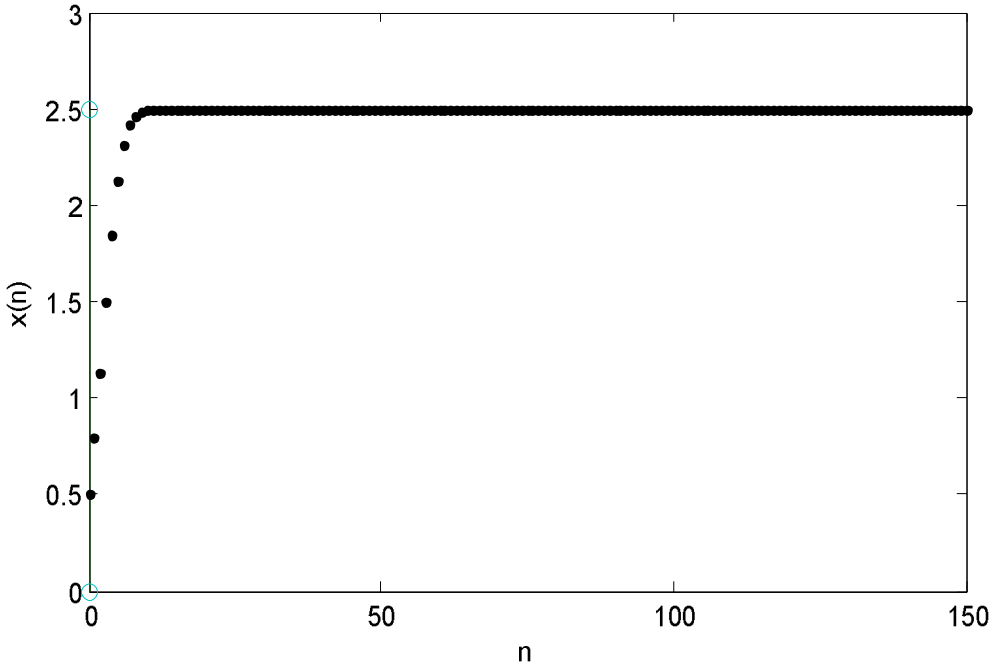
bulunur ki bu eşitsizlikler $\frac{x(n+1)}{x(n)} > 1$ olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.2.6. Teorem 3.2.5/(i) dikkate alındığında $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,$ $x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ seçilebilir. Bu durumda ilk 150 ardışık tekrar için (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin grafiği Şekil 3.2.6'da verilmiştir.



Şekil 3.2.6. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.2.7. Teorem 3.2.6 / (ii) dikkate alındığında $\alpha = 0.1,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.1,$ $r = 0.5,\ x(-1) = 0.5,\ x(0) = 0.8$ seçilsin. Bu durumda, ilk 150 ardışık tekrar için (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin grafiği Şekil 3.2.7'de verilmiştir.



Şekil 3.2.7. $\alpha = 0.1,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.5,\ x(0) = 0.8$ değerleri için (3.2.6) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.2.6. $\alpha > 2\beta_0$, $r > \frac{\alpha+\beta_0}{\alpha}$ olsun ve $f \in C[(0,\infty)\times(0,\infty),(0,\infty)]$ olmak üzere

$$f(x,y) = \frac{\{1-\beta_0 x-\beta_1 y\}x}{\{1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y\}\exp\{-r\{1-\beta_0 x-\beta_1 y\}\}+\alpha x} \tag{3.2.70}$$

yazılsın. Eğer

$$x \in \left(\frac{1}{\beta_0 r}, \frac{(\alpha+\beta_0)}{\alpha\beta_0 r}\right) \tag{3.2.71}$$

ve

$$y \in \left(\frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_0 r}, \infty\right) \quad \text{veya} \quad y \in \left(\frac{\alpha(r-1)-\beta_0}{\alpha\beta_1 r}, \frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_1 r}\right) \tag{3.2.72}$$

ise, bu taktirde f fonksiyonu x ve y'ye göre azalandır.

İspat. (3.2.70) fonksiyonunun x ve y'ye göre kısmi türevlerini alalım. Bu durumda

$$C_1 = -\alpha\beta_0 x^2 + \exp\{-r(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y)\}\cdot[(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y)$$

$$\cdot\{(1+\beta_0^2 rx^2+\beta_0\beta_1 rxy)-(\beta_1 y+2\beta_0 x+\beta_0 rx)\}+(\alpha+\beta_0)\cdot x\cdot(1-\beta_0 x-\beta_1 y)]$$

ve

$$D_1=\{(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y)\cdot\exp\{-r(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y)\}+\alpha x\}^2$$

olmak üzere

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{C_1}{D_1} \tag{3.2.73}$$

dir.

Eğer

$$y>\frac{1}{\beta_1}-\frac{\beta_0}{\beta_1}x \tag{3.2.74}$$

ve

$$x>\frac{1}{\beta_0 r} \tag{3.2.75}$$

olmak üzere

$$y>\frac{-\beta_0^2 rx^2+\beta_0(r+2)x-1}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} \tag{3.2.76}$$

ve

$$y>\frac{1}{\beta_1}-\frac{\alpha+\beta_0}{\beta_1}x \tag{3.2.77}$$

veya

$$y<\frac{-\beta_0^2 rx^2+\beta_0(r+2)x-1}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} \tag{3.2.78}$$

ve

$$y < \frac{1}{\beta_1} - \frac{\alpha+\beta_0}{\beta_1} x \tag{3.2.79}$$

şeklinde ise, (3.2.73) kesin olarak negatiftir.

(3.2.74) ve (3.2.77) eşitsizliklerin taraf tarafa toplanması ile

$$2y > \frac{2}{\beta_1} - \frac{\alpha+2\beta_0}{\beta_1} x \tag{3.2.80}$$

elde edilir. (3.2.78)'in 2 ile çarpılıp (3.2.80)'den taraf tarafa farkının alınmasıyla

$$\frac{\alpha\beta_0 r}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} x^2 - \frac{(\alpha-2\beta_0)}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} x > 0 \tag{3.2.81}$$

yazılabilir.

Buna göre, $\alpha > 2\beta_0$ olmak üzere (3.2.81)'den

$$x \in \left(\frac{\alpha-2\beta_0}{\alpha\beta_0 r}, \infty\right) \tag{3.2.82}$$

bulunur. (3.2.82)'yi (3.2.75) ile birlikte ele aldığımızda

$$\frac{\alpha-2\beta_0}{\alpha\beta_0 r} < \frac{1}{\beta_0 r} \tag{3.2.83}$$

olduğundan

$$x \in \left(\frac{1}{\beta_0 r}, \infty\right) \tag{3.2.84}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.2.78) ile (3.2.79)'un taraf tarafa toplanmasıyla

$$2y < \frac{-\beta_0 r(2\beta_0+\alpha)x^2+(3\beta_0+2\beta_0 r+\alpha)x-2}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} \tag{3.2.85}$$

yazılabilir. (3.2.74)'ün 2 ile çarpılıp elde edilen eşitsizlikle (3.2.85) eşitsizliği ile birlikte değerlendirilirse

$$\frac{2}{\beta_1} - \frac{2\beta_0}{\beta_1}x < \frac{-\beta_0 r(2\beta_0+\alpha)x^2+(3\beta_0+2\beta_0 r+\alpha)x-2}{\beta_1(\beta_0 rx-1)} \tag{3.2.86}$$

ve buradan da

$$\frac{\alpha\beta_0 r}{\beta_1(\beta_0 rx-1)}x^2 - \frac{(\alpha+\beta_0)}{\beta_1(\beta_0 rx-1)}x < 0 \tag{3.2.87}$$

elde edilir. Bu ise

$$x \in \left(0, \frac{(\alpha+\beta_0)}{\alpha\beta_0 r}\right) \tag{3.2.88}$$

olması demektir.
(3.2.84) ve (3.2.88) dikkate alınırsa

$$x \in \left(\frac{1}{\beta_0 r}, \frac{(\alpha+\beta_0)}{\alpha\beta_0 r}\right) \tag{3.2.89}$$

bulunur. Buradan da f(x,y) fonksiyonun x'e göre azalandır sonucuna ulaşılır.
Benzer şekilde hareket edilerek

$$C_2 = -\alpha\beta_1 x^2 + \exp\{-r(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y)\}\cdot[(1-\alpha x-\beta_0 x-\beta_1 y) \cdot \left(\beta_0\beta_1 rx^2 + \beta_1^2 rxy - \beta_1(r+1)x + \beta_1 x(1-\beta_0 x-\beta_1 y)\right)]$$

olmak üzere f(x,y) fonksiyonun y'ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{C_2}{D_1} \tag{3.2.90}$$

olsun. Aşağıdaki eşitsizlikleri dikkate alalım.

$$x > \frac{1}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y \,, \tag{3.2.91}$$

$$x > \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y \,, \tag{3.2.92}$$

$$x > \frac{1}{\alpha+\beta_0} - \frac{\beta_1}{\alpha+\beta_0} y \,, \tag{3.2.93}$$

$$x < \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y \,, \tag{3.2.94}$$

$$x < \frac{1}{\alpha+\beta_0} - \frac{\beta_1}{\alpha+\beta_0} y \tag{3.2.95}$$

dir. Eğer (3.2.91), (3.2.92), (3.2.93) veya (3.2.91), (3.2.94), (3.2.95) birlikte sağlanırsa (3.2.90) kesin olarak negatiftir. (3.2.91) ve (3.2.92)'nin taraf tarafa toplanmasıyla

$$2x > \frac{1}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y + \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y \tag{3.2.96}$$

elde edilir. (3.2.93)'ün ise 2 ile çarpılması sonucunda

$$2x > \frac{2}{\alpha+\beta_0} - \frac{2\beta_1}{\alpha+\beta_0} y \tag{3.2.97}$$

bulunur.

(3.2.96) ve (3.2.97) birlikte dikkate alınırsa

a) $\frac{2}{\alpha+\beta_0} - \frac{2\beta_1}{\alpha+\beta_0} y < \frac{1}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y + \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y$

b) $\frac{1}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y + \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0} y < \frac{2}{\alpha+\beta_0} - \frac{2\beta_1}{\alpha+\beta_0} y$

şeklinde iki farklı durum ortaya çıkar. (a)'dan

$$y < \frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_1 r} \,, \tag{3.2.98}$$

(b)'den de

$$y > \frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_1 r} \tag{3.2.99}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan (3.2.94) ve (3.2.95)'nin taraf tarafa toplanmasıyla

$$2x < \frac{1}{\alpha+\beta_0} - \frac{\beta_1}{\alpha+\beta_0}y + \frac{r+1}{\beta_0 r} - \frac{\beta_1}{\beta_0}y \tag{3.2.100}$$

yazılabilir. (3.2.91)'in 2 ile çarpılıp elde edilen eşitsizlikle (3.2.100) eşitsizliğinin birlikte düzenlenmesiyle

$$y > \frac{\alpha(r-1)-\beta_0}{\alpha\beta_1 r} \tag{3.2.101}$$

elde edilir. Buna göre (3.2.98) ve (3.2.101) birlikte dikkate alındığında

$$y \in \left(\frac{\alpha(r-1)-\beta_0}{\alpha\beta_1 r}, \frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_1 r}\right), \tag{3.2.102}$$

(3.2.99) ve (3.2.101)'den ise

$$y \in \left(\frac{\alpha(2r+1)+\beta_0}{2\alpha\beta_1 r}, \infty\right) \tag{3.2.103}$$

elde edilir. Yani, verilen koşullarda f(x,y) fonksiyonun y'ye göre azalandır.

Sonuç 3.2.1. Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.2.6 dikkate alınırsa Teorem 3.2.6'da elde edilen koşullar (3.2.6) fark denkleminin bütün salınımlı çözümlerinin yarı devir uzunluklarının en fazla iki olması için gerekli koşullardır.

3.2.3. Pozitif Denge Noktasının Global Asimptotik Kararlılığı

Bu kesimde

$$x(n+1)=\frac{\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\}+\alpha x(n)} \tag{3.2.104}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olabilmesi için yeter koşullar elde edilmiştir.

Teorem 3.2.7. n=0,1,2,… için $\beta_0x(n)+\beta_1x(n-1)>1$ olsun. Üstelik, (3.2.104) fark denkleminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlı olsun. Eğer

$$x(n)>\frac{2}{\alpha+\beta_0+\beta_1} \tag{3.2.105}$$

ise, bu taktirde (3.2.104) fark denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. n=-1,0,1,… için

$$V(n)=[x(n)-\overline{x}_2]^2 \tag{3.2.106}$$

olacak şekilde uygun bir Lyapunov fonksiyonu seçilmiş olsun. Bu taktirde

$$\Delta V(n)=V(n+1)-V(n)=\{x(n+1)-x(n)\}\{x\{n+1\}+x(n)-2\overline{x_2}\} \tag{3.2.107}$$

yazılabilir. (3.2.104)'ten,

$$x(n+1)-x(n)=\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}x(n)$$
$$\cdot\frac{1}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\}+\alpha x(n)}-x(n) \tag{3.2.108}$$

ve

$$x(n+1)-x(n)=\frac{\{1-\alpha x(n)-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}x(n)\left(1-e^{-r\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}}\right)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0x(n)-\beta_1x(n-1)\}\}+\alpha x(n)} \tag{3.2.109}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x\{n+1\}+x(n)-2\bar{x}_2=\frac{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}e^{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}}+\alpha x(n)}$$

$$\cdot\frac{\big((\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)-2\big)+(\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+\alpha x(n)\big((\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)-2\big)}{\alpha+\beta_0+\beta_1}$$

$$=\frac{\big((\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)-2\big)}{\left[\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}+\alpha x(n)\right]\cdot(\alpha+\beta_0+\beta_1)}$$

$$\cdot\left[\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp\big\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\big\}\right.$$

$$\left.+\alpha x(n)+(\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\right]$$

bulunur. Buna göre (3.2.109) ve bu son ifade taraf tarafa çarpılırsa

$$\{x(n+1)-x(n)\}\cdot\{x\{n+1\}+x(n)-2\bar{x}_2\}$$

$$=\frac{1}{\Big(\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\exp\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\}+\alpha x(n)\Big)^2(\alpha+\beta_0+\beta_1)}$$

$$\cdot\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\cdot\Big(1-\exp\big\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\big\}\Big)\cdot x(n)$$

$$\cdot\Big[\big((\alpha+\beta_0+\beta_1)x(n)-2\big)\cdot(\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}$$

$$\cdot\exp\big\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\big\}+\alpha x(n)\Big)+(\alpha+\beta_0+\beta_1)\cdot x(n)$$

$$\cdot\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\Big]$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\beta_0 x(n)+\beta_1 x(n-1)>1$ olduğundan

$$1-\exp\big\{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\big\}<0\ , \tag{3.2.110}$$

$$1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)<0 \tag{3.2.111}$$

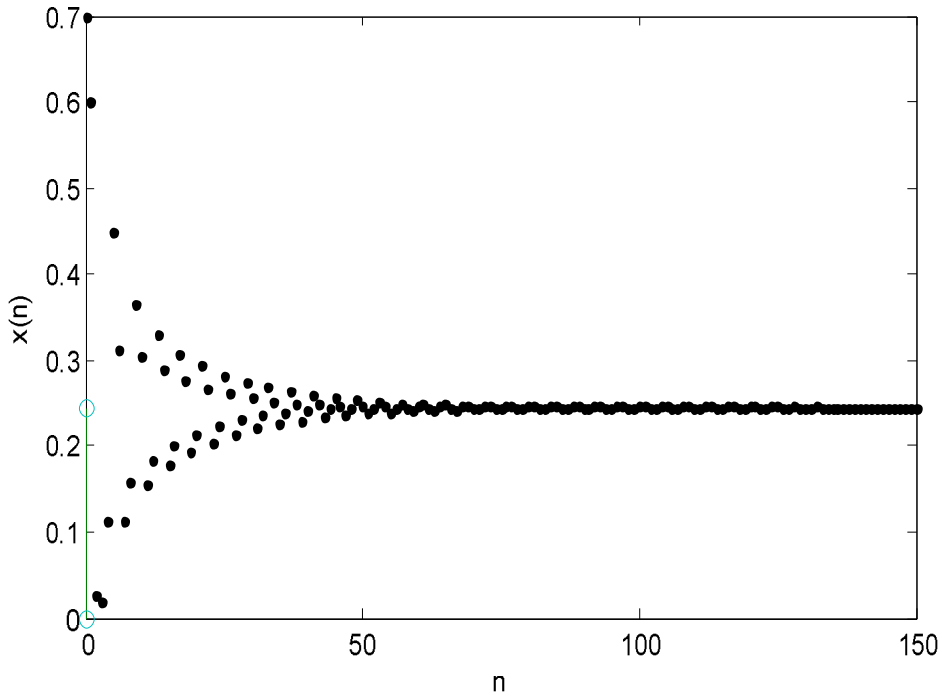
ve

$$\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}e^{-r\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}}+\alpha x(n)<0 \tag{3.2.112}$$

dir.

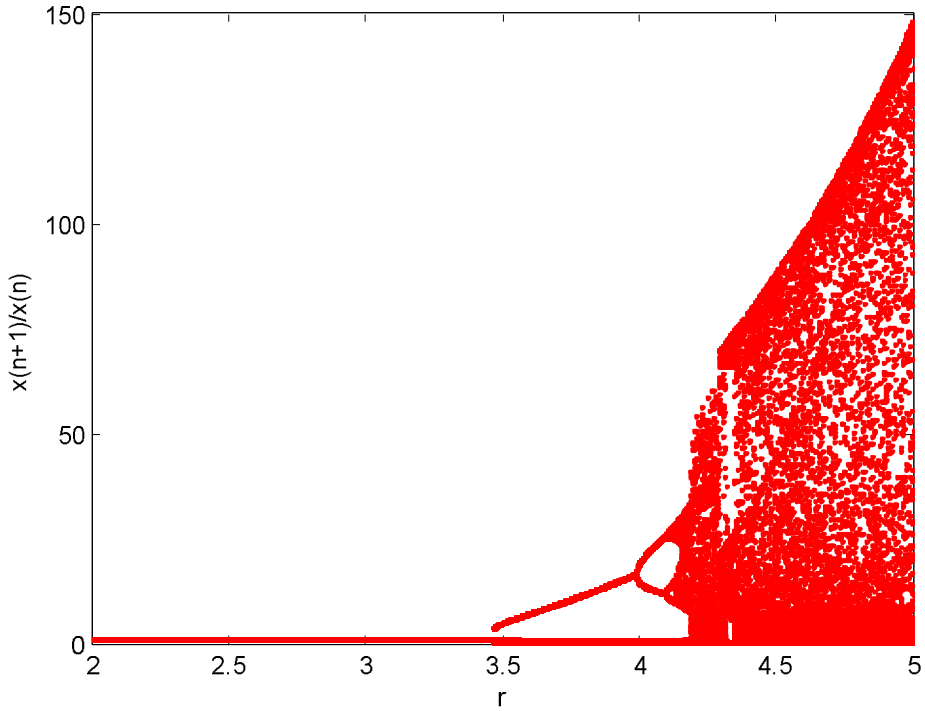
Buna göre, $x(n) > \frac{2}{\alpha+\beta_0+\beta_1}$ hipotezi dikkate alınırsa $\Delta V(n) < 0$ elde edilir. Bu ise (3.2.104) fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğu anlamına gelir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.2.8. Teorem 3.2.7 dikkate alınırsa $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1.88$, $r = 2$, $x(-1) = 0.7$, $x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 150 ardışık tekrar için (3.2.104) fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafik Şekil 3.2.8'de verilmiştir.



Şekil 3.2.8. $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1.88$, $r = 2$, $x(-1) = 0.7$, $x(0) = 0$ değerleri için (3.2.104) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.2.9. $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 0.5$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ için (3.2.104) fark denkleminin çözümlerinin grafiği Şekil 3.2.9'da verilmiştir.



Şekil 3.2.9. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ için (3.2.104) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

3.2.4. (3.2.1) Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi

Bu kesimde (3.2.1) lojistik diferensiyel denklemine t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak elde edilen yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenecektir. Yerel ve global kararlılık analizinin teorik ispatı Kesim 3.2.1 ve Kesim 3.2.3 gibi olup bu kesimde teoremlerin sadece ifadeleri verilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar geometrik olarak gösterilmiş olup, (3.2.6) fark denkleminin çözümleri ile mukayeseleri yapılmıştır.

Şimdi, $\gamma > 0$ olmak üzere

$$a\big(x([\![t]\!])\big) = \frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.2.113}$$

Allee fonksiyonunu tanımlayalım ve $\bar{x}$, (3.2.1) diferensiyel denkleminin pozitif kritik noktası olmak üzere

$$r^* = \frac{r}{a(\bar{x})} \tag{3.2.114}$$

olsun. t zamanı için (3.2.1) diferensiyel denklemine bu Allee fonksiyonunu uygularsak

$$\frac{dx(t)}{dt} = r^* x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\}\frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.2.115}$$

lojistik diferensiyel denklemini elde ederiz. Burada r^* yeni popülasyon oranıdır. Şimdi bu denkleminin çözümlerini inceleyeceğiz.

$t \in [n, n+1)$ için (3.2.115) diferensiyel denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} - r^*\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\frac{x(n)}{\gamma + x(n)}x(t) = -\alpha r^*\big(x(t)\big)^2\frac{x(n)}{\gamma + x(n)} \tag{3.2.116}$$

formunda bir Bernoulli diferensiyel denklemidir ve $t \to n+1$ iken bu denklemin çözümü

$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\left(\exp\left\{-r^*\{1-\beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\}\frac{x(n)}{\gamma + x(n)}\right\}\right) + \alpha x(n)} \tag{3.2.117}$$

fark denklemi olarak bulunur. Burada , $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \neq 1$ dir. Bu denklemin denge noktaları (3.2.6) fark denklemi ile aynıdır ve (3.2.117) fark denkleminin $\bar{x} = \frac{1}{\alpha + \beta_0 + \beta_1}$ pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda elde edilen denklemin kararkteristik denklemi

$$\mu^2 + \left\{\frac{\beta_0 - (\alpha+\beta_0)\left(\exp\left\{-\frac{\alpha r^*}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)\gamma+1\right)}\right\}\right)}{\alpha}\right\}\mu + \left\{\frac{\beta_1\left(1-\left(\exp\left\{-\frac{\alpha r^*}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)\gamma+1\right)}\right\}\right)\right)}{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.2.118}$$

şeklindedir.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.2.8. $\beta_0 > \alpha + \beta_1 > 2\alpha$ olsun. Bu durumda (3.2.117) fark denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\alpha + \beta_0 < 3\beta_1$ olmak üzere (3.2.117) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$r^* < \frac{(\alpha+\beta_0+\beta_1)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)\gamma+1\right)}{\alpha} \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right) \tag{3.2.119}$$

olmasıdır.

ii) $\alpha + \beta_0 > 3\beta_1$ olmak üzere (3.2.117) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$r^* < \frac{(\alpha+\beta_0+\beta_1)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)\gamma+1\right)}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha+\beta_0-\beta_1}{\beta_0-\alpha-\beta_1}\right) \tag{3.2.120}$$

olmasıdır.

İspat. İspatı Teorem 3.2.1 gibi benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.9. Teorem 3.2.8'deki koşulların mevcut olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1) < 0$$

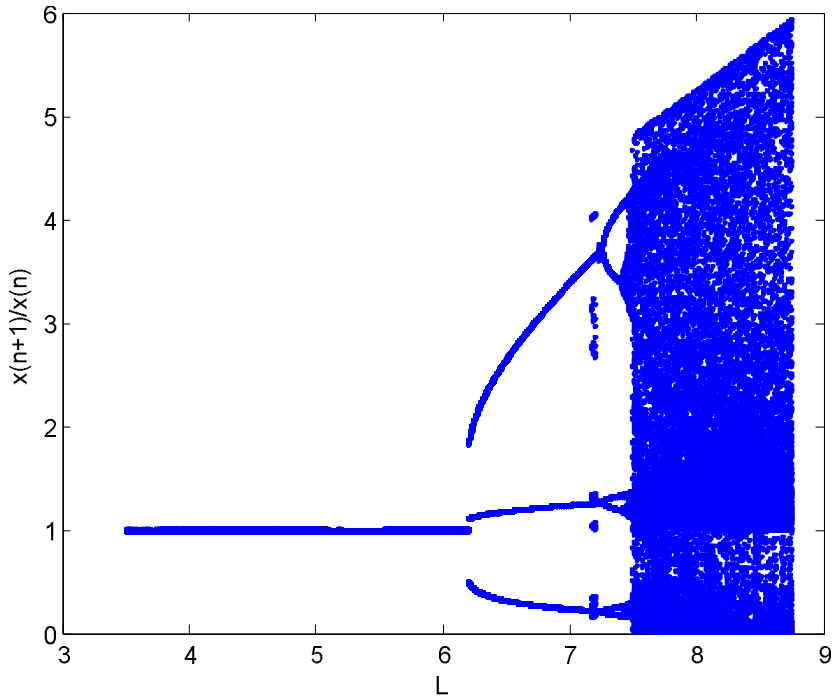
olsun. Eğer

$$x(n) < \frac{2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)} \tag{3.2.121}$$

ise, bu taktirde (3.2.117) fark denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. İspatı Teorem 3.2.7 gibi benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.2.10. Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9 dikkate alındığında $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 0.5$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$, $r \in [3,9]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ olmak üzere (3.2.117) fark denkleminin çözümlerinin grafiği Şekil 3.2.10'da verilmiştir.



Şekil 3.2.10. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.117) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

Benzer şekilde t-1 zamanı için

$$a\big(x([\![t-1]\!])\big) = \frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.2.122}$$

Allee fonksiyonunu (3.2.1)'e uygularsak

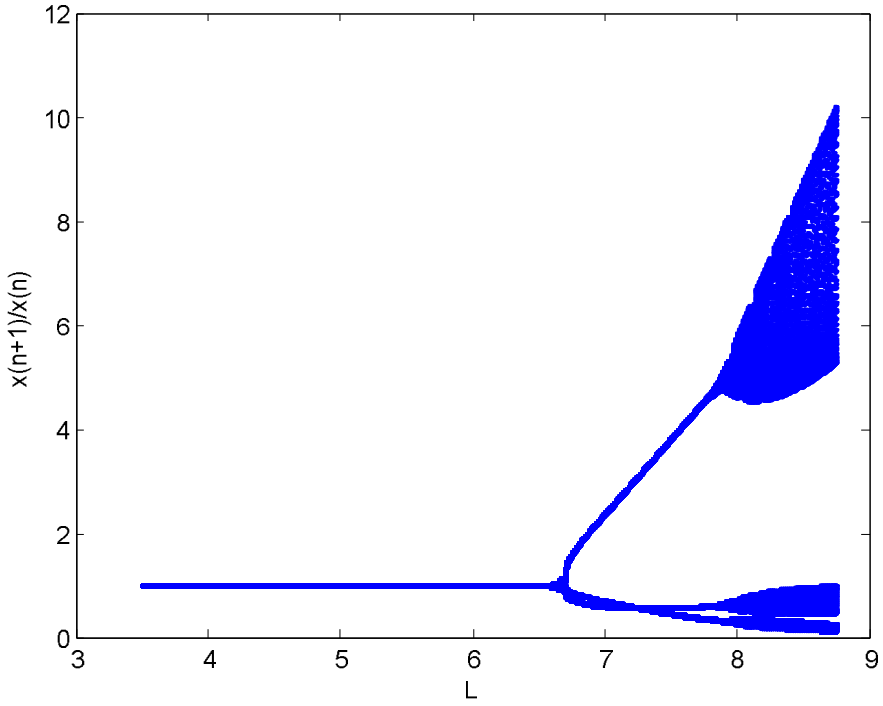
$$\frac{dx(t)}{dt} = r^* x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\}\frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.2.123}$$

lojistik diferensiyel denklemi elde edilir. $t \in [n, n+1)$ ve $t \to n+1$ iken bu denklemin çözümü

$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\left(\exp\left\{-r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\frac{x(n-1)}{\gamma+x(n-1)}\right\}\right)+\alpha x(n)} \quad (3.2.124)$$

şeklinde bir fark denklemidir Burada yine, $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \neq 1$ olmak üzere (3.2.124) denkleminin denge noktaları (3.2.6) ile aynıdır ve (3.2.124) fark denkleminin $\bar{x} = \frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}$ pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda (3.2.118) elde edilir. Böylece, Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9'daki kararlılık koşulları (3.2.124) fark denklemi için de geçerli olur.

Örnek 3.2.11. Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9 dikkate alındığında $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 0.5$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$, $r \in [3,9]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ olmak üzere (3.2.124) fark denkleminin çözümlerinin grafiği Şekil 3.2.11'de verilmiştir.



Şekil 3.2.11. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9\ , \gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.124) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

Son olarak, t-1 ve t zamanı için

$$a(x([\![t-1]\!]), [\![t]\!]) = \frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])}, \tag{3.2.125}$$

$$a(x([\![t-1]\!]), [\![t]\!]) = \frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.2.126}$$

Allee fonksiyonlarını (3.2.1)'e uygularsak sırasıyla

$$\frac{dx(t)}{dt} = r^* x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\}\frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.2.127}$$

ve

$$\frac{dx(t)}{dt} = r^* x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\}\frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.2.128}$$

lojistik diferensiyel denklemleri elde edilirken, $t \in [n, n+1)$ ve $t \to n+1$ iken denklemlerin çözümleri sırasıyla

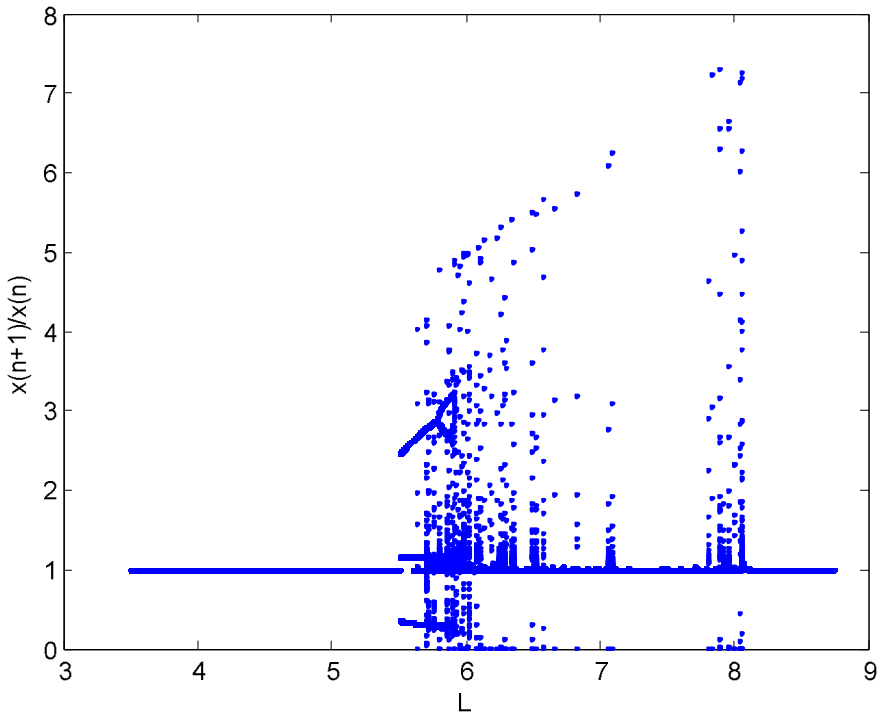
$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\left(\exp\left\{-r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\frac{x(n)}{\gamma+x(n-1)}\right\}\right)+\alpha x(n)} \quad (3.2.129)$$

ve

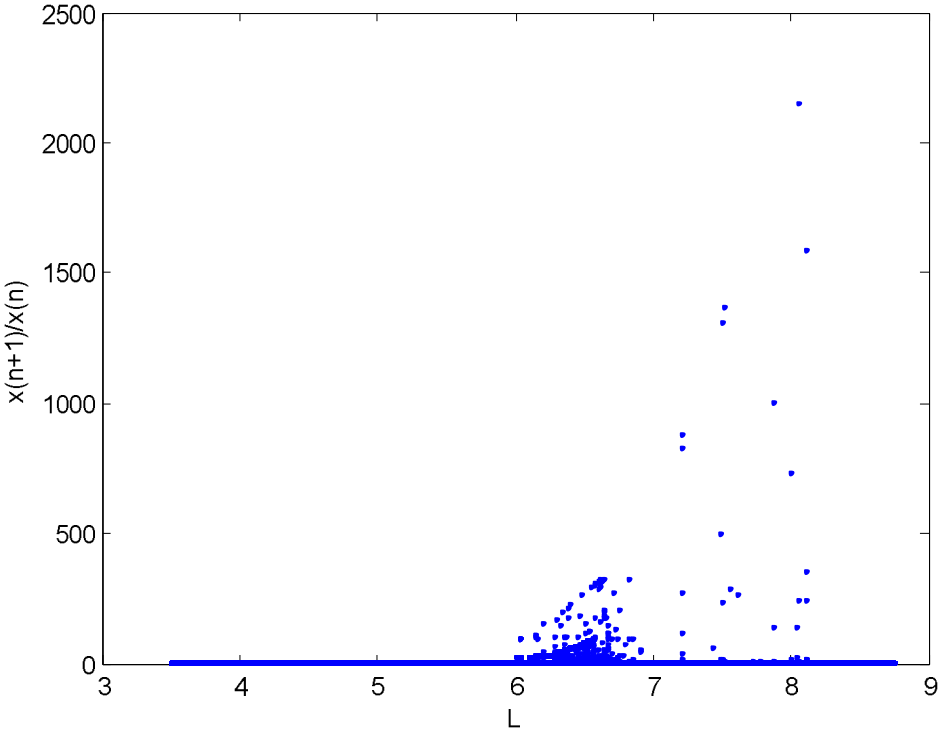
$$x(n+1) = \frac{\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}x(n)}{\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\left(\exp\left\{-r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}\frac{x(n-1)}{\gamma+x(n)}\right\}\right)+\alpha x(n)} \quad (3.2.130)$$

fark denklemleridir. Burada , $\beta_0 x(n) + \beta_1 x(n-1) \neq 1$ dir. (3.2.129) ve (3.2.130) denkleminin denge noktaları (3.2.6) ile aynıdır. Ayrıca, (3.2.129) ve (3.2.130) fark denklemlerin $\bar{x} = \frac{1}{\alpha+\beta_0+\beta_1}$ pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda (3.2.118) karakteristik denklemi elde edilir. Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9'daki kararlılık koşulları (3.2.129) ve (3.2.130) fark denklemleri için de geçerli olacaktır.

Örnek 3.2.12. Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.2.9 dikkate alındığında $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 0.5$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$, $r \in [3,9]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ olmak üzere (3.2.129) ve (3.2.130) fark denklemlerinin çözümlerinin grafikleri sırasıyla Şekil 3.2.12.(a) ve Şekil 3.2.12.(b)'de verilmiştir.



Şekil 3.2.12.(a) $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 0.8,\ \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9\ ,\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.129) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması



Şekil 3.2.12.(b) $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 0.8,\ \beta_1 = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9\ ,\gamma = 0.5$ ve $r \in [3,9]$ olmak üzere (3.2.130) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

3.2.5. Kesim 3.2 İçin Genel Değerlendirme

Bu kesimde, MATLAB programını kullanarak elde edilen teorik sonuçlar grafiklerle sunulmuş, oluşturulan fark denklemlerinin başlangıç koşulları $x(-1)$ ve $x(0)$ popülasyon yoğunluğu olarak seçilmiştir. Fark denklemlerin çözümlerine ait oluşturulan iki boyutlu grafikler, kararlılık analizinde bulunan teorik sonuçları desteklemek amacıyla kullanılmıştır. Bu bölümde Kesim 3.2.1'de verilen Teorem 3.2.1-3.2.3 ve Kesim 3.2.3'te Teorem 3.2.4, (3.2.6) fark denkleminin pozitif çözümlerinin pozitif denge noktası civarındaki yerel ve global davranışlarını karakterize etmiş, Örnek 3.2.1-3.2.3 ve Örnek 3.2.8'de bunlar grafiksel olarak gösterilmiştir. Ayrıca, (3.2.6) fark denkleminin çözümünün bifurcation diyagramı incelendiğinde (Örnek 3.2.9), $r \in [2,5]$ olmak üzere r, 3.8 değerine yaklaştığında yerel karalılık bozulmakta ve 4.3 değerine yaklaştığında kaos ortaya çıkmaktadır. Kesim 3.2.4'te ise (3.2.1) diferensiyel denklemi ve Allee sabiti $\gamma = 0.5$ olmak üzere farklı t değerleri için Allee fonksiyonları birlikte

incelenmiştir. Bu çerçevede Örnek 3.2.9'da kullanılan parametre değerleri aynı olmak üzere Allee etkisinin kararlılık aralığını genişlettiğini ($r \in [3,7]$ için $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$), L'nin 6 değerinden sonra kararlılığının bozulduğu ve 7.5 değerine yaklaştığında ise kaosun ortaya çıktığı görülmüştür (Örnek 3.2.10). Teorem 3.2.8 dikkate alındığında ise verilen parametrelere göre teorik olarak, yerel kararlılığın L'nin 6.7 civarında değer alması durumunda bitmesi gerektiği görülebilmektedir. (3.2.124) fark denkleminde ise L'nin değerinin 7'ye yakın olduğu yerlerde kararlılığın sona erdiği ve L'nin değerinin 8'e yaklaştığı durumda kaosun başlandığı gözlenmektedir. Ayrıca, (3.2.129) denkleminde L değerinin 5.5 civarında olması halinde kararlılıktan kaosa geçişin olduğu ve (3.2.130) fark denkleminde ise L'nin 6 değerine yaklaştıkça kaosun başladığı görülmüştür. Sonuç olarak, yukarıda söylediklerimizi özetlersek, Allee etkili fark denklemlerin çözümlerinin Allee etkisiz olanlara kıyasla daha geç kararsızlığa geçtiği görülmektedir. Buna ilave olarak, Allee etkisini oluşturmak amacıyla seçilen Allee fonksiyonları arasında kararsızlığa geçişi geciktiren en etkili fonksiyonun ise (3.2.124) olduğu, yani sadece t-1 zamanı için oluşturulan Allee fonksiyonu olduğu tespiti yapılabilir.

3.3. $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{r(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])) + \gamma_1 x([t]) + \gamma_2 x([t-1])\}$ Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi

Bu kesimde $\alpha, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ ve r pozitif reel sayılar, $[\![t]\!]$, $t \in [0, \infty)$ için t'nin tam değeri ve t zamanı göstermek üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\{r(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([t]) - \beta_1 x([t-1])) + \gamma_1 x([t]) + \gamma_2 x([t-1])\}$$
(3.3.1)

diferensiyel denkleminin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. Bu amaçla $t \in [n, n+1)$ alt ararlıklarda (3.3.1) denkleminin bir fark denklemi olarak elde edilen çözümleri göz önüne alınmış ve bunların kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca, (3.3.1) denklemine belirli tipteki Allee fonksiyonları uygulanarak bu denkleminin çözümlerinde meydana gelen değişiklikler tespit edilmiş ve elde edilen bulgular geometrik olarak da gösterilmiştir.

Şimdi, (3.3.1) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (3.3.1) diferensiyel denklemi n=0,1,2,… ve $t \in [n, n+1)$ olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \left(r + \left(\gamma_1 - \beta_0 r\right)x(n) + \left(\gamma_2 - \beta_1 r\right)x(n-1)\right) dt \tag{3.3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$x(t) = x(n) \cdot \exp\left\{\int_n^t \left(r + \left(\gamma_1 - \beta_0 r\right)x(n) + \left(\gamma_2 - \beta_1 r\right)x(n-1)\right) ds\right\} \tag{3.3.3}$$

elde edilir. Eğer (3.3.1) diferensiyel denkleminin başlangıç koşulu pozitif ise bu taktirde bunun çözümü olan (3.3.3)'te pozitif olacaktır.
Ayrıca, (3.3.2) diferensiyel denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} - \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}x(t) = -\alpha r x^2(t) \tag{3.3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu da bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $u(t) = \left(x(t)\right)^{-1}$ dönüşümü yapılarak (3.3.4)'ten

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{x(t)} \exp(\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}t)\right\}$$
$$= \alpha r \exp(\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}t) \tag{3.3.5}$$

elde edilir ve bu denkleminin çözümü

$$x(n+1) = \frac{x(n) \cdot \exp\left\{\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\}\right\}}{1 + \alpha r x(n)\left\{\frac{\exp\left\{\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\}\right\} - 1}{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)}\right\}} \tag{3.3.6}$$

şeklinde ikinci mertebeden bir fark denklemi olarak bulunur. Burada

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) \neq 0 \tag{3.3.7}$$

dır.

(3.3.1) diferensiyel denkleminin kararlılık analizini yapabilmemiz için (3.3.6) fark denkleminin çözümlerinin global davranışlarını incelemeye ihtiyaç vardır. Bu nedenle (3.3.6) fark denkleminin çözümlerinin kararlılık analizi yapılacak ve elde edilen sonuçların ve bulguların aynı zamanda (3.3.1) diferensiyel denkleminin çözümleri için geçerli olduğu görülecektir.

Şimdi (3.3.6) fark denkleminin kararlılık analizini yapalım.

3.3.1. Yerel Kararlılık Analizi

Bu kesimde (3.3.6) fark denkleminin denge noktalarının yerel kararlılığı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar geometrik olarak gösterilmiştir. Öncellikle (3.3.6) fark denkleminin denge noktalarını ve bunlara karşılık gelen lineerleştirilmiş denklemlerini bulalım.

Tanım 2.1.5 dikkate alınırsa (3.3.6) fark denkleminin denge noktaları

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{x}_2 = \frac{r}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2} \tag{3.3.8}$$

şeklinde bulunur. Eğer

$$(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2 > 0 \tag{3.3.9}$$

ise $\bar{x}_2$ pozitif bir denge noktasıdır. Ayrıca (3.3.6) fark denklemini düzenlersek

$$x(n+1) = \frac{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}x(n)}{\alpha r x(n)+\{r+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}e^{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+\{\gamma_2-\beta_1 r\}x(n-1)\}}} \tag{3.3.10}$$

yazılabilir. Şimdi,

$$A_3 = \left\{r + \left(2\gamma_1 - 2\beta_0 r + \gamma_2 - \beta_1 r\right)\bar{x}\right\} \cdot \left\{\alpha r\bar{x} + \left\{r + \left(\gamma_1 - \beta_0 r + \gamma_2 - \beta_1 r - \alpha r\right)\bar{x}\right\}\right.$$

$$\left. \cdot \exp\left\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r + \gamma_2 - \beta_1 r)\bar{x}\}\right\}\right\} - \bar{x} \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r + \gamma_2 - \beta_1 r)\bar{x}\} \cdot \{\alpha r$$

$$+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)e^{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}}-(\gamma_1-\beta_0 r)\cdot\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}\}$$

$$\cdot\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r-\alpha r)\cdot\bar{x}\}\},$$

$$B_3=\left[\alpha r\bar{x}+\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r-\alpha r)\bar{x}\}\cdot\exp\left\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}\right\}\right]^2$$

ve

$$A_4=(\gamma_2-\beta_1 r)\cdot\bar{x}\cdot\{\alpha r\bar{x}+\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r-\alpha r)\bar{x}\}$$

$$\cdot\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}\}\}-\bar{x}\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}$$
$$\cdot\{(\gamma_2-\beta_1 r)\cdot\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}\}-(\gamma_2-\beta_1 r)$$

$$\cdot\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r)\bar{x}\}\}\cdot\{r+(\gamma_1-\beta_0 r+\gamma_2-\beta_1 r-\alpha r)\bar{x}\}\}$$

olmak üzere

$$s=\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial x(n)}=\frac{A_3}{B_3}\quad \text{ve}\quad t=\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial x(n-1)}=\frac{A_4}{B_3}$$

yazılsın. Bu durumda, $\bar{x}_1=0$ için

$$A_3(\bar{x}_1)=r^2e^{-r},\ A_4(\bar{x}_1)=0 \text{ ve } B_3(\bar{x}_1)=r^2e^{-2r}$$

dır. Buna göre, (3.3.10) fark denkleminin $\bar{x}_1=0$ civarında lineerleştirilmiş denklemi

$$y(n+1)-e^r y(n)=0 \tag{3.3.11}$$

şeklinde bulunur. Bu denkleme ait karakteristik denklemi ise

$$\mu^2-e^r\mu=0 \tag{3.3.12}$$

dır.

Benzer şekilde hareket edilerek (3.3.10) fark denkleminin $\bar{x}_2 = \frac{r}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}$ civarında lineerleştirilmiş denklemi;

$$A_3(\bar{x}_2) = \left(\frac{\alpha r^2+\gamma_1 r-\beta_0 r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right)\cdot\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2} - \frac{r}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\cdot\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}$$

$$\cdot\left\{\alpha r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right\}$$

$$= \frac{\alpha r^3}{\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2\right)^2}\cdot\left[\left(\alpha r + \gamma_1 - \beta_0 r\right) - \alpha r - \left(\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r\right)\cdot\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right]$$

$$A_4(\bar{x}_2) = \left(\gamma_2 - \beta_1 r\right)\frac{\alpha r^3}{\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2\right)^2}\left(1 - \exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)$$

ve

$$B_3(\bar{x}_2) = \frac{\alpha^2 r^4}{\left(\left(\alpha + \beta_0 + \beta_1\right)r - \gamma_1 - \gamma_2\right)^2}$$

olmak üzere

$$z(n+1) - \left\{\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right\}z(n)$$

$$-\left\{\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right\}z(n-1) = 0 \qquad (3.3.13)$$

şeklinde olup bu denkleminin karakteristik denklemi

$$\mu^2 - \left\{\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right\}\mu$$

$$-\left\{\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right\}=0 \tag{3.3.14}$$

dir.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.3.1. $3\beta_1 > \alpha+\beta_0 > 2\alpha+\beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ olsun. Bu durumda (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\gamma_2+\gamma_1}{\alpha+\beta_0+\beta_1} < r < \frac{\gamma_2}{\beta_1} \tag{3.3.15}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.1 dikkate alınırsa, (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\left|\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right| < 1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} < 2 \tag{3.3.16}$$

olmasıdır.

Bu durumda,

a) $$\left|\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right| < 1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}$$

b) $$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} < 2$$

eşitsizlikleri dikkate alınmalıdır.

(a)'dan ilk olarak

$$\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} < 1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} \tag{3.3.17}$$

eşitsizliği yazılabilir ve buradan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} > 1 \tag{3.3.18}$$

elde edilir ki (3.3.9)'dan dolayı bu eşitsizlik her zaman doğrudur.
İkinci olarak

$$\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} - 1 < \frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} \tag{3.3.19}$$

yazılabilir ve $\beta_0 > \alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ hipotezleri dikkate alınırsa

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < \frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. İlave olarak, (b)'den

$$\gamma_2 - \beta_1 r < (\gamma_2 - \beta_1 r + \alpha r)\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} \tag{3.3.21}$$

yazılabilir. Buna göre, eğer

$$r < \frac{\gamma_2}{\beta_1} \tag{3.3.22}$$

ise, bu taktirde

$$\frac{\gamma_2-\beta_1 r}{\gamma_2-\beta_1 r+\alpha r} < \exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} \tag{3.3.23}$$

bulunur. (3.3.20) ve (3.3.23)'ten

$$\frac{\gamma_2-\beta_1 r}{\gamma_2-\beta_1 r+\alpha r} < \frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \tag{3.3.24}$$

olmak üzere $3\beta_1 > \alpha + \beta_0 > 2\alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ hipotezleri dikkate alınırsa

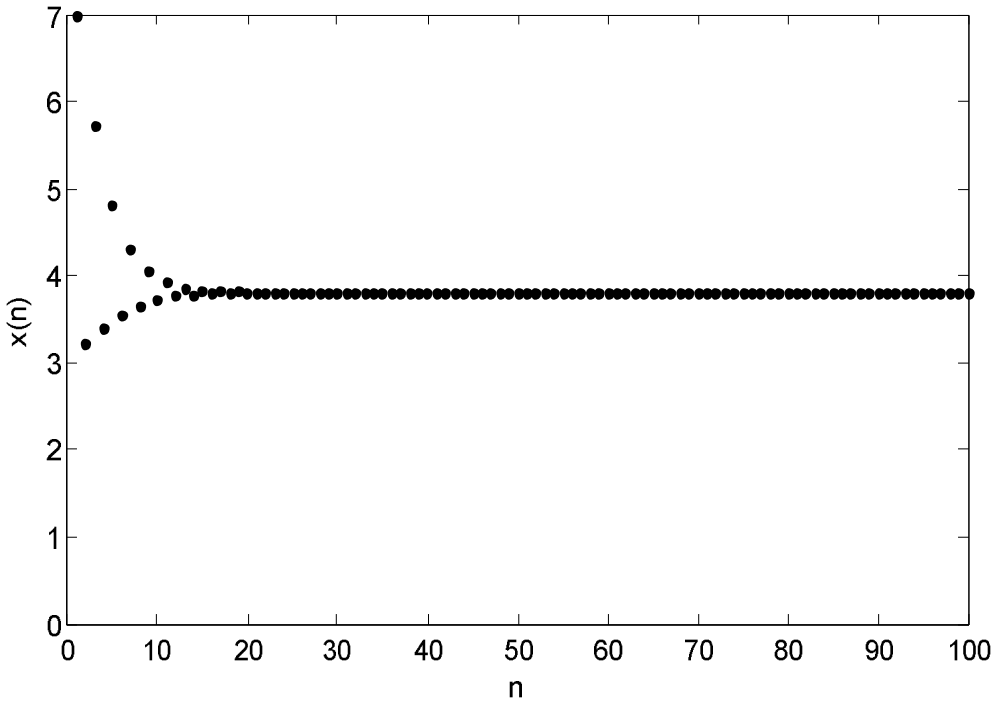
$$r < \frac{3\gamma_2 - \gamma_1}{3\beta_1 - (\alpha + \beta_0)} \tag{3.3.25}$$

elde edilir. (3.3.9), (3.3.22) ve (3.3.25) eşitiszlikleri r'ye göre düzenlenirse

$$\frac{\gamma_2 + \gamma_1}{\alpha + \beta_0 + \beta_1} < r < \frac{\gamma_2}{\beta_1} < \frac{3\gamma_2 - \gamma_1}{3\beta_1 - (\alpha + \beta_0)} \tag{3.3.26}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.3.1. Teorem 3.3.1 şartlarını sağlayan $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 1.2$, $\beta_1 = 0.6$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.9, r = 0.9, x(-1) = 3$ ve $x(0) = 7$ değerlerleri seçilsin. İlk 100 ardışık tekrar için (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlılığı ile ilgili grafik Şekil 3.3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.3.1. $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 1.2$, $\beta_1 = 0.6$, $\gamma_1 = 0.8, \gamma_2 = 0.9$, $r = 0.9$, $x(-1) = 3$ ve $x(0) = 7$değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.3.2. $3\beta_1 > \alpha + \beta_0 > 2\alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ olsun. (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir itici nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$r > \frac{3\gamma_2 - \gamma_1}{3\beta_1 - (\alpha + \beta_0)} \tag{3.3.27}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.3.1 dikkate alındığında, (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir itici nokta olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\left|\frac{(\gamma_1 - \beta_0 r) + ((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1)\cdot \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right| < \left|1 - \frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| \tag{3.3.28}$$

ve

$$\left|\frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| > 1 \tag{3.3.29}$$

olmasıdır. Buna göre (3.3.28) için

a) $$\frac{(\gamma_1 - \beta_0 r) + ((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1)\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}}{\alpha r} < \left|1 - \frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right|$$

b) $$-\left|1 - \frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| < \frac{(\gamma_1 - \beta_0 r) + ((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1)\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}}{\alpha r}$$

eşitsizlikleri göz önüne alınmalıdır. (a)'dan

$$\frac{(\gamma_1 - \beta_0 r) + ((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1)\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}}{\alpha r} < 1 - \frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} \tag{3.3.30}$$

yazılabilir ve buradan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} > 1 \tag{3.3.31}$$

elde edilir ki bu eşitsizlik (3.3.9)'dan dolayı her zaman doğrudur. Yine (a)'dan

$$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} < \frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1)\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} \tag{3.3.32}$$

eşitsizliği yazılabilir ve $\beta_0 > \alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ koşulları göz önüne alındığında

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} > \frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \tag{3.3.33}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (b)'den

$$\left|1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| > \frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1)\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} \tag{3.3.34}$$

yazılabilir ve buradan

$$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-e^{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}}\right)}{\alpha r} > \frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1)e^{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}}}{\alpha r} \tag{3.3.35}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikten de

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < \frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \tag{3.3.36}$$

elde edilir. Bu ise (3.3.33) ile çelişir. Diğer taraftan yine (b)'den

$$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-e^{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}}\right)}{\alpha r} < \frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1)e^{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}}}{\alpha r} \tag{3.3.37}$$

eşitsizliği ve buradan da

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < 1 \tag{3.3.38}$$

elde edilir ki bu durum da (3.3.9) ile çelişir.
Son olarak, (3.3.29)'dan

$$\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} > 1 \tag{3.3.39}$$

yazılabilir ve burdan da

$$(\gamma_2 - \beta_1 r - \alpha r)\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} > \gamma_2 - \beta_1 r \tag{3.3.40}$$

eşitsizliği bulunur. Hipotez gereğince

$$\gamma_2 - \beta_1 r > 0 > \gamma_2 - \beta_1 r - \alpha r \tag{3.3.41}$$

olduğundan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < -\frac{\gamma_2-\beta_1 r}{\beta_1 r+\alpha r-\gamma_2} \tag{3.3.42}$$

elde edilir ki (3.3.42) ifadesinin hiç bir zaman negatif olmayacağı açıktır.
Yine, (3.3.29)'dan

$$\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{\frac{-\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} < -1 \tag{3.3.43}$$

dikkate alındığında,

$$(\gamma_2 - \beta_1 r + \alpha r)\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} > \gamma_2 - \beta_1 r \tag{3.3.44}$$

bulunur ve buradan

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < \frac{\gamma_2-\beta_1 r}{\gamma_2-\beta_1 r+\alpha r} \tag{3.3.45}$$

elde edilir.

Ayrıca, $3\beta_1 > \alpha + \beta_0 > 2\alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ hipotezi hatırlanırsa (3.3.33) ve (3.3.45)'ten

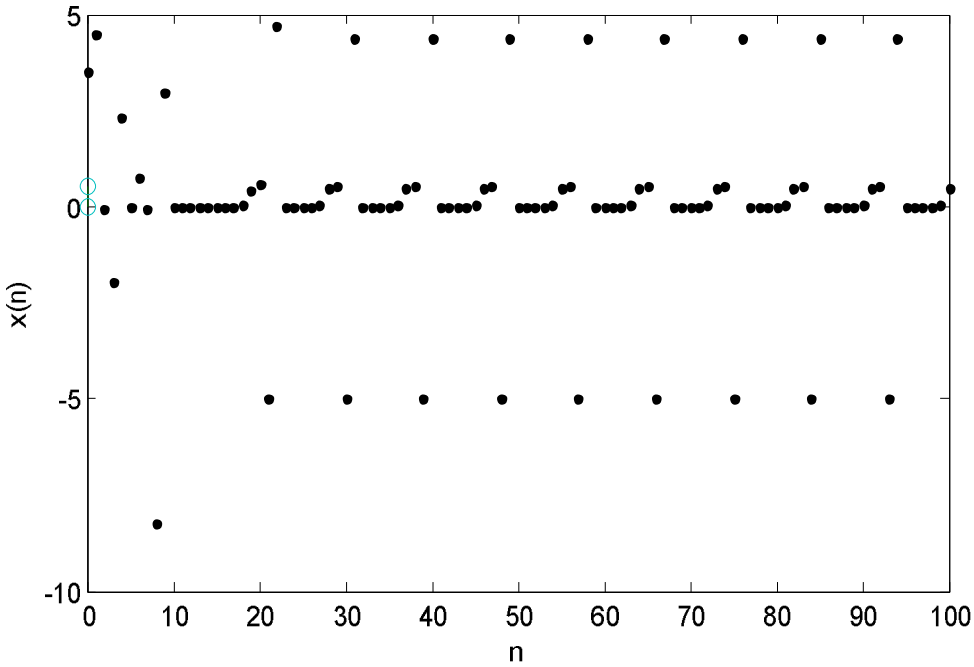
$$\frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} < \frac{\gamma_2-\beta_1 r}{\gamma_2-\beta_1 r+\alpha r} \tag{3.3.46}$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için

$$r > \frac{3\gamma_2-\gamma_1}{3\beta_1-(\alpha+\beta_0)} \tag{3.3.47}$$

olmalıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.3.2. Teorem 3.3.2 şartlarını sağlayan $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3$, $r = 3.2$, $x(-1) = 3.5$ ve $x(0) = 4.5$ değerlerleri seçilsin. İlk 100 ardışık tekrar için (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının itici nokta (repeller point) olması ile ilgili grafik Şekil 3.3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.3.2. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 3,\ \beta_1 = 2, \gamma_1 = 2,\ \gamma_2 = 3, r = 3.2, x(-1) = 3.5$ ve $x(0) = 4.5$ ve $x(0) = 7$değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.3.3. $2\beta_1 > \alpha + \beta_0 > 2\alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ olsun. (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir eyer noktası olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\gamma_2}{\beta_1} < r < \frac{2\gamma_2 - \gamma_1}{2\beta_1 - \alpha - \beta_0} \tag{3.3.48}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.3.1 dikkate alındığında, (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının bir eyer noktası olması için gerek ve yeter koşul

$$\left|\frac{(\gamma_1 - \beta_0 r) + ((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right| > \left|1 - \frac{(\gamma_2 - \beta_1 r)\left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| \tag{3.3.49}$$

ve

$$\left(\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}\right)^2+4\left(\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right)>0 \quad (3.3.50)$$

olmasıdır. Buna göre (3.3.50) eşitsizliğinde

$$t=e^{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}} \quad (3.3.51)$$

yazılsın ve

$$r>\frac{\gamma_2}{\beta_1} \quad (3.3.52)$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)^2 t^2+\left(2(\gamma_1-\beta_0 r)\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)-4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)\right)t$$
$$+(\gamma_1-\beta_0 r)^2+4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)>0 \quad (3.3.53)$$

yazılabilir. (3.3.53)'te

$$\text{diskriminant delta}=16\alpha^2 r^2(\beta_1 r-\gamma_2)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2\right) \quad (3.3.54)$$

olup, (3.3.9) kabulünden dolayı $\Delta>0$ dır. Diğer taraftan, $\beta_0>\alpha+\beta_1$ olduğundan

$$\frac{\gamma_1}{\beta_0-\alpha}<\frac{\gamma_2}{\beta_1}<r \quad (3.3.55)$$

dir. Bu durumda (3.3.55)'ten

$$4\alpha r<2\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right) \quad (3.3.56)$$

yazılabilir. Hipotez gereğince,

$$\beta_1 r<\beta_0 r \quad \text{ve} \quad \gamma_2>\gamma_1 \quad (3.3.57)$$

olacağından

$$0 < \beta_1 r - \gamma_2 < \beta_0 r - \gamma_1 \tag{3.3.58}$$

elde edilir. (3.3.56) ve (3.3.58) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$4\alpha r(\gamma_2 - \beta_1 r) - 2(\gamma_1 - \beta_0 r)\big((\alpha + \beta_0)r - \gamma_1\big) > 0 \tag{3.3.59}$$

bulunur. Bu durumda

$$(\gamma_1 - \beta_0 r)^2 + 4\alpha r(\gamma_2 - \beta_1 r) > 0 \tag{3.3.60}$$

olmak üzere

$$t \in \left(0, \frac{4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)-2(\gamma_1-\beta_0 r)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)-\sqrt{\Delta}}{2\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)^2}\right) \cup \left(\frac{4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)-2(\gamma_1-\beta_0 r)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)+\sqrt{\Delta}}{2\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)^2}, \infty\right) \tag{3.3.61}$$

elde edilir. (3.3.51) için tekrar (3.3.61) aralığı dikkate alınmasıyla

$$\begin{cases} \dfrac{2\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)^2}{4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)-2(\gamma_1-\beta_0 r)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)-\sqrt{\Delta}} < \exp\left\{\dfrac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} \\ \exp\left\{\dfrac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\} < \dfrac{2\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)^2}{4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)-2(\gamma_1-\beta_0 r)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)+\sqrt{\Delta}} \end{cases} \tag{3.3.62}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (3.3.49) eşitsizliğinden

a) $$\left|1 - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right| < \frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}$$

b) $$\frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} < \left|1 - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}\right|$$

durumları göz önüne alınmalıdır.

Buna göre, (a)'da birinci olarak

$$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}<\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)+\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} \quad (3.3.63)$$

eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}<1 \quad (3.3.64)$$

elde edilir ki (3.3.9) gereğince bu eşitsizliğin sağlanması mümkün değildir.
İkinci olarak (a)'dan

$$\frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}<1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} \quad (3.3.65)$$

yazılabilir ve $\beta_0>\alpha+\beta_1$ ve $\gamma_2>\gamma_1$ hipotezleri dikkate alınırsa

$$\exp\left\{\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}<\frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \quad (3.3.66)$$

elde edilir.
(b)'den

$$\frac{-(\gamma_1-\beta_0 r)-\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r}<1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r} \quad (3.3.67)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (3.3.65) ile aynı olup buradan (3.3.66) elde edilir.
İlave olarak, (b)'den

$$1-\frac{(\gamma_2-\beta_1 r)\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}\right)}{\alpha r}<\frac{(\gamma_1-\beta_0 r)\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}\right\}}{\alpha r} \quad (3.3.68)$$

eşitsizliği yazılabilir ve (3.3.63) ile aynı olup bu (3.3.9) ile çelişir.
Ayrıca, (3.3.62) ile (3.3.66) birlikte dikkate alınırsa

$$\frac{2\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)^2}{4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)-2(\gamma_1-\beta_0 r)\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)+\sqrt{\Delta}} < \frac{(\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1}{(\beta_0-\alpha-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1} \tag{3.3.69}$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi bu eşitsizliğin sağlanabilmesi için yeter koşullar aramalıyız. Buna göre, (3.3.69)'dan

$$-2\alpha r\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_2-\gamma_1\right)-4\alpha r(\gamma_2-\beta_1 r)$$
$$\cdot\left((\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1\right)<\left((\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1\right)\sqrt{\Delta} \tag{3.3.70}$$

elde edilir. Hipotez gereğince

$$\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_2-\gamma_1\right) > \left((\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1\right) > 0 \tag{3.3.71}$$

dır ve ilave olarak,

$$-2\alpha r[\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_2-\gamma_1\right)-2(\beta_1 r-\gamma_2)$$
$$\cdot\left((\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1\right)] < 0 \tag{3.3.72}$$

eşitsizliğinin var olabilmesi için

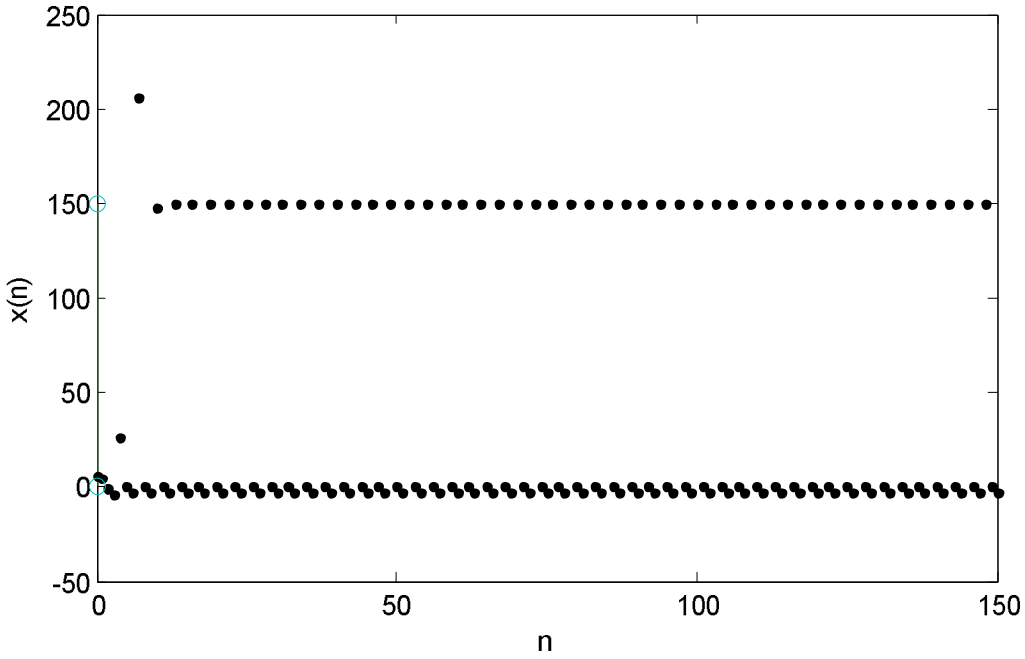
$$\left((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\right)\left((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_2-\gamma_1\right) > 2(\gamma_2-\beta_1 r)$$
$$\cdot\left((\alpha+\beta_0-\beta_1)r+\gamma_2-\gamma_1\right) \tag{3.3.73}$$

şeklinde olması gerekir. Hipotezden, $2\beta_1 > \alpha+\beta_0 > 2\alpha+\beta_1$ olmak üzere eğer

$$r < \frac{2\gamma_2-\gamma_1}{2\beta_1-\alpha-\beta_0} \tag{3.3.74}$$

ise, bu taktirde (3.3.73) sağlanır. Bu durumda (3.3.70) eşitsizliğinin sol tarafı negatif, sağ tarafı ise pozitif olduğundan bu eşitsizlik her zaman sağlanmış olacaktır. (3.3.52) ve (3.3.74) birlikte göz önüne alındığında (3.3.48) elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.3.3. Teorem 3.3.3 şartlarını sağlayan $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 3.5$, $\beta_1 = 3$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3, r = 1.61$, $x(-1) = 5.5$ ve $x(0) = 4.85$ değerlerleri seçilsin. İlk 100 ardışık tekrar için (3.3.10) fark denkleminin pozitif denge noktasının eyer noktası olması ile ilgili grafik Şekil 3.3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3.3. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 3.5, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 3, r = 1.61$, $x(-1) = 5.5$ ve $x(0) = 4.85$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.3.4. (3.3.10) fark denkleminin sıfır denge noktası bir eyer noktasıdır.

İspat. Bir fark denkleminin denge noktasının bir eyer noktası olabilmesi için karakteristik denkleminin köklerinden birinin mutlak değeri 1'den büyük iken diğeri küçük olmalıdır.

(3.3.10) fark denkleminin karakteristik denklemi

$$\mu^2 - e^r\mu = 0 \tag{3.3.75}$$

olmak üzere bu denkleminin kökleri

$$\mu_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \mu_2 = e^r$$

olduğundan (3.3.10) fark denkleminin sıfır denge noktası bir eyer noktasıdır.

3.3.2. Çözümlerin Sınırlılığı Ve Yarı Devir Uzunlukları

Bu kesimde (3.3.10) fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı ve monoton davranışları incelenecektir. Ayrıca, (3.3.10) fark denkleminin çözümlerinin yarı devir uzunlukları ile sönümlü salınımlılığı için yeter koşullar belirlenecektir.

Teorem 3.3.5. n=-1,0,1,… için $x(n) > 1$ olmak üzere $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi (3.3.10) fark denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Üstelik $r, \alpha > 1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) n=0,1,… için $-r < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$ şeklinde alınsın. Bu taktirde (3.3.10) fark denkleminin bütün pozitif çözümleri

$$\left(0, \frac{1}{\alpha(1-e^{-r})}\right) \tag{3.3.76}$$

aralığındadır.

ii) n=0,1,2,… için $-\alpha r x(n) < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < -r$ şeklinde alınsın. Bu taktirde (3.3.10) fark denkleminin bütün pozitif çözümleri

$$\left(0, \frac{1}{\alpha(1-2e^{-r})}\right) \tag{3.3.77}$$

aralığındadır.

İspat.

i) n=0,1,… için (3.3.10) denklemi,

$$C = x(n)\big(r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\big) \tag{3.3.78}$$

ve

$$D = \big(r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\big)$$

$$\cdot \exp\left\{-\left\{\left(r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\right)\right\}\right\} + \alpha r x(n) \qquad (3.3.79)$$

olmak üzere

$$x(n+1) = \frac{C}{D} \qquad (3.3.80)$$

şeklinde yazılabilir.

n=-1,0,1,… için $x(n) > 1$ ve n=0,1,… için

$$-r < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$$

olduğundan

$$0 < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) + r < r \qquad (3.3.81)$$

ve

$$0 < \frac{1}{\exp\left\{-\left\{\left(r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\right)\right\}\right\}} < \frac{1}{\exp(-r)} \qquad (3.3.82)$$

dır. Bu durumda, (3.3.81) ve (3.3.82)'den

$$x(n+1) < \frac{x(n)r}{\left(r+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\right)\exp(-r)+\alpha r x(n)} \qquad (3.3.83)$$

olur. Ayrıca, n=-1,0,1,… için $x(n) > 1$ ve $r, \alpha > 1$ olduğundan

$$-\alpha r x(n) < (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) + r < r - \alpha r x(n) < 0 \qquad (3.3.84)$$

elde edilir. (3.3.83) ile birlikte (3.3.84) dikkate alındığında

$$x(n+1) < \frac{x(n)r}{-\alpha r x(n)\exp(-r)+\alpha r x(n)} = \frac{1}{\alpha(1-\exp(-r))} \qquad (3.3.85)$$

sonucu bulunur.

ii) n=-1,0,1,… için $x(n) > 1$ ve n=0,1,2,… için

$$\alpha r x(n) < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < -r$$

olduğundan

$$r - \alpha r x(n) < (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0 < r\,, \tag{3.3.86}$$

$$0 < \frac{1}{\exp\left\{-\left\{\left(r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\right)\right\}\right\}} < 1 < \frac{1}{\exp(-r)} \tag{3.3.87}$$

ve

$$r - 2\alpha r x(n) < (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < r - \alpha r x(n) < 0 \tag{3.3.88}$$

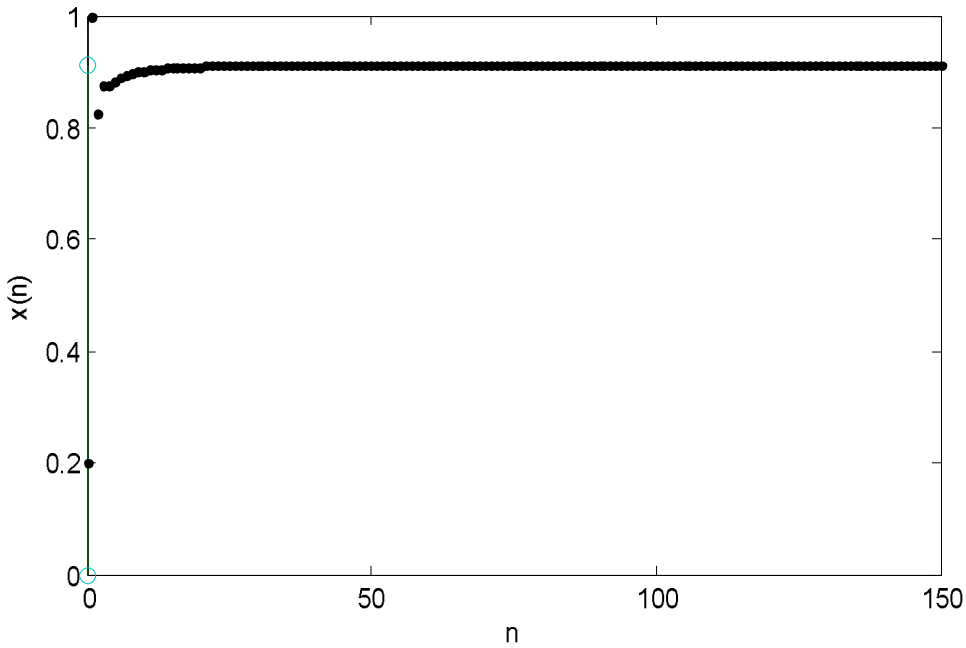
yazılabilir. Bu durumda, (3.3.86), (3.3.87) ve (3.3.88) birlikte değerlendirilirse

$$x(n+1) < \frac{x(n)r}{\left(r-2\alpha r x(n)\right)\exp(-r)+\alpha r x(n)} < \frac{x(n)}{1+\alpha x(n)(1-2\exp(-r))}$$

$$< \frac{x(n)}{\alpha x(n)(1-2\exp(-r))} = \frac{1}{\alpha(1-2\exp(-r))} \tag{3.3.89}$$

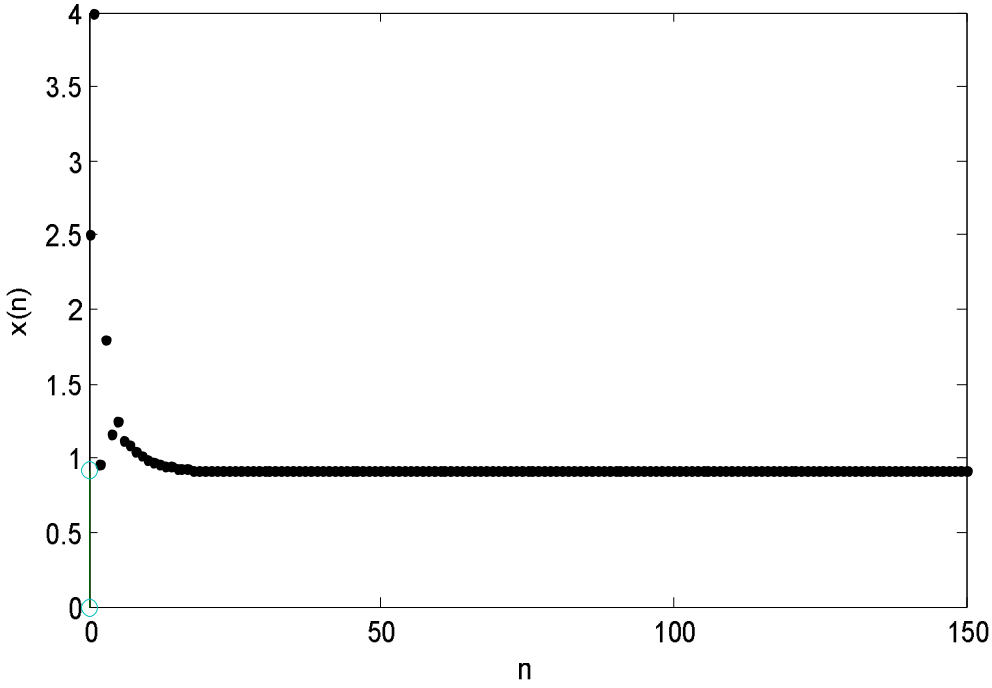
elde edilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 3.3.4. Teorem 3.3.5 /(i) dikkate alındığında $\alpha = 0.5$, $\beta_0 = 0.2$, $\beta_1 = 0.3$, $\gamma_1 = 0.02$, $\gamma_2 = 0.03, r = 0.25$, $x(-1) = 0.2$ ve $x(0) = 1$ değerleri seçilebilir. İlk 150 ardışık tekrar için (3.2.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin $\left(0, \frac{1}{0.5(1-e^{-0.25})}\right)$ ararlığında olduğunu ifade eden grafik Şekil 3.3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.3.4. $\alpha = 0.5,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ \gamma_1 = 0.02, \gamma_2 = 0.03, r = 0.25, x(-1) = 0.2$ ve $x(0) = 1$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.3.5. Teorem 3.2.5 /(ii) dikkate alındığında $\alpha = 0.5,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ \gamma_1 = 0.02,\ \gamma_2 = 0.03,\ r = 0.25,\ x(-1) = 4$ ve $x(0) = 2.5$ değerleri seçilebilir. Buna göre, ilk 150 iterasyon için (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin $\left(0, \frac{1}{0.5(1-2e^{-0.25})}\right)$ ararlığında olduğunu gösteren grafik Şekil 3.3.5'te verilmiştir.



Şekil 3.3.5. $\alpha = 0.5,\ \beta_0 = 0.2,\ \beta_1 = 0.3,\ \gamma_1 = 0.02, \gamma_2 = 0.03,\ r = 0.25, x(-1) = 4$ ve $x(0) = 2.5$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.3.6. $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi (3.3.10) fark denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) n=0,1,2,… için $r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$ ise, bu taktirde (3.2.10) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton azalandır.

ii) n=0,1,2,… için $r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) > \alpha r x(n)$ ise, bu taktirde (3.2.10) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton artandır.

İspat.

i) (3.3.10) fark denkleminden

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}}{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+\{\gamma_2-\beta_1 r\}x(n-1)\}\}+\alpha r x(n)} \quad (3.3.90)$$

yazılabilir. Buna göre, (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin monoton azalan olabilmesi için

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} < 1 \tag{3.3.91}$$

olması gerektiği aşikardır. Yani, (3.2.90) dikkate alındığında

$$\frac{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}}{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)\}\exp\left\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+\{\gamma_2-\beta_1 r\}x(n-1)\}\right\}+\alpha r x(n)} < 1 \tag{3.3.92}$$

olmalıdır. Hipotez gereğince,

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$$

olduğundan

$$1 - \exp\left\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\}\right\} < 0 \tag{3.3.93}$$

ve

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0 \tag{3.3.94}$$

elde edilir. (3.3.93) ve (3.3.94) eşitsizlikleri dikkate alındığında (3.2.91) eşitsizliği sağlanır ki bu da istenilen sonçtur.

ii) Benzer şekilde, eğer

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} > 1 \tag{3.3.95}$$

ise, bu taktirde (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümleri monoton artandır. Buna göre,

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) > \alpha r x(n)$$

hipotezinden dolayı

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) - \alpha x(n) > 0 \tag{3.3.96}$$

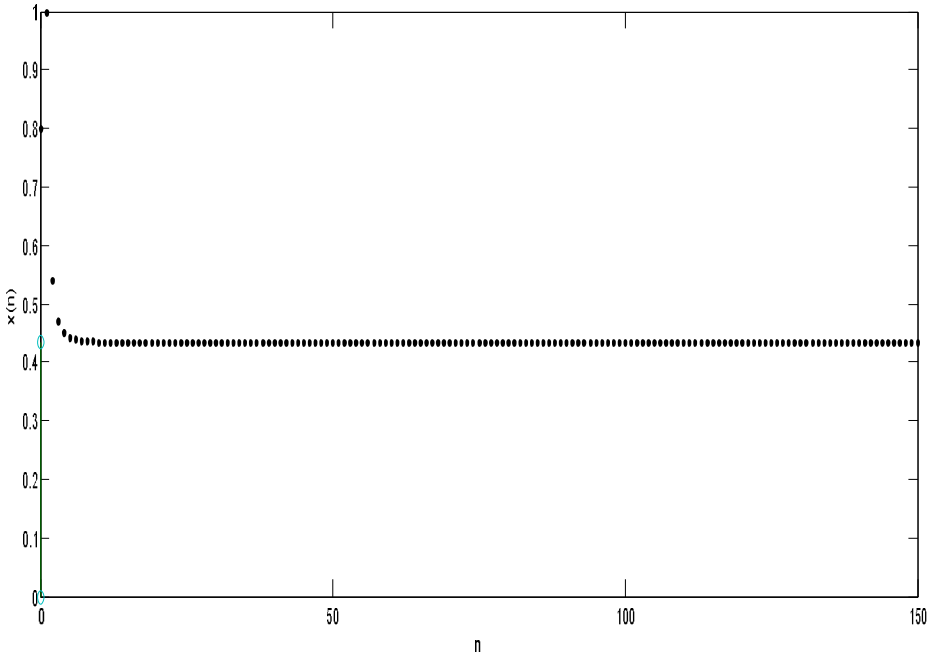
ve

$$\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) - \alpha x(n)\}$$

$$\cdot \exp\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\}\} + \alpha x(n) > 0 \qquad (3.3.97)$$

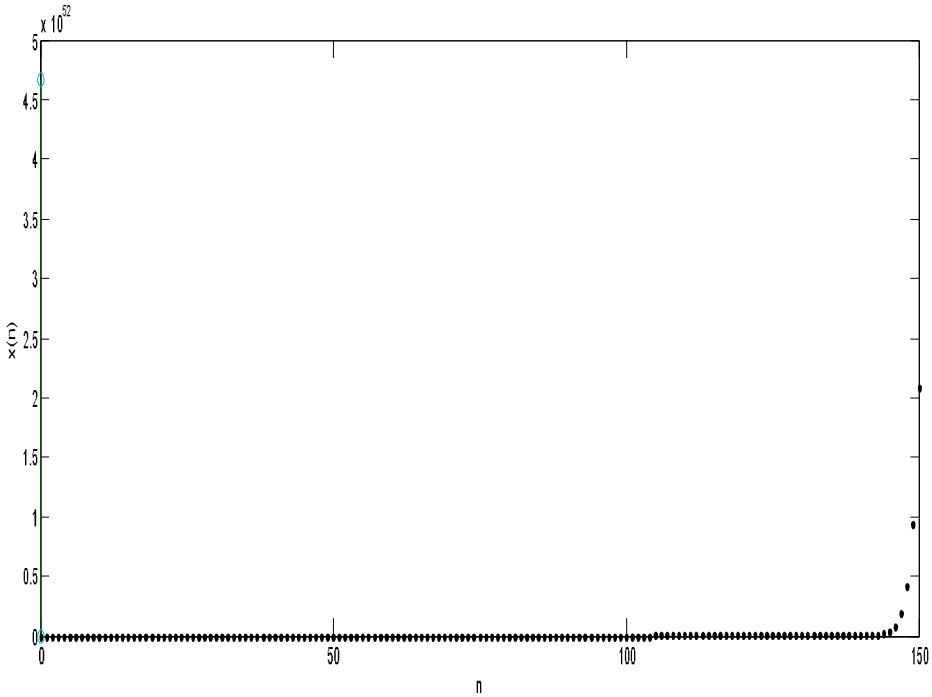
yazılabilir. (3.3.96) ve (3.3.97) birlikte değerlendirilirse (3.3.95) bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.3.6. Teorem 3.3.6/(i) dikkate alındığında $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri seçilir. İlk 150 ardışık tekrar için (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin monoton azalan olduğunu gösteren grafik Şekil 3.3.6'da görülebilir.



Şekil 3.3.6. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 2,\ \beta_1 = 0.1,\ r = 0.5,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 1$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek 3.3.7. Teorem 3.3.6/(ii) dikkate alındığında $\alpha = 2,\ \beta_0 = 3,\ \beta_1 = 2,\ r = 0.4,\ x(-1) = 1,\ x(0) = 2$ değerleri seçilebilir. Buna göre, ilk 150 ardışık tekrar için (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin monoton artan olduğunu gösteren grafik Şekil 3.3.7'de verilmiştir.



Şekil 3.3.7. $\alpha = 2,\ \beta_0 = 3,\ \beta_1 = 2,\ r = 0.4, x(-1) = 1,\ x(0) = 2$ değerleri için (3.3.10) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Teorem 3.3.7. $f \in C[(0,\infty) \times (0,\infty), (0,\infty)]$ olmak üzere

$$f(x,y) = \frac{x\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x+(\gamma_2-\beta_1 r)y\}}{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)x+(\gamma_2-\beta_1 r)y\}\exp\{-\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x+(\gamma_2-\beta_1 r)y\}\}+\alpha r x} \tag{3.3.98}$$

şeklinde yazılsın. Üstelik, $\alpha < \beta_0$, $\gamma_1 < \frac{2(3\beta_0-2\alpha)(\alpha+\beta_0)}{9\beta_0}$ ve

$$\frac{\gamma_2}{\beta_1} < \frac{\gamma_1}{\beta_0} < \frac{3\gamma_1}{3\beta_0-2\alpha} < \frac{3\gamma_1+2(\alpha+\beta_0)+\sqrt{9\gamma_1^2+(20\alpha-12\beta_0)\gamma_1+4(\alpha+\beta_0)^2}}{2(3\beta_0-\alpha)} < r \tag{3.3.99}$$

olduğu kabul edilsin. Eğer

$$x > \frac{(\alpha+\beta_0)r-\gamma_1}{\{\beta_0 r-\gamma_1\}\{(3\beta_0-\alpha)r-5\gamma_1\}} \quad \text{ve} \quad y < \frac{4r\{\beta_0 r-\gamma_1\}-(r+2)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)}{\{\beta_1 r-\gamma_2\}\{4\{\beta_0 r-\gamma_1\}-\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)\}} \tag{3.3.100}$$

ise, bu taktirde f fonksiyonu x ve y'ye göre azalandır.

İspat. (3.3.98) fonksiyonunun x ve y'ye göre kısmi türevlerini alalım. Bu durumda

$$E_1 = \alpha r(\gamma_1 - \beta_0 r)x^2 + \exp\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}\}$$

$$\cdot\{\{r + 2(\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\} \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}$$

$$+x \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\} \cdot \{(\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot (r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r) \cdot x$$

$$+(\gamma_2 - \beta_1 r)y) - (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)\}\}$$

$$E_2 = \alpha r(\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x^2 \cdot \left(1 - \exp\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}\}\right)$$

$$+ (\gamma_2 - \beta_1 r) \cdot x \cdot \exp\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}\}$$

$$\{\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\} \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}\}$$

ve

$$F_1 = \{\alpha r x + (r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r) \cdot x + (\gamma_2 - \beta_1 r) \cdot y)$$

$$\cdot \exp\{-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y\}\}\}^2,$$

olmak üzere

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{E_1}{F_1} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{E_2}{F_1} \tag{3.3.101}$$

dir.

Diğer taraftan, $\frac{\gamma_2}{\beta_1} < \frac{\gamma_1}{\beta_0} < r$ olduğundan $\gamma_1 - \beta_0 r < 0$ ve $\gamma_2 - \beta_1 r < 0$ dir. Buna göre, E_1 ve E_2'nin işaretleri göz önüne alındığında, eğer

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y > 0 \tag{3.3.102}$$

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y > 0 \tag{3.3.103}$$

$$r + 2(\gamma_1 - \beta_0 r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y < 0 \tag{3.3.104}$$

$$(\gamma_1 - \beta_0 r)(r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x + (\gamma_2 - \beta_1 r)y) - (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r) < 0 \tag{3.3.105}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, bu taktirde $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} < 0$ ve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ dir.

Diğer taraftan, (3.3.102)-(3.3.105) eşitsizlikleri birlikte değerlendirilirse

$$\begin{cases} y < -\frac{r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{(\gamma_1-\beta_0 r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x \\ y < -\frac{r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x \\ y > -\frac{r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{2(\gamma_1-\beta_0 r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x \\ y < \frac{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}{(\gamma_1-\beta_0 r)(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x \end{cases} \tag{3.3.106}$$

ve

$$\begin{cases} x < -\frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r)}y \\ x < -\frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}y \\ x > -\frac{r}{2(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{2(\gamma_1-\beta_0 r)}y \\ x < \frac{1}{(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}y \end{cases} \tag{3.3.107}$$

yazılabilir.

Şimdi, (3.3.106) ifadesini göz önüne alalım. Burada birinci, ikinci ve dördüncü eşitsizliklerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$3y < -\frac{3r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{(\gamma_1-\beta_0 r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x - \frac{2(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x + \frac{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}{(\gamma_1-\beta_0 r)(\gamma_2-\beta_1 r)} \tag{3.3.108}$$

ve üçüncü eşitsizliğin üç ile çarpılmasıyla

$$3y > -\frac{3r}{(\gamma_2-\beta_1 r)} - \frac{6(\gamma_1-\beta_0 r)}{(\gamma_2-\beta_1 r)}x \tag{3.3.109}$$

bulunur. $\alpha < \beta_0$ ve

$$r > \frac{3\gamma_1}{3\beta_0-2\alpha} \tag{3.3.110}$$

olmak üzere (3.3.108) ve (3.3.109) eşitsizliklerinden

$$x > \frac{(\alpha+\beta_0)r-\gamma_1}{\{\beta_0 r-\gamma_1\}\{(3\beta_0-\alpha)r-3\gamma_1\}} \tag{3.3.111}$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde (3.3.107) ifadesi göz önüne alındığında, birinci, ikinci ve dördüncü eşitsizlikler taraf tarafa toplanıp ikinci eşitsizliğin de üç ile çarpılması sonucunda sırasıyla

$$3x < -\frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r)}y - \frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}y\frac{1}{(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{r}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)} - \frac{(\gamma_2-\beta_1 r)}{(\gamma_1-\beta_0 r-\alpha r)}y \tag{3.3.112}$$

ve

$$3x > -\frac{3r}{2(\gamma_1-\beta_0 r)} - \frac{3(\gamma_2-\beta_1 r)}{2(\gamma_1-\beta_0 r)}y \tag{3.3.113}$$

elde edilir. (3.3.110) eşitsizliğinden

$$4(\beta_0 r-\gamma_1) - (\alpha+\beta_0)r - \gamma_1 > 0 \tag{3.3.114}$$

yazılabilir ve

$$4r\{\beta_0 r-\gamma_1\} - (r+2)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big) > 0 \tag{3.3.115}$$

eşitsizliği sağlanmak üzere (3.3.112) ve (3.3.113)'ten

$$y < \frac{4r\{\beta_0 r-\gamma_1\}-(r+2)\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)}{\{\beta_1 r-\gamma_2\}\{4\{\beta_0 r-\gamma_1\}-\big((\alpha+\beta_0)r-\gamma_1\big)\}} \tag{3.3.116}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.3.115)'in r'ye göre düzenlenmesiyle

$$(3\beta_0-\alpha)r^2-(2(\alpha+\beta_0)+3\gamma_1)r+2\gamma_1>0 \tag{3.3.117}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.117)'yi r cinsinden kuadratik bir denklem gibi düşünürsek

$$\text{diskriminant delta} = 9\gamma_1^2+(20\alpha-12\beta_0)\gamma_1+4(\alpha+\beta_0)^2 \tag{3.3.118}$$

dir. Ayrıca, $\alpha<\beta_0<\frac{5}{3}\beta_0$ olduğundan $\Delta>0$ dır. (3.3.117)'den

$$\frac{3\gamma_1+2(\alpha+\beta_0)+\sqrt{9\gamma_1^2+(20\alpha-12\beta_0)\gamma_1+4(\alpha+\beta_0)^2}}{2(3\beta_0-\alpha)}<r \tag{3.3.119}$$

yazılabilir. Hipotez gereğince

$$\gamma_1<\frac{2(3\beta_0-2\alpha)(\alpha+\beta_0)}{9\beta_0}$$

olduğundan (3.3.115) ve (3.3.119) birlikte dikkate alınırsa

$$\frac{3\gamma_1}{3\beta_0-2\alpha}<\frac{3\gamma_1+2(\alpha+\beta_0)+\sqrt{9\gamma_1^2+(20\alpha-12\beta_0)\gamma_1+4(\alpha+\beta_0)^2}}{2(3\beta_0-\alpha)}$$

eşitsizliği bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.3.7 dikkate alınırsa, Teorem 3.2.7'de elde edilen koşullar (3.3.10) fark denkleminin bütün salınımlı çözümlerinin yarı devir uzunluklarının en fazla iki olması için gerekli koşullardır.

Teorem 3.3.8. $\{x(n)\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi (3.3.10) fark denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Ayruca,

$$0 < \gamma_1 - \beta_0 r < \gamma_2 - \beta_1 r \tag{3.3.120}$$

ve

$$\alpha r x(2n) < r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n-1) < ln\left(\frac{x(2n-1)}{x(2n)}\right) \tag{3.3.121}$$

koşullarının mevcut olduğu kabul edilsin. Bu durumda, eğer $x(2n) < \bar{x}_2 < x(2n-1)$ ise, (3.3.10) denkleminin çözümleri sönümlü salınımlıdır.

İspat.

$$U_1 = x(2n) \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r) \cdot x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r) \cdot x(2n-1)\}$$

$$\cdot \{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\} \cdot x(2n-1)\})\}$$

ve

$$V_1 = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r) \cdot x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r) \cdot x(2n-1)\}$$

$$\cdot \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\} \cdot x(2n-1)\}) + \alpha r x(2n)$$

olmak üzere (3.3.10) fark denkleminden,

$$x(2n+1) - x(2n) = \frac{U_1}{V_1} \tag{3.3.122}$$

yazılabilir. Hipotezden n=0,1,… için

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n-1) > 0$$

olduğundan

$$1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n-1)\}) > 0 \tag{3.3.123}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, (3.3.121), (3.3.122) ve (3.3.123) dikkate alınırsa $x(2n+1) > x(2n)$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde hareket edilerek ardışık tekrarla,

$$x(2n+3) > x(2n+2),\ x(2n+5) > x(2n+4), \ldots \tag{3.3.124}$$

bulunur.

Ayrıca,

$$U_2 = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n-1)\}$$
$$\times \{x(2n) - x(2n-1)\exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n-1)\})\}$$

$$-\alpha r x(2n)x(2n-1)\{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n-1)\})\}$$

ve

$$V_2 = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r) \cdot x(2n-1)\}$$

$$\cdot \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n-1)\}) + \alpha r x(2n)$$

$$\cdot \{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x(2n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\} \cdot x(2n-1)\})\}$$

olmak üzere (3.3.10)'dan

$$x(2n+1) - x(2n-1) = \frac{U_2}{V_2} \tag{3.3.125}$$

yazılabilir. Hipotezden

$$0 < r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n-1) < ln\left(\frac{x(2n-1)}{x(2n)}\right)$$

olduğundan yukardakine benzer işlemler yapılarak

$$\ldots < x(2n+5) < x(2n+3) < x(2n+1) < x(2n-1)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son olarak,

$$U_3 = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n)\}$$

$$\times \{x(2n+1) - x(2n)\exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\})\}$$

$$-\alpha r x(2n+1)x(2n)\{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\})\}$$

ve

$$V_3 = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n)\}$$

$$\cdot \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\}) + \alpha r x(2n+1)$$

$$\cdot \{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\})\}$$

olmak üzere (3.3.10)'dan

$$x(2n+2) - x(2n) = \frac{U_3}{V_3} \tag{3.3.126}$$

yazmak mümkündür. Ayrıca, $0 < \gamma_1 - \beta_0 r < \gamma_2 - \beta_1 r$ ve $x(2n+1) < x(2n-1)$ olduğundan

$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n-1)$$

$$> r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n)$$
$$> 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, $U_3 > 0$ olabilmesi için

$$\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r - \alpha r)x(2n)\}x(2n+1)$$

$$> x(2n)\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n)\}$$

$$\cdot \exp(-\{r + (\gamma_1 - \quad \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\})$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. $0 < \gamma_1 - \beta_0 r < \gamma_2 - \beta_1 r$ ve $x(2n+1) > x(2n)$ olduğundan

$$\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r - \alpha r)x(2n)\}$$

$$> \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(2n+1) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(2n)\}$$

eşitsizliği mevcuttur. Üstelik, yine $x(2n+1) > x(2n)$ olmasından dolayı

$$x(2n+1) > x(2n)\exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(2n+1) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(2n)\}) \qquad (3.3.127)$$

yazılabilir.

Bu sonuç ise $U_3 > 0$, yani $x(2n+2) > x(2n)$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde ardışık tekrar yapılmasıyla

$$\ldots > x(2n+6) > x(2n+4) > x(2n+2) > x(2n)$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.3.3. Pozitif Denge Noktasının Global Asimptotik Kararlılığı

Bu kesimde

$$x(n+1) = \frac{x(n)e^{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+\{\gamma_2-\beta_1 r\}x(n-1)\}}}{1+\alpha r x(n)\left\{\frac{e^{\{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+\{\gamma_2-\beta_1 r\}x(n-1)\}}-1}{r+(\gamma_1-\beta_0 r)x(n)+(\gamma_2-\beta_1 r)x(n-1)}\right\}} \qquad (3.3.128)$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olabilmesi için yeter koşullar elde edilmiştir.

Teorem 3.3.9. n=0,1,2,… için $(\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$ olduğu kabul edilsin. Üstelik, (3.3.128) fark denkleminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlı olsun. Eğer

$$x(n) > \frac{2r}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2} \tag{3.3.129}$$

ise bu taktirde (3.3.128) fark denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. n=-1,0,1,… için

$$V(n) = [x(n) - \bar{x}_2]^2 \tag{3.3.130}$$

olacak şekilde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayalım. Bu taktirde

$$\Delta V(n) = V(n+1) - V(n) = \{x(n+1) - x(n)\}\{x\{n+1\} + x(n) - 2\overline{x_2}\} \tag{3.3.131}$$

yazılabilir.

$$E_1 = \quad x(n) \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}$$

$$\cdot \{1 - \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\})\},$$

$$E_2 = \{((\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2)x(n) - 2r\} \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n)$$

$$+(\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\} \cdot \{\exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\})$$

$$+\alpha r x(n)\} + x(n) \cdot ((\alpha + \beta_0 + \beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2) \cdot \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r) \cdot x(n)$$

$$+(\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}$$

ve

$$F = \{r + (\gamma_1 - \beta_0 r - \alpha r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1)\}$$

$$\cdot \exp(-\{r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + \{\gamma_2 - \beta_1 r\}x(n-1)\}) + \alpha r x(n)$$

olmak üzere (3.3.131)'den

$$x(n+1) - x(n) = \frac{E_1}{F} \tag{3.3.132}$$

ve

$$x(n+1) + x(n) - 2\overline{x_2} = \frac{E_2}{F((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2)} \tag{3.3.133}$$

yazılabilir. (3.3132) ve (3.3.133) taraf tarafa çarpılırsa,

$$\{x(n+1) - x(n)\} \cdot \{x\{n+1\} + x(n) - 2\overline{x_2}\} = \frac{E_1 E_2}{F^2((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2)} \tag{3.3.134}$$

bulunur. Hipotezden

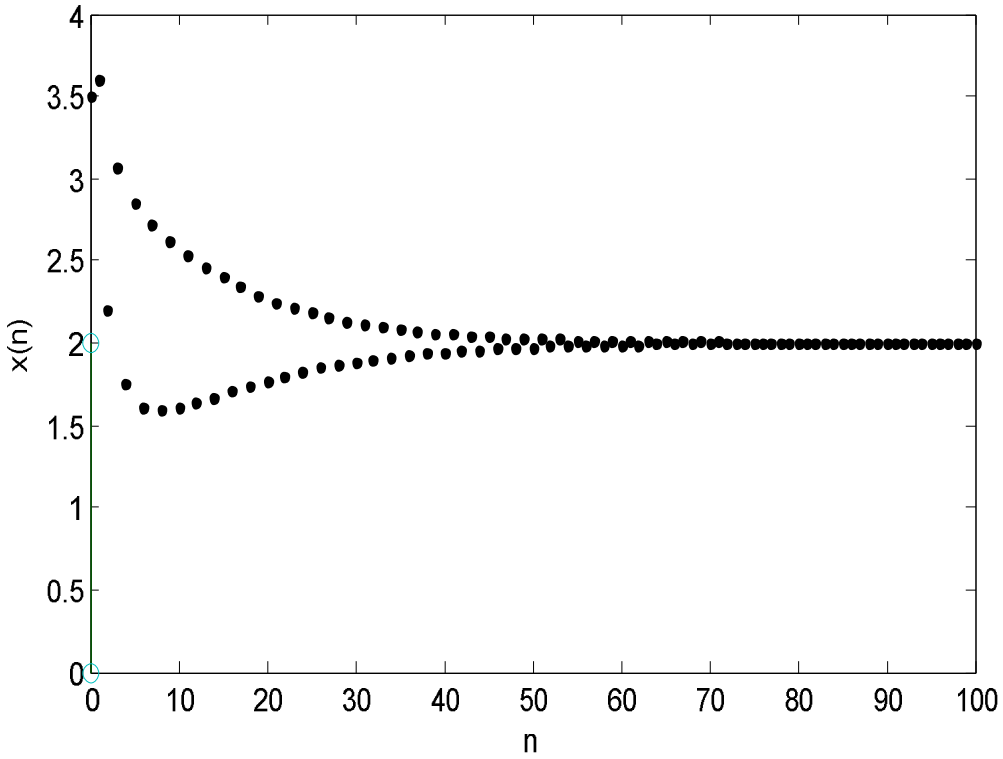
$$r + (\gamma_1 - \beta_0 r)x(n) + (\gamma_2 - \beta_1 r)x(n-1) < 0$$

olduğundan, şayet

$$x(n) > \frac{2r}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2}$$

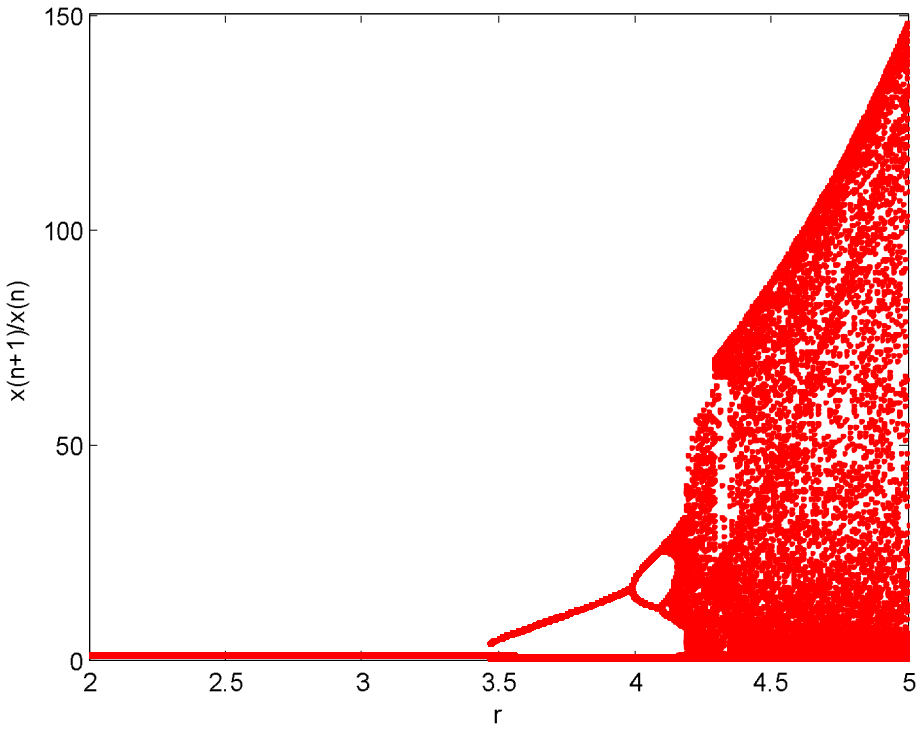
oluyorsa, (3.3.134) ifadesi negatiftir. Bu ise $\Delta V(n) < 0$ olması demektir. Bu da bize (3.3.128) fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olmasıdır.

Örnek 3.3.8. Teorem 3.3.9 dikkate alındığında $\alpha = 0.2, \beta_0 = 1, \beta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.4$, $\gamma_2 = 0.7, r = 0.8, x(-1) = 3.5, x(0) = 3.6$ değerleri seçilebilir. İlk 100 ardışık tekrar için (3.3.128) fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafik Şekil 3.3.8'de verilmiştir.



Şekil:3.3.8. $\alpha = 0.2,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0.6, \gamma_1 = 0.4,\ \gamma_2 = 0.7, r = 0.8,\ x(-1) = 3.5\ , x(0) = 3.6$ değerleri için (3.3.128) fark denkleminin çözüm dizisinin grafiği

Örnek3.3.9. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ değerleri için (3.3.128) fark denkleminin bifurcation diyagramı Şekil 3.3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.3.9. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9$ ve $r \in [2,5]$ için (3.3.128) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

3.3.4. (3.3.1) Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi

Bu kesimde (3.3.1) lojistik diferensiyel denklemine t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak elde edilen yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenecektir. Yerel ve global kararlılık analizinin teorik ispatı Kesim 3.3.1 ve Kesim 3.3.3 gibi olup bu kesimde teoremlerin sadece ifadeleri verilmiş, elde edilen sonuçlar (3.3.10) fark denkleminin çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlar ayrıca geometrik olarak gösterilmiştir.

Şimdi, $\gamma > 0$ olmak üzere

$$a\big(x([\![t]\!])\big) = \frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.3.135}$$

Allee fonksiyonunu ve $\bar{x}$, (3.3.1) diferensiyel denkleminin pozitif kritik noktası olmak üzere

$$r^* = \frac{r}{a(\bar{x})} \tag{3.3.136}$$

ve

$$v^* = \frac{1}{a(\bar{x})} \tag{3.3.137}$$

tanımlayalım. t zamanı için (3.3.1) diferensiyel denklemine bu Allee fonksiyonunu uygularsak

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big\{r^*\Big(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\Big) + v^*\big(\gamma_1 x([\![t]\!])$$

$$+ \gamma_2 x([\![t-1]\!])\big)\Big\}\frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.3.138}$$

lojistik diferensiyel denkleminini elde ederiz. Burada r^* , (3.3.138) diferensiyel denkleminin popülasyon oranını ve v^*'da (3.3.1) ve (3.3.138) denklemlerinin aynı olması için kullanılması gereken bir parametredir.

Şimdi bu denkleminin çözümlerini inceleyelim.

$t \in [n, n+1)$ için (3.2.138) diferensiyel denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} - \big\{r^*\big(1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\big) + v^*\big(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1)\big)\big\}\frac{x(n)}{\gamma + x(n)}x(t)$$

$$= -\alpha r^*\big(x(t)\big)^2 \frac{x(n)}{\gamma + x(n)} \tag{3.3.139}$$

formunda bir Bernoulli diferensiyel denklemidir.

$$M_1 = \big\{r^*\big\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\big\} + v^*\big(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1)\big)\big\}x(n)$$

ve

$$N_1 = \{r^*\{1 - \alpha x(n) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1))\}$$

$$\cdot \left(\exp\left\{-\left(r^*\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1))\right)\frac{x(n)}{\gamma + x(n)}\right\}\right) + \alpha r^* x(n)$$

olmak üzere $t \to n+1$ iken bu denkleminin çözümü

$$x(n+1) = \frac{M_1}{N_1} \tag{3.3.140}$$

fark denklemi olarak yazılabilir. Burada,

$$r^*\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1)) \neq 0 \tag{3.3.141}$$

dır. (3.3.140) ile (3.3.10) fark denkleminin denge noktaları aynıdır. Diğer taraftan,

$$Y = (\gamma_1 v^* - \beta_0 r^*) + ((\alpha + \beta_0) r^* - \gamma_1 v^*)$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{\alpha r^2 r^*}{((\alpha+\beta_0+\beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2)\left(((\alpha+\beta_0+\beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2)\gamma + r\right)}\right\}$$

ve

$$Z = (\gamma_2 v^* - \beta_1 r^*) \cdot \left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha r^2 r^*}{((\alpha+\beta_0+\beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2)\left(((\alpha+\beta_0+\beta_1)r - \gamma_1 - \gamma_2)\gamma + r\right)}\right\}\right)$$

olmak üzere (3.3.140) fark denkleminin pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda elde edilen denklemin kararkteristik denklemi

$$\mu^2 - \left\{\frac{Y}{\alpha r^*}\right\}\mu - \left\{\frac{Z}{\alpha r^*}\right\} = 0 \tag{3.3.142}$$

şeklindedir.

Şimdi aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.3.10. $3\beta_1 > \alpha + \beta_0 > 2\alpha + \beta_1$ ve $\gamma_2 > \gamma_1$ olsun. (3.3.140) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{(\gamma_2+\gamma_1)\left(((\alpha+\beta_0+\beta_1)r-\gamma_1-\gamma_2)\gamma+r\right)}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r} < r^* < \frac{\gamma_2 v^*}{\beta_1}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.3.1 gibi yapılır.

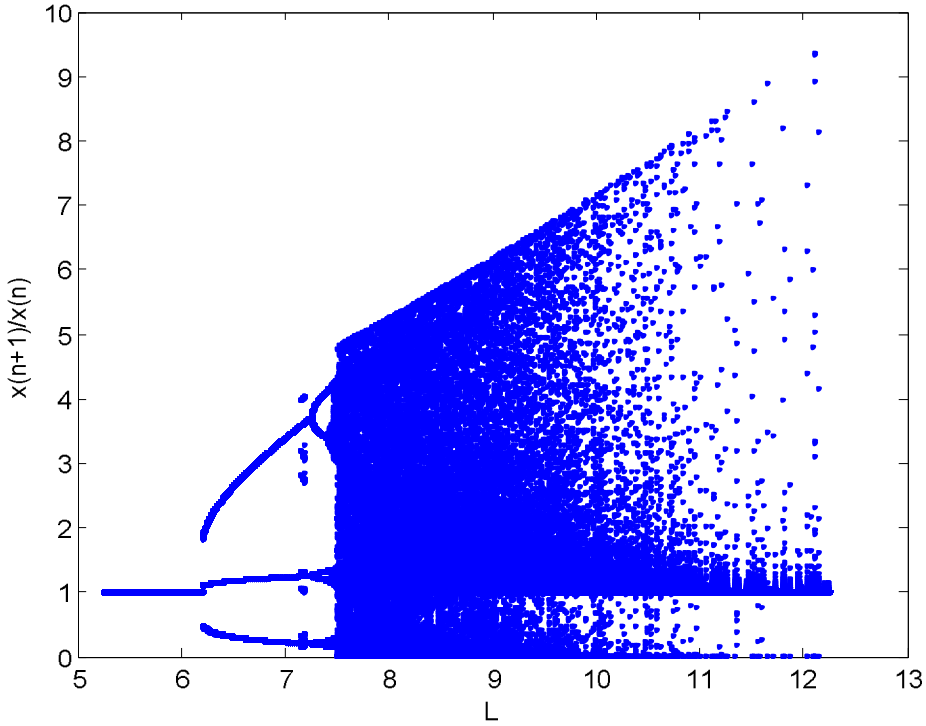
Teorem 3.3.11. n=0,1,2,… için (3.3.141) koşulu mevcut olsun. Üstelik, (3.3.140) fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olduğu kabul edilsin. Eğer

$$x(n) > \frac{2r^*}{(\alpha+\beta_0+\beta_1)r^*-\gamma_1 v^*-\gamma_2 v^*}$$

ise, bu taktirde (3.3.140) fark denkleminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.3.9 gibi yapılır.

Örnek 3.3.10. Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11 dikkate alındığında $\alpha = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002$, $x(-1) = 0.8$, $x(0) = 0.9$, $\gamma = 0.5$, $r \in [3,7]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ olmak üzere (3.3.140) fark denkleminin çözümlerinin grafiği Şekil 3.3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.3.10. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9\ , \gamma = 0.5$ ve $r \in [3,7]$ olmak üzere (3.3.140) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

Benzer şekilde t-1 zamanı için

$$a\big(x([\![t-1]\!])\big) = \frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.2.143}$$

Allee fonksiyonunu (3.3.1)'e uygularsak

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\Big\{r^*\Big(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\Big) + v^*\big(\gamma_1 x([\![t]\!])$$

$$+ \gamma_2 x([\![t-1]\!])\big)\Big\}\frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.3.144}$$

lojistik diferensiyel denklemi elde edilir. $t \in [n, n+1)$ ve $t \to n+1$ iken bu denkleminin çözümü

$$M_2 = \{r^*\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1))\}x(n)$$

ve

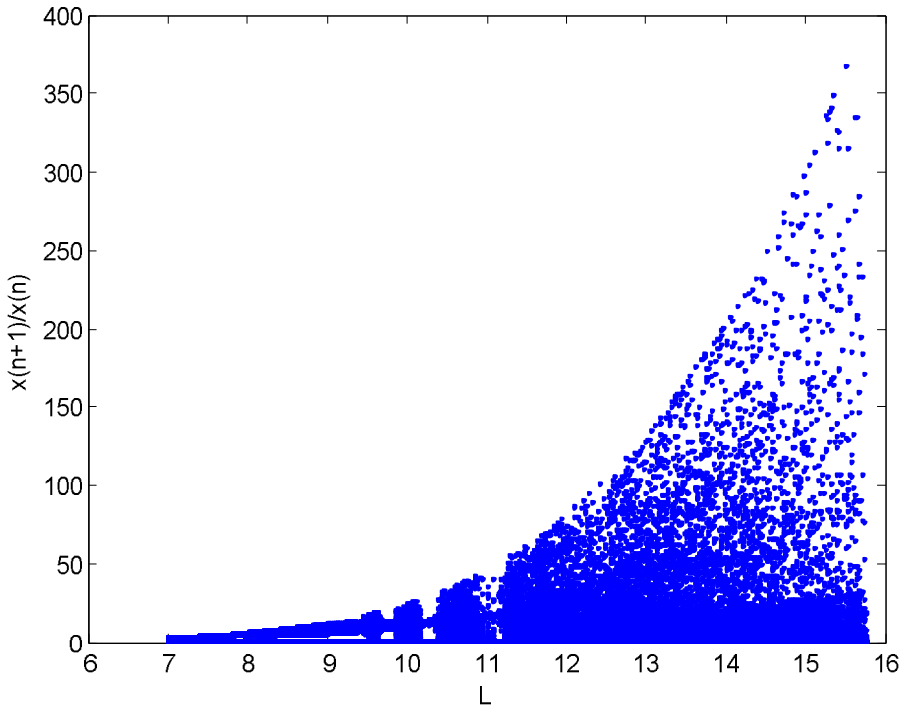
$$N_2 = \{r^*\{1 - \alpha x(n) - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1))\}$$
$$\left(\exp\left\{-\left(r^*\{1 - \beta_0 x(n) - \beta_1 x(n-1)\} + v^*(\gamma_1 x(n) + \gamma_2 x(n-1))\right)\frac{x(n-1)}{\gamma + x(n-1)}\right\}\right)$$
$$+\alpha r^* x(n)$$

olmak üzere

$$x(n+1) = \frac{M_2}{N_2} \tag{3.3.145}$$

şeklinde bir fark denklemidir Burada yine, (3.3.141) mevcut olmak üzere denkleminin denge noktaları (3.3.10) ile aynıdır ve (3.2.145) fark denkleminin pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda (3.3.142) elde edilir. Böylece, Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11'deki kararlılık koşulları (3.3.145) fark denklemi için de geçerli olur.

Örnek 3.3.11. Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11 dikkate alındığında $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9,\ \gamma = 0.5,\ r \in [4,9]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ olmak üzere (3.3.145) fark denkleminin çözümlerinin grafiği Şekil 3.3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.3.11. $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.145) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

Son olarak, t-1 ve t zamanı için

$$a(x([\![t-1]\!]), [\![t]\!]) = \frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])}, \tag{3.3.146}$$

$$a(x([\![t-1]\!]), [\![t]\!]) = \frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma + x([\![t]\!])} \tag{3.3.147}$$

Allee fonksiyonlarını (3.3.1)'e uygularsak, sırasıyla

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left\{r^*\left(1 - \alpha x(t) - \beta_0 x([\![t]\!]) - \beta_1 x([\![t-1]\!])\right) + v^*\left(\gamma_1 x([\![t]\!]) + \gamma_2 x([\![t-1]\!])\right)\right\}\frac{x([\![t]\!])}{\gamma + x([\![t-1]\!])} \tag{3.3.148}$$

ve

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left\{r^*\left(1-\alpha x(t)-\beta_0 x([\![t]\!])-\beta_1 x([\![t-1]\!])\right)+v^*\left(\gamma_1 x([\![t]\!])\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma_2 x([\![t-1]\!])\right)\right\}\frac{x([\![t-1]\!])}{\gamma+x([\![t]\!])} \tag{3.3.149}$$

lojistik diferensiyel denklemleri elde edilir. $t \in [n, n+1)$ ve $t \to n+1$ iken denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$M_3 = \left\{r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right\}x(n),$$

$$N_3 = \left\{r^*\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right\}$$
$$\cdot\left(\exp\left\{-\left(r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right)\frac{x(n)}{\gamma+x(n-1)}\right\}\right)$$
$$+\alpha r^* x(n)$$

ve

$$M_3 = \left\{r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right\}x(n),$$

$$N_3 = \left\{r^*\{1-\alpha x(n)-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right\}$$
$$\cdot\left(\exp\left\{-\left(r^*\{1-\beta_0 x(n)-\beta_1 x(n-1)\}+v^*\left(\gamma_1 x(n)+\gamma_2 x(n-1)\right)\right)\frac{x(n-1)}{\gamma+x(n)}\right\}\right)$$
$$+\alpha r^* x(n)$$

olmak üzere

$$x(n+1) = \frac{M_3}{N_3} \tag{3.3.150}$$

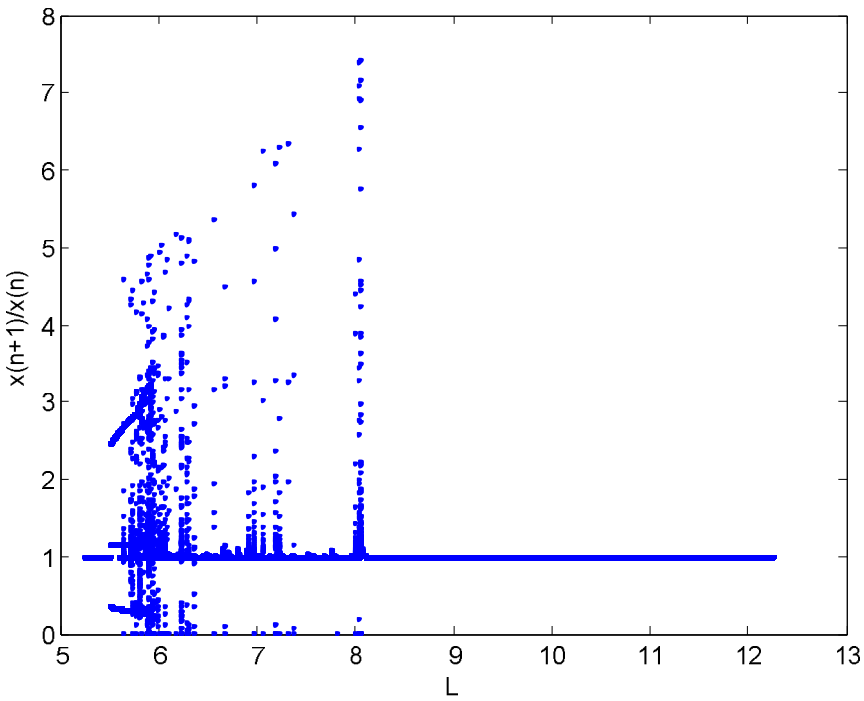
ve

$$x(n+1) = \frac{M_4}{N_4} \tag{3.3.151}$$

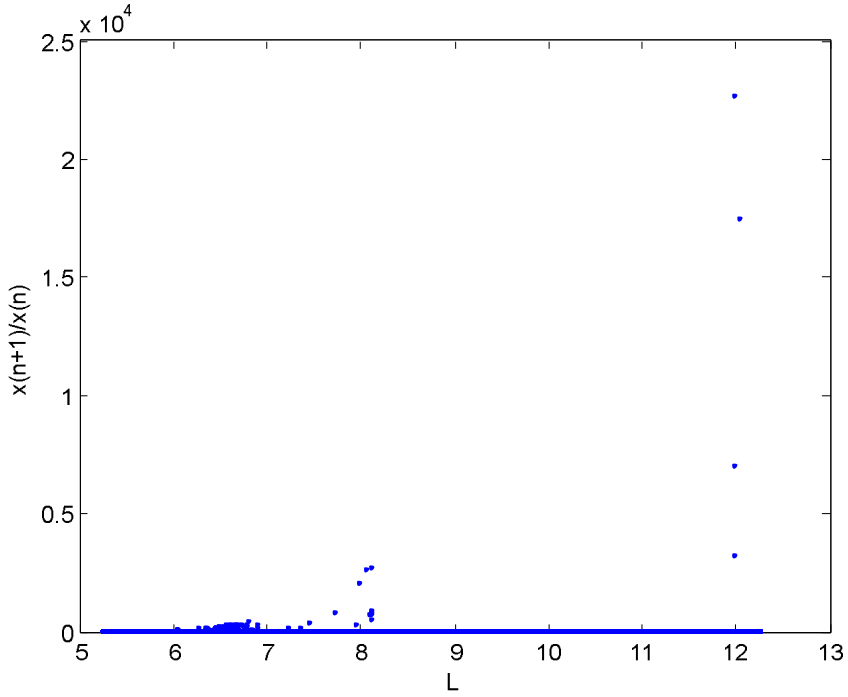
fark denklemleridir. Burada yine (3.3.141) şartı sağlanmalıdır. (3.3.150) ve (3.3.151) denklemlerinin denge noktaları (3.3.10) ile aynıdır. Ayrıca, (3.3.150) ve (3.3.151) fark

denklemlerinin pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmesi sonucunda (3.3.142) karakteristik denklemi elde edilir. Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11'deki kararlılık koşulları (3.3.150) ve (3.3.151) fark denklemleri için de geçerli olacaktır.

Örnek 3.3.12. Teorem 3.3.10 ve Teorem 3.3.11 dikkate alındığında $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,\ x(0) = 0.9,\ \gamma = 0.5,\ r \in [4,9]$ ve $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ seçilebilir. (3.3.150) ve (3.3.151) fark denklemlerinin çözümlerinin grafiği sırasıyla Şekil 3.3.12.(a) ve Şekil 3.3.12.(b)'de verilmiştir.



Şekil 3.3.12.(a) $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.150) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması



Şekil 3.3.12.(b) $\alpha = 0.2, \beta_0 = 0.8, \beta_1 = 0.5, \gamma_1 = 0.0001, \gamma_2 = 0.0002,\ x(-1) = 0.8,$ $x(0) = 0.9, \gamma = 0.5$ ve $r \in [4,9]$ olmak üzere (3.3.151) fark denkleminin çözümlerinin çatallanması

3.3.5. Kesim 3.3 İçin Genel Değerlendirme

Bu kesimde, elde edilen teorik sonuçlar MATLAB programını kullanılarak grafiklerle sunulmuş, oluşturulan fark denklemlerinin başlangıç koşulları $x(-1)$ ve $x(0)$ popülasyon yoğunluğu olarak seçilmiştir. Fark denklemlerin çözümlerine ait iki boyutlu grafikler, kararlılık analizinde bulunan teorik sonuçları desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

Kesim 3.3.1'de verilen Teorem 3.3.1-3.3.3 ve Kesim 3.3.3'te verilen Teorem 3.3.9, (3.3.10) fark denkleminin pozitif çözümlerinin pozitif denge noktası civarındaki yerel ve global davranışlarını karakterize etmiş, Örnek 3.3.1- 3.3.3 ile Örnek 3.3.8'de bunlara ait grafikler verilmiştir. Ayrıca, (3.3.10) fark denkleminin çözümünün bifurcation diyagramı incelendiğinde (Örnek 3.3.9), $r \in [2,5]$ olmak üzere r parametresi 3.4 değerine yaklaştığında yerel karalılık bozulmakta ve 4.3 değerine yaklaştığında kaos ortaya çıkmaktadır (Şekil 3.3.9).

Kesim 3.3.4'te ise (3.3.1) diferensiyel denklemi ve Allee sabiti $\gamma = 0.5$ olmak üzere farklı t değerleri için Allee fonksiyonları birlikte incelenmiştir. Bu çerçevede Örnek 3.3.9'da kullanılan parametre değerleri aynı olmak üzere Allee etkisinin kararlılık aralığını genişlettiğini ($r \in [4,9]$ için $L = r^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$ ve $v^* = \frac{r}{a(\bar{x})}$), L'nin 6.2 değerinden sonra kararlılığının bozulduğu ve 7.5 değerine yaklaştığında ise kaosun ortaya çıktığı görülmüştür (Örnek 3.3.10-Şekil 3.3.10). Diğer taraftan, (3.3.145) fark denkleminde ise L'nin değerinin 7.5'e yakın olduğu yerlerde kararlılığın sona erdiği ve L'nin değerinin 9.5'e yaklaştığı durumda kaosun başlandığı gözlenmektedir (Örnek 3.3.11-Şekil 3.3.11). Ayrıca, (3.3.150) denkleminde L değerinin 6 civarında olması halinde kararlılıktan kaosa geçişin olduğu ve (3.3.151) fark denkleminde ise L'nin 6.5 değerine yaklaştıkça kaosun başladığı görülmüştür (Örnek 3.3.12-Şekil 3.3.12(a) ve Şekil 3.3.12(b)).

Sonuç olarak, yukarıda söylediklerimizi özetlersek, Allee etkili fark denklemlerin çözümlerinin Allee etkisiz olanlara kıyasla daha geç kararsızlığa geçtiği görülmektedir. Buna ilave olarak, Allee etkisini oluşturmak amacıyla seçilen Allee fonksiyonları arasında kararsızlığa geçişi geciktiren en etkili fonksiyonun ise (3.3.145) olduğu, yani sadece t-1 zamanı için oluşturulan Allee fonksiyonu olduğu tespiti yapılabilir.

4. BÖLÜM

ZAMANA GÖRE GECİKMELİ (DELAY) LOJİSTİK DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde zamana göre gecikmeli lojistik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin analizi üzerinde durulmuştur. Hedeflenen analizi kolaylaştırmak amacıyla, uygun dönüşümler yapılarak oluşturulan lojistik diferensiyel denklemlerin denge noktalarının yerel ve global kararlılıkları incelenmiştir. Ayrıca, aynı lojistik denklemlere farklı t zamanları için tanımlanmış Allee fonksiyonları uygulanmış ve denklemlerin çözümlerinde meydana gelen davranışlar göz önüne alınarak Allee etkili ve Allee etkisiz denklemlerin mukayeseleri yapılmıştır.
Öncellikle bazı temel tanım ve teoremler gözden geçirilecektir.

4.1. Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi İle İlgili Bazı Tanım Ve Teoremler

Bu kesimde, bundan sonraki kesimlerde zamana göre gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad \text{ve} \qquad x(t_0) = x_0 \tag{4.1.1}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Burada x^*'da (4.1.1)'de belirtilen diferensiyel denklemin kritik noktası olsun.

Tanım 4.1.1. (4.1.1)'de $\forall\varepsilon > 0$ için $|x(t_0) - x^*| < \delta$ olduğunda her t zamanı için $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ varsa, bu taktirde x^* kritik noktasına **yerel kararlıdır** denir [108].

Tanım 4.1.2. (4.1.1)'de eğer x^* kritik noktası yerel kararlı ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ ise bu taktirde x^* kritik noktasına **yerel asimptotik kararlıdır** denir [108].

Tanım 4.1.3. ($x^* = 0$ noktasında Lyapunov'a göre kararlılık)
(4.1.1)'in bir kritik noktası $x^* = 0$ olmak üzere eğer

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ varsa, bu taktirde $x^* = 0$ kritik noktasına (Lyapunov'a göre) $\mathbf{t_0 = 0}$**'da kararlıdır** denir.
Ayrıca, (4.1.1)'in bir kritik noktası $x^* = 0$ olmak üzere eğer
i) $x^* = 0$ kararlı
ii) $x^* = 0$ yerel çekici, yani

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{4.1.3}$$

ise, bu taktirde $x^* = 0$ kritik noktasına $t_0 = 0$'da **asimptotik kararlıdır** denir [108].

Tanım 4.1.4. Bütün $x_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç koşulları için Tanım 4.1.1-Tanım 4.1.3'te verilen koşulları sağlayan x^* kritik noktasına **global kararlıdır** denir .

Şimdi, Lyapunov fonksiyonu ile ilgili bir temel bilgiler verelim.
Reel değerli, sürekli ve türevlenebilir bir f fonksiyonu tanımlanmış olsun. Eğer f(0)=0 ve sıfırdan farklı her x değeri için f(x)>0 oluyor ise bu taktirde bu fonksiyona **sıfır değeri civarında pozitif tanımlıdır** denir. Buna göre,

$$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{4.1.4}$$

şeklinde bir skaler fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer V yerel pozitif tanımlı bir fonksiyon ise, yani

$$\mathrm{V}(0)=0 \quad \text{ve} \quad \mathrm{V}(\mathrm{x}) > 0, \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{U} - \{0\} \subset \mathbb{R}^n \tag{4.1.5}$$

şeklinde ise, bu taktirde V bir Lyapunov fonksiyonudur.
Eğer

$$\dot{\mathrm{V}} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} \cdot \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}} = \nabla \mathrm{V} \cdot \dot{\mathrm{x}} = \nabla \mathrm{V} \cdot \mathrm{f} \tag{4.1.6}$$

olmak üzere $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{U} - \{0\}$ için

$$\dot{\mathrm{V}} \leq 0 \tag{4.1.7}$$

oluyor ise $\mathrm{x}^* = 0$ kritik noktası **kararlı**,

$$\dot{\mathrm{V}} < 0 \tag{4.1.8}$$

ise **yerel asimptotik kararlıdır**.
Ayrıca,

$$\|\mathrm{x}\| \to \infty \text{ ise } V \to \infty \tag{4.1.9}$$

olmak üzere V fonksiyonu global pozitif tanımlı olup (4.1.8) şartını sağlıyor ise, bu taktirde ise $\mathrm{x}^* = 0$ kritik noktası **global asimptotik kararlıdır**.
Eğer $\mathrm{x}^* \neq 0$ ve Lyapunov'a göre kararlılık analizi yapılacaksa, bu taktirde (4.1.7), (4.1.8) ve (4.1.9)'da $\mathrm{v} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^*$ dönüşümü yapılır[109].

Lemma 4.1.1.(Hale Lemması) a_1 ve a_2 reel değerli olmak üzere

$$\lambda + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \mathrm{e}^{-\lambda} = 0$$

karakteristik denklemin köklerinin negatif olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$a_1 > -1, \tag{4.1.10}$$

$$a_1 + a_2 > 0, \tag{4.1.11}$$

$$a_2 < \sqrt{\chi^2 + a_1^2}, \tag{4.1.12}$$

olmasıdır. Burada χ , $a_1 \neq 0$ olduğunda $\chi = -a_1 \tan\chi$ $(0 < \chi < \pi)$ eşitliğinin kökü, $a_1 = 0$ olması halinde ise $\chi = \frac{\pi}{2}$ dir [110].

Şimdi a, τ_1 ve τ_2 pozitif sabitler, $f \in C(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + [f(x(t-\tau_1)) + f(x(t-\tau_2))] \tag{4.1.13}$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınmış olsun. x^*, (4.1.13) diferensiyel denkleminin kritik noktası ve $b = -f'(x^*)$ olmak üzere (4.1.13)'ün lineerleştirilmiş şekli

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - b[x(t-\tau_1) + x(t-\tau_2)] \tag{4.1.14}$$

ve buna ait karakteristik denklemi

$$\lambda = -b\left[e^{-\lambda\tau_1} + e^{-\lambda\tau_2}\right] - a \tag{4.1.15}$$

dir. Buna göre aşağıdaki teoremler ispatlanabilir [112].

Teorem 4.1.1.

$$b_0{}^+ = \min_{j\geq 1}\{b_j : b_j > 0\} \quad \text{ve} \quad b_0{}^- = \max_{j\geq 1}\left\{-\frac{a}{2}, b_j : b_j < 0\right\} \tag{4.1.16}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda (4.1.15) denkleminin bütün köklerinin negatif reel sayı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $b \in (b_0{}^-, b_0{}^+)$ olmasıdır. Eğer $b_0{}^+ = \min_{j\geq 1}\{b_j : b_j > 0\} = \emptyset$ ise, bu taktirde sonuç $b \in (b_0{}^-, \infty)$ için geçerlidir.

Teorem 4.1.2. $j \geq 1$ olmak üzere

$$\omega_j \in \left(\frac{(2j-1)\pi}{\tau_1+\tau_2}, \frac{(2j+1)\pi}{\tau_1+\tau_2}\right), \tag{4.1.17}$$

$$b_j = \frac{a}{2\cos\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\omega_j\right)\cos\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\omega_j\right)} \tag{4.1.18}$$

ve (4.1.16) koşulları mevcut olsun. Bu durumda (4.1.13) denkleminin x^* kritik noktasının asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $b \in \left(b_0^-, b_0^+\right)$ olmasıdır. Eğer $b_0^+ = \min_{j\geq 1}\{b_j : b_j > 0\} = \emptyset$ ise, bu taktirde sonuç $b \in (b_0^-, \infty)$ için geçerlidir.

Allee effect ile ilgili bazı temel bilgiler Bölüm 3'te verilmişti. Burada zamana göre gecikmeli bir matematiksel model için Alle fonksiyonu hakkında bazı bilgiler verilecektir;

a) $\forall N \in [0, \infty)$ için $f'(N) < 0$

b)$f(0)$ bir pozitif sonlu sayı

olmak üzere

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) f\big(N(t-T)\big) = F(N(t), N(t-T)) \tag{4.1.19}$$

zaman göre gecikmeli lojistik diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu denklem için Allee etkisini tespit etmek için

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) a(N(t)) f\big(N(t-T)\big) = F_a(N(t), N(t-T)) \tag{4.1.20}$$

denklemi ele alınır.

Burada $a(N(t))$ Allee fonksiyonu için biyolojik anlamda aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

a) N=0 ise, a(N)=0, yani üreme yoktur

b) $N \in (0, \infty)$ için $a'(N) > 0$, yani yoğunluk arttıkça Allee etkisi azalır

c) $\lim_{N\to\infty} a(N) = 1$, yani yüksek yoğunlukta Allee etkisi 1 değerine yakınsar [92].

4.2. $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)$ Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi

Bu kesimde α, β bilinen pozitif reel sayılar, $r, \gamma \in R - \{0\}$ ve $\tau > 0$ gecikme zamanı olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau) \qquad (4.2.1)$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. Bunun için S. Ruan ve J. Wei'nin [111] elde ettikleri sonuçlar dikkate alınmış ve ayrıca uygun Lyapunov fonksiyonları oluşturularak (4.2.1) diferensiyel denkleminin kararlılık analizi yapılmıştır. Buna ilave olarak (4.2.1) denklemine belirli tipte Allee fonksiyonları uygulanmış ve Allee etkisinin oluşturduğu değişiklikler tespit edilerek elde edilen bulgular geometrik olarak gösterilmiştir.

Şimdi (4.2.1) diferensiyel denkleminin kararlılık analizini yapalım.

4.2.1. Yerel Ve Global Kararlılık Analizi

Bu kesimde (4.2.1) diferensiyel denkleminin denge noktalarının yerel ve global kararlılığı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar geometrik olarak gösterilmiştir.

Şimdi (4.2.1) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde t yerine τt yazarsak

$$\frac{dx(\tau t)}{dt} = rx(\tau t)\{1 - \alpha x(\tau t) - \beta x(\tau t - \tau)\} + \gamma x(\tau t - \tau) \qquad (4.2.2)$$

elde edilir. Şimdi $u(t) = x(\tau t)$ dönüşümü yapalım.

Buna durumda,

$$\frac{du(t)}{dt} = \tau \frac{dx(\tau t)}{dt} \tag{4.2.3}$$

olmak üzere (4.2.2)'den

$$\frac{du(t)}{dt} = \tau r u(t)\{1 - \alpha u(t) - \beta u(t-1)\} + \gamma \tau u(t-1) \tag{4.2.4}$$

elde edilir.

$$\bar{u}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}, \; r \neq 0 \tag{4.2.5}$$

noktaları (4.2.4) diferensiyel denkleminin kritik noktalarıdır. O halde (4.2.4) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası civarında linnerleştirilmiş şekli

$$\frac{du(t)}{dt} = r\tau u(t) + \gamma \tau u(t-1) \tag{4.2.6}$$

ve buna ait karakteristik denklemi de

$$\lambda - r\tau - \gamma \tau e^{-\lambda} = 0 \tag{4.2.7}$$

dir. Benzer şekilde (4.2.4) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası civarında lineerleştirilmiş şeklini bulalım. Bunun için

$$y(t) = u(t) - \bar{u}_2 \tag{4.2.8}$$

dönüşümü yapılarak

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\tau(2\alpha r \bar{u}_2 + \beta r \bar{u}_2 - r)y(t) - \tau(\beta r \bar{u}_2 - \gamma)y(t-1) \tag{4.2.9}$$

denklemi elde edilir. Bu (4.2.4)'ün lineerleştirilmiş şeklidir ve buna ait karakteristik denklem de

$$\lambda + \tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) + \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma)e^{-\lambda} = 0 \tag{4.2.10}$$

dır.

(4.2.5) kritik noktalarının kararlılık analizini yapabilmek için (4.2.7) ve (4.2.10) karakteristik denklemlerinin köklerinin ayrıntılı bir incelenmesine ihtiyaç vardır. Halbuki bu kökleri bulmak hiç de kolay değildir. Bu nedenle anılan denklemlerin köklerinin özelliklerinin tespitinde Hale Lemma'sına ihtiyaç duyulur. Aşağıdaki Teoremin ifade ve ispatı Hale Lemması [110] dikkate alınarak oluşturulmuştur.

Teorem 4.2.1. $\bar{u}_1 = 0$ ve $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$, $(r \neq 0)$ noktaları (4.2.1) diferensiyel denkleminin kritik noktaları olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $r < \frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = r\tau\tan\chi, \ , \ 0 < \chi < \pi \tag{4.2.11}$$

olmak üzere

$$-\frac{1}{\tau}\sqrt{\chi^2 + r^2\tau^2} < \gamma < -r \tag{4.2.12}$$

ise, bu taktirde (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası yerel kararlıdır.

ii) $\gamma > -\frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = -\frac{\tau}{\alpha+\beta}\big((2\alpha+\beta)\gamma + \alpha r\big)\tan\chi, \ \ 0 < \chi < \pi \tag{4.2.13}$$

olmak üzere

$$-\gamma < r < \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)\big((2\alpha+\beta)\gamma + \alpha r\big)^2} \tag{4.2.14}$$

ise, bu taktirde (4.2.1) diferensiyel denklemin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası yerel kararlıdır.

İspat.

i) Lemma 4.1.1 (Hale Lemması) ve (4.2.7) denklemi birlikte dikkate alınırsa,

$$a_1 = -r\tau \qquad \text{ve} \qquad a_2 = -\gamma\tau \tag{4.2.15}$$

dir. Lemma 4.1.1'in koşulları incelendiğinde, (4.1.10)'dan

$$a_1 = -r\tau > -1 \tag{4.2.16}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $r < \frac{1}{\tau}$ elde edilir ki bu da (i) kabulüdür.

Diğer taraftan, (4.1.11)'den

$$a_1 + a_2 = -r\tau - \gamma\tau > 0 \tag{4.2.17}$$

olmalıdır. $\tau > 0$ olduğundan

$$-(r + \gamma) > 0 \tag{4.2.18}$$

ve buradan da

$$\gamma < -r \tag{4.2.19}$$

bulunur.

Son olarak, (4.2.11) koşulu sağlanmak üzere (4.1.12)'den

$$-\gamma\tau < \sqrt{\chi^2 + r^2\tau^2} \tag{4.2.20}$$

ve buradan

$$-\frac{1}{\tau}\sqrt{\chi^2+r^2\tau^2} < \gamma \tag{4.2.21}$$

bulunur. (4.2.19) ve (4.2.21) birlikte dikkate alındığında (4.2.12) elde edilir.
ii) Lemma 4.1.1 ve (4.2.10) denklemi birlikte dikkate alınırsa,

$$a_1 = \tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) \qquad \text{ve} \qquad a_2 = \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma) \tag{4.2.22}$$

yazılabilir. Buna göre (4.1.10)'dan

$$a_1 = \tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) > -1 \tag{4.2.23}$$

olmalıdır. Bu durumda, $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ olmak üzere (4.2.23) eşitsizliği

$$\alpha\frac{r+\gamma}{(\alpha+\beta)} + \gamma > \frac{-1}{\tau} \tag{4.2.24}$$

şeklinde olup

$$r > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} - \frac{(2\alpha+\beta)\gamma}{\alpha} \tag{4.2.25}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1.11)'den

$$\tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) + \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma) > 0 \tag{4.2.26}$$

eşitsizliği ve buradan da

$$r > -\gamma \tag{4.2.27}$$

elde edilir. Son olarak, (4.1.12)'den

$$\tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma) < \sqrt{\chi^2 + \tau^2(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r)^2} \tag{4.2.28}$$

yazılabilir. $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ olduğu ve (4.2.13) birlikte dikkate alındığında (4.2.28)'den

$$r < \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)\big((2\alpha+\beta)\gamma+\alpha r\big)^2} \tag{4.2.29}$$

bulunmuş olur. (4.2.27) ve (4.2.29) birlikte dikkate alındığında (4.2.14) koşulunun sağlanabilir olması için

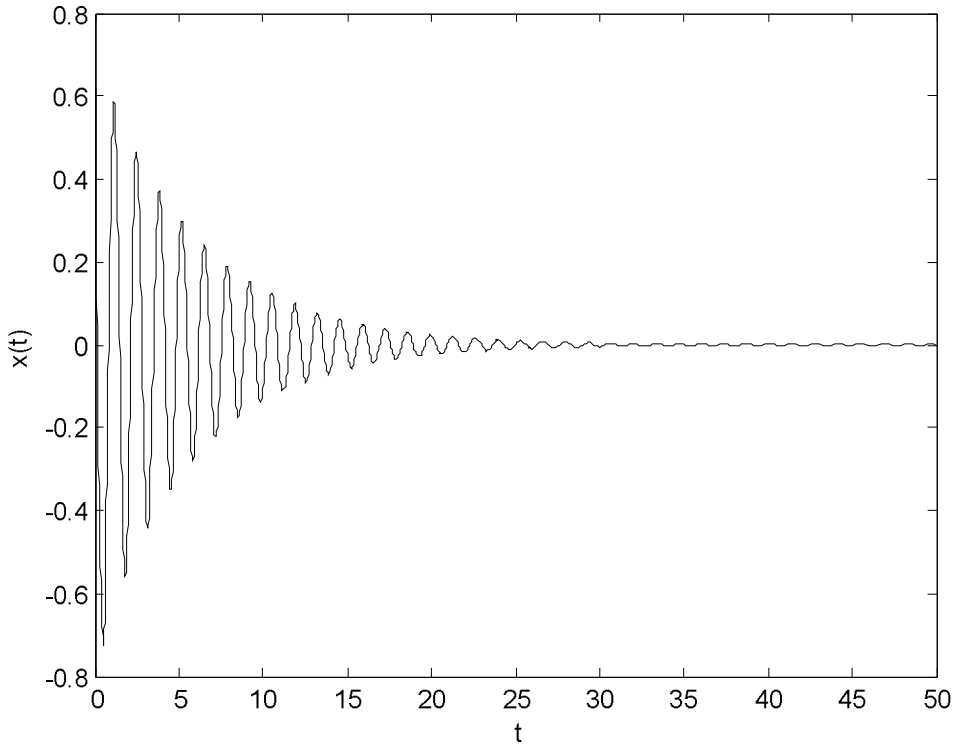
$$-\gamma > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} - \frac{(2\alpha+\beta)\gamma}{\alpha} \tag{4.2.30}$$

eşitsizliğinin elde edilmesi gerekir. Bu ise (4.2.25) ve (4.2.28)'den elde edilir. Diğer taraftan, (4.2.30) eşitsizliği

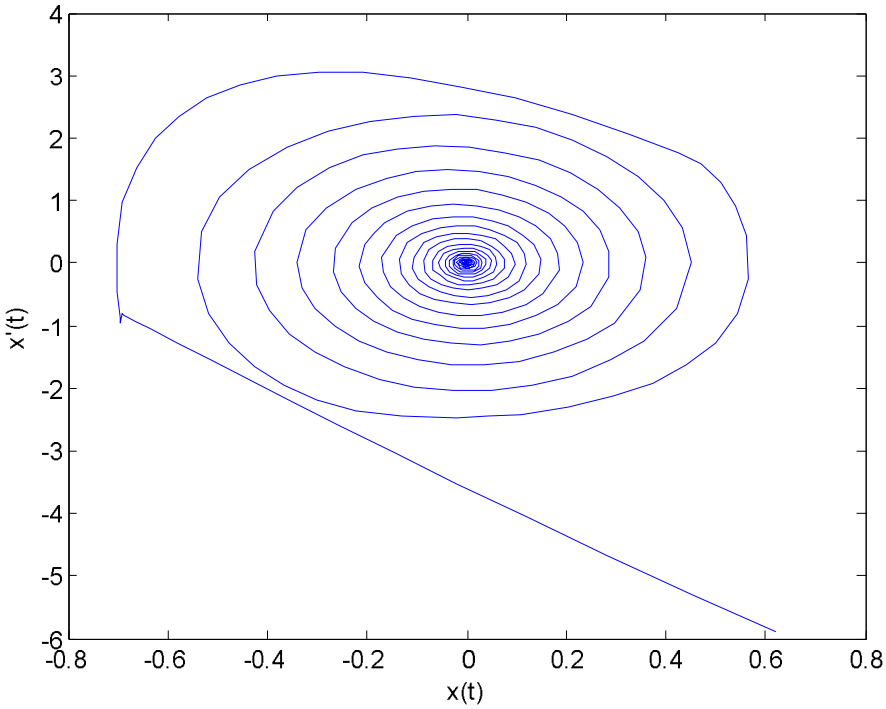
$$\gamma > -\frac{1}{\tau} \tag{4.2.31}$$

eşitsizliğini verir. Bu da teormin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.1. Teorem 4.2.1/(i) dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = -4.712388$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.3$, $\gamma = -6$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.1 (a) ve (b)'de verilmiştir.

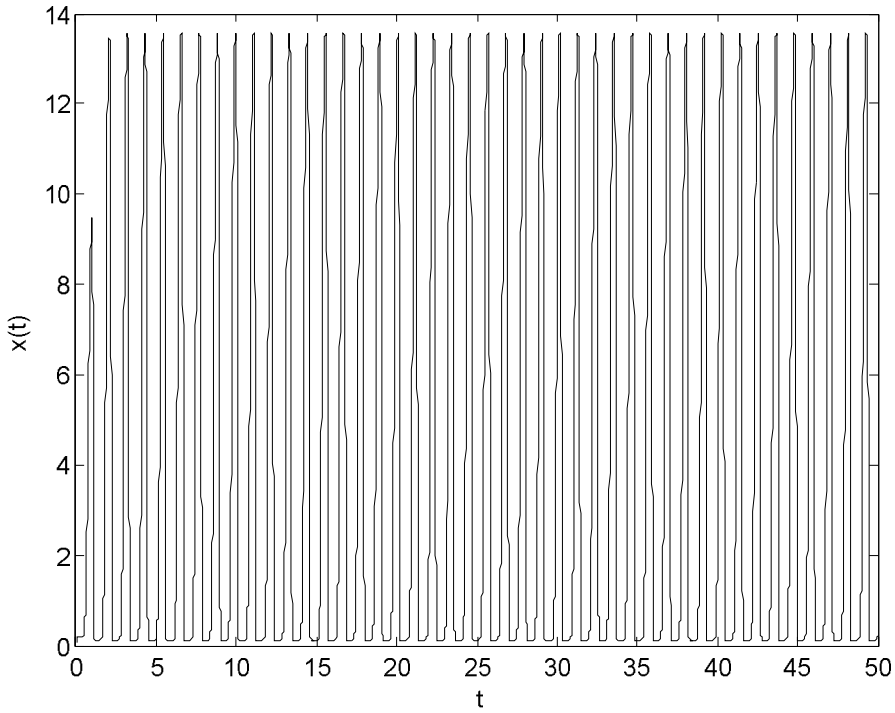


Şekil 4.2.1(a) $\tau = 0.5,\ r = -4.712388,\ \alpha = 0.05,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -6$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

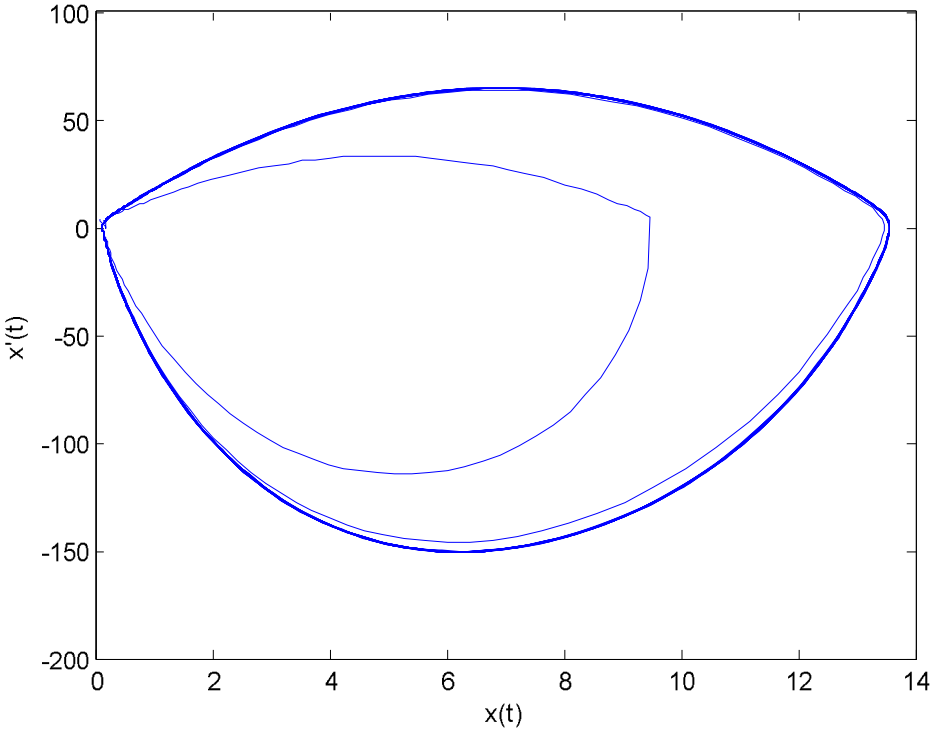


Şekil 4.2.1(b) $\tau = 0.5,\ r = -4.712388,\ \alpha = 0.05,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -6$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.2. Teorem 4.2.1/(i) dikkate alındığında $\tau = 0.5,\ r = -4.712388,\ \alpha = 0.05,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -8$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının kararsız yapısı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.2 (a) ve (b)'de verilmiştir.

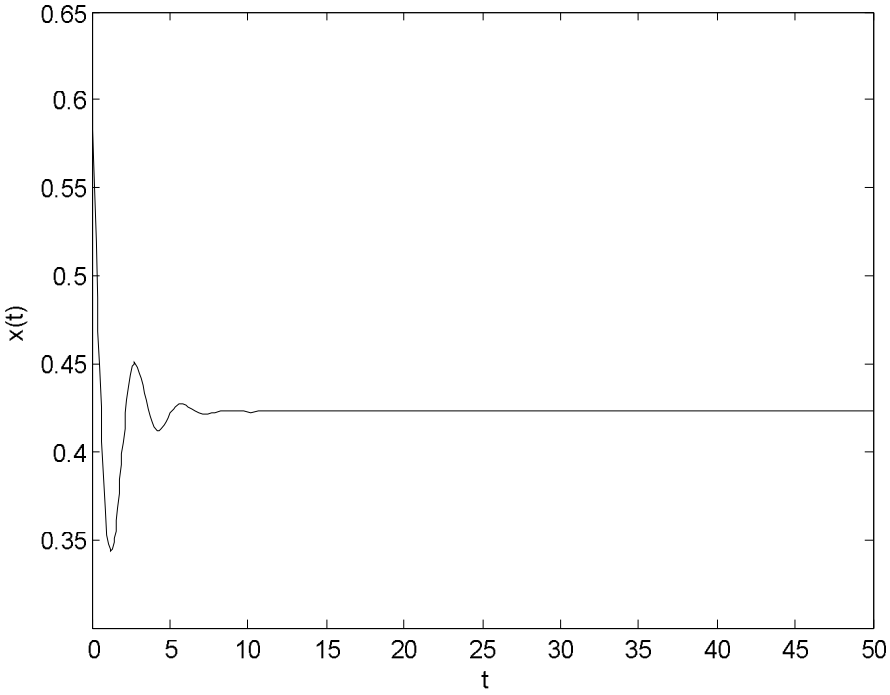


Şekil 4.2.2(a) $\tau = 0.5, r = -4.712388, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = -8$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

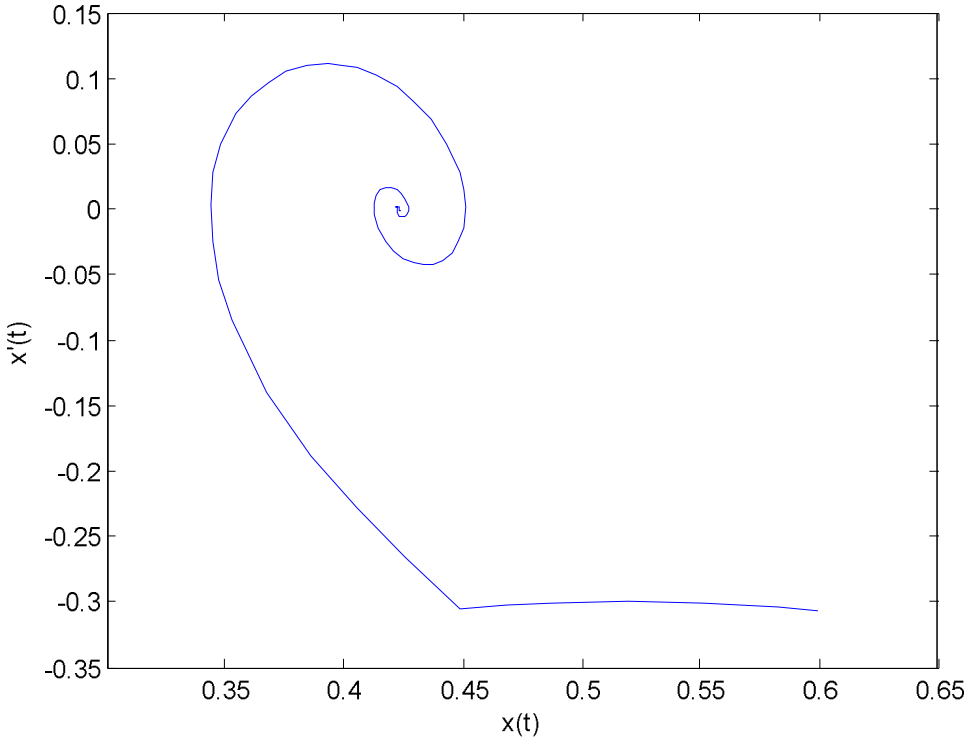


Şekil 4.2.2(b) $\tau = 0.5, r = -4.712388, \alpha = 0.05, \beta = 0.3,$ $\gamma = -8$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.62$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.3. Teorem 4.2.1/(ii) dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 2.2214414622$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.3(a) ve (b)'de verilmiştir.

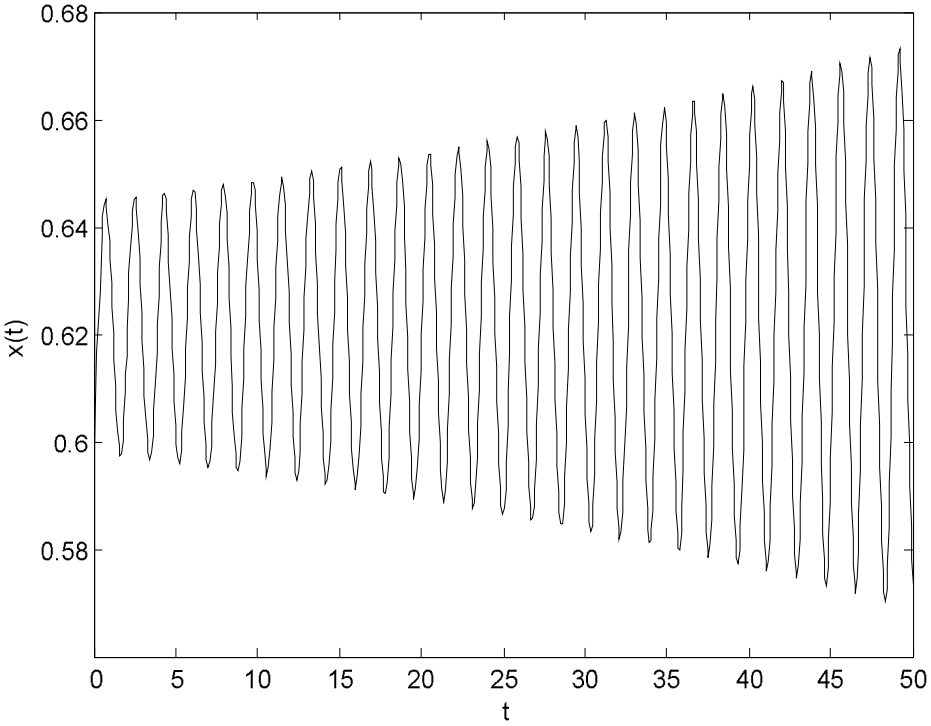


Şekil 4.2.3(a) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

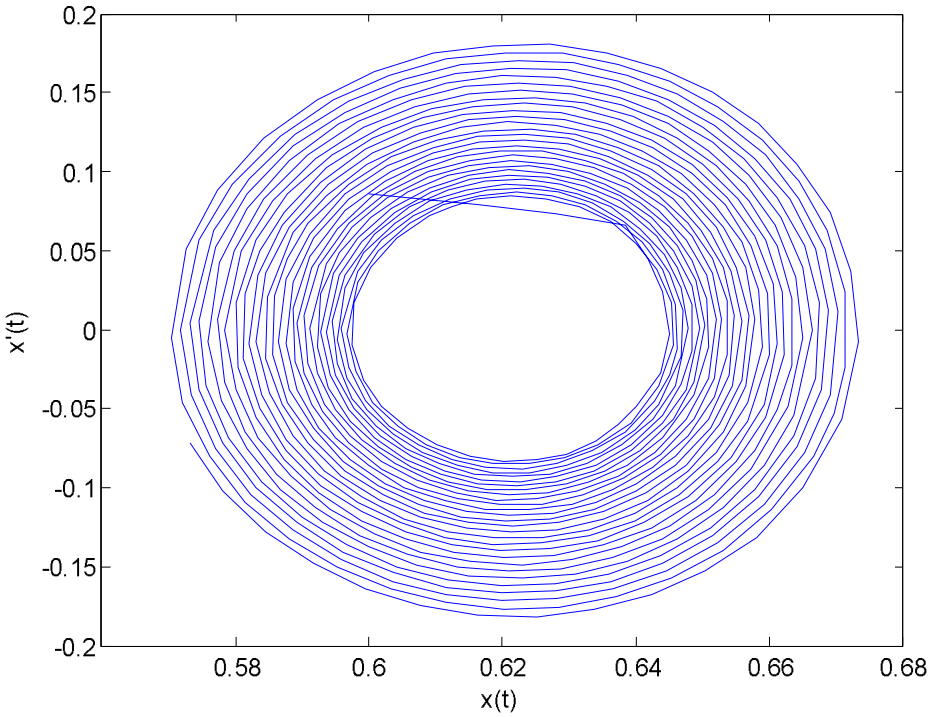


Şekil 4.2.3(b) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.4. Teorem 4.2.1/(ii) dikkate alındığında $\tau = 0.5, r = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının kararsız yapısı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.4(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.4(a) $\tau = 0.5, r = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $xx(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.4(b) $\tau = 0.5, r = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.2. Eğer $\gamma^2 < r^2$ ise, bu taktirde her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.2.7) karakteristik denkleminin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda

$$i\omega_0 - r\tau - \gamma\tau e^{-i\omega_0} = 0 \tag{4.2.32}$$

yazılabilir. Buradan

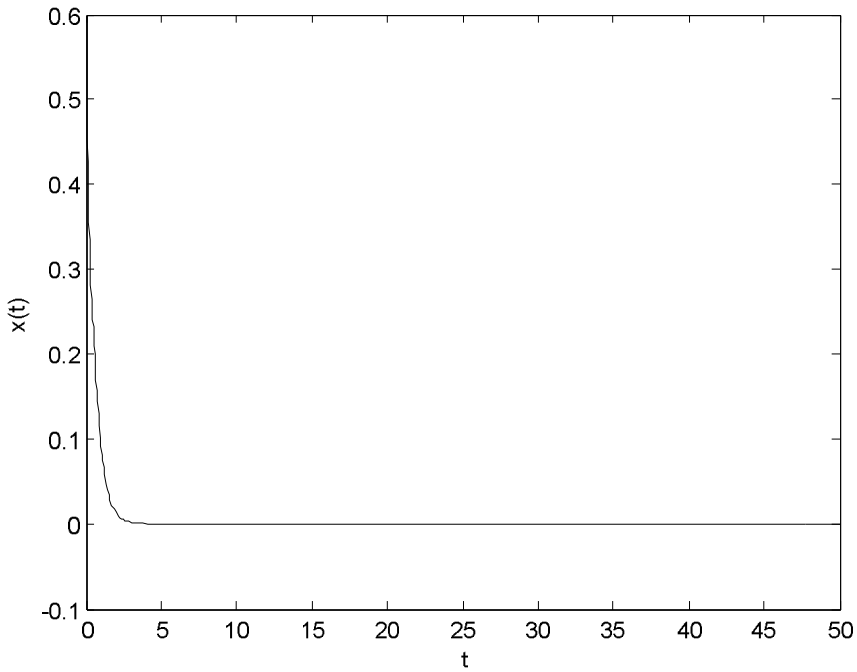
$$\begin{cases} -r\tau - \gamma\tau\cos\omega_0 = 0 \\ \omega_0 + \gamma\tau\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{4.2.33}$$

ve

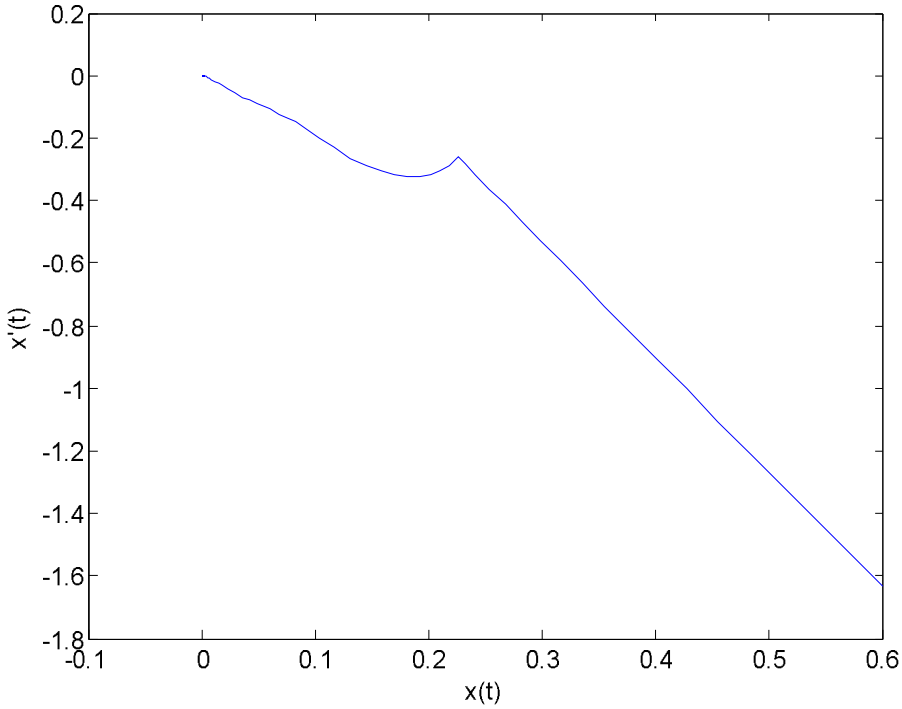
$$\omega_0^2 = \tau^2(\gamma^2 - r^2) \tag{4.2.34}$$

bulunur. $\gamma^2 < r^2$ hipotezi dikkate alınırsa (4.2.7) karakteristik denklemin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir. Bu ise Teorem 4.1.2'ye göre her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.5. Teorem 4.2.2 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = -4.712388975$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.5(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.5(a) $\tau = 0.5, r = -4.712388975, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.5(b) $\tau = 0.5, r = -4.712388975, \alpha = 0.05, \beta = 0.3, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.3. $\beta > \alpha$, $r \neq 0$ ve $r < \frac{(3\alpha+\beta)\gamma}{\beta-\alpha}$ olsun. Bu durumda her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ pozitif kritik noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.2.10) karakteristik denklemin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda

$$i\omega_0 + \tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) + \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma)e^{-i\omega_0} = 0 \tag{4.2.35}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{cases} \tau(2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r) + \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma)\cos\omega_0 = 0 \\ \omega_0 - \tau(\beta r\bar{u}_2 - \gamma)\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{4.2.36}$$

yazmak mümkündür. Buradan da

$$\omega_0^2 = \tau^2((\beta r\bar{u}_2 - \gamma)^2 - (2\alpha r\bar{u}_2 + \beta r\bar{u}_2 - r)^2) \tag{4.2.37}$$

ve son ifadenin düzenlenmesiyle

$$\omega_0^2 = \tau^2 \frac{(\gamma+r)}{(\alpha+\beta)}\big((r-\gamma)(\alpha+\beta) - 2\alpha(r+\gamma)\big) \tag{4.2.38}$$

bulunur. Ayrıca, Teorem 2.1/(ii)'den

$$\gamma + r > 0$$

dır. Buna göre, eğer

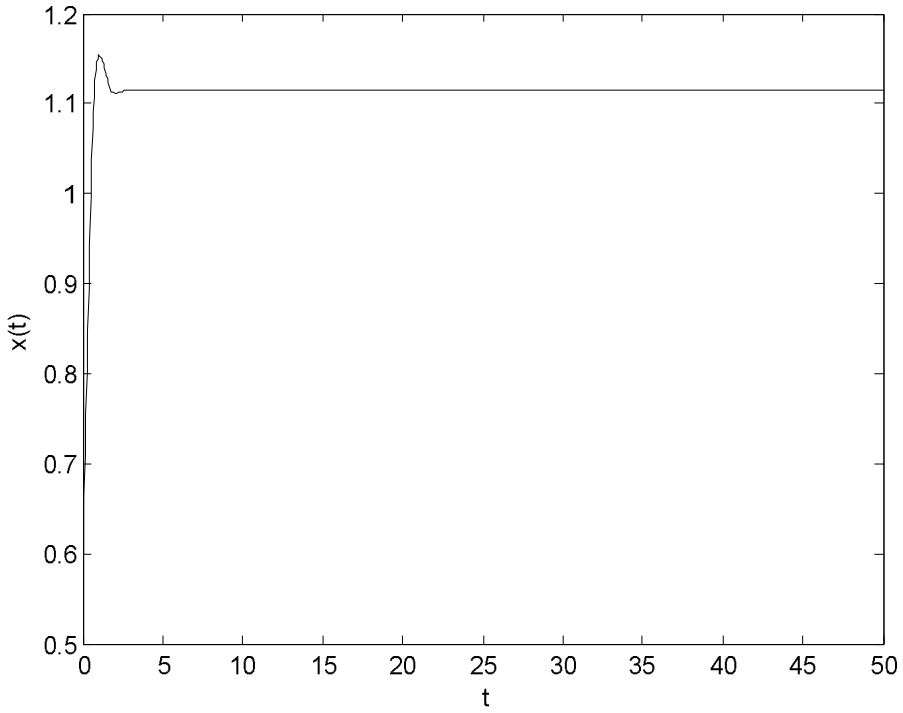
$$(r-\gamma)(\alpha+\beta) - 2\alpha(r+\gamma) < 0 \tag{4.2.39}$$

ise, $\omega_0^2 < 0$ olacaktır. (4.2.39) eşitsizliğinden, $\beta > \alpha$ olmak üzere

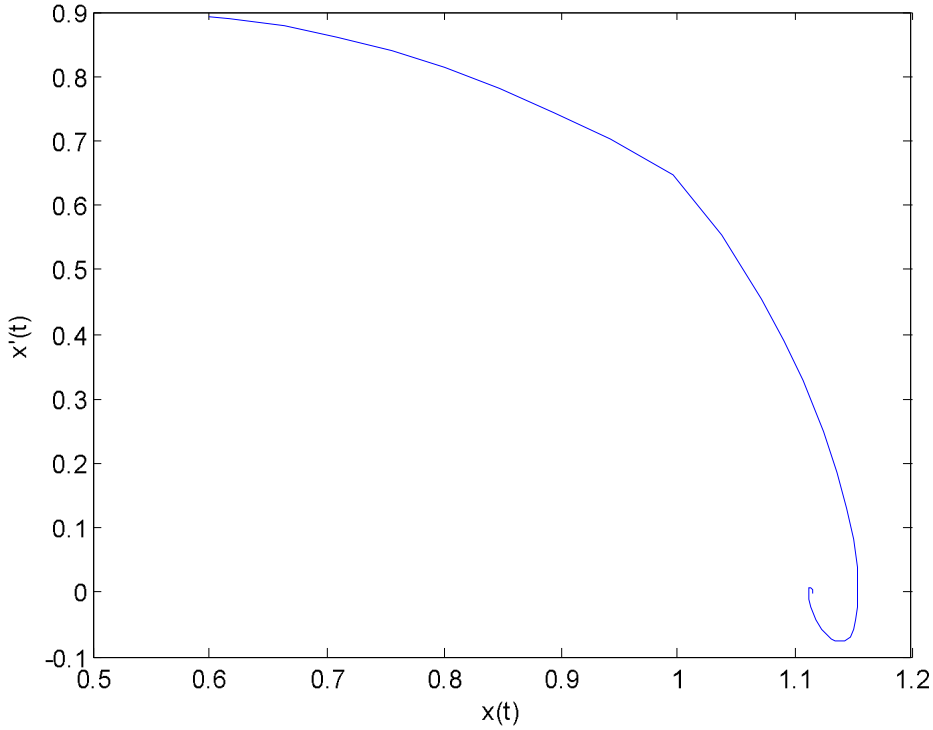
$$r < \frac{(3\alpha+\beta)\gamma}{\beta-\alpha} \tag{4.2.40}$$

elde edilir ki bu da hipotezin kendisidir. Bu durumda, (4.2.10) karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir diyebiliriz ve Teorem 4.1.2 dikkate alınırsa her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası asimptotik kararlıdır sonucuna ulaşırız.

Örnek 4.2.6. Teorem 4.2.3 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 2.2214414622$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.6(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.6(a) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.6(b) $\tau = 0.5, r = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = 1$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.4. $\gamma < 0$ ve $r > 0$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için

$$0 < x(t) < \sqrt{2r+1}x(t) < x(t-\tau) \tag{4.2.41}$$

eşitsizlikleri mevcut olsun. Bu taktirde (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = 0$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.2.41) sağlanacak şekilde x'in bir sürekli fonksiyon olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\big(x(t), x(t+\theta)\big) = x^2(t) + \int_{-\tau}^{0} x^2(t+\theta)d\theta \tag{4.2.42}$$

olacak şekilde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayalım. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + \{x(t)^2 - x(t-\tau)^2\} \tag{4.2.43}$$

dır. Diğer taraftan $\gamma < 0$ ve $r > 0$ hipotezleri dikkate alınarak (4.2.1)'i (4.2.43)'te değerlendirirsek

$$\frac{dV}{dt} = 2x(t)\{rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)\} + \{x(t)^2 - x(t-\tau)^2\}$$

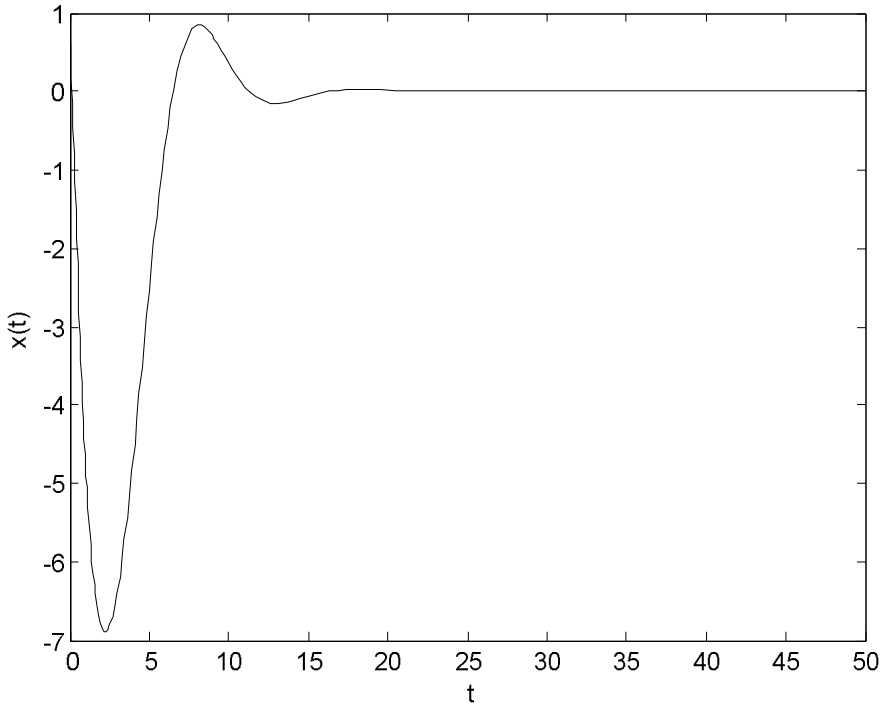
$$= (2r+1)x(t)^2 - 2\alpha r x(t)^3 - x(t-\tau)^2 - 2\beta r x(t)^2 x(t-\tau) + 2\gamma x(t)x(t-\tau)$$

$$< (2r+1)x(t)^2 - x(t-\tau)^2$$

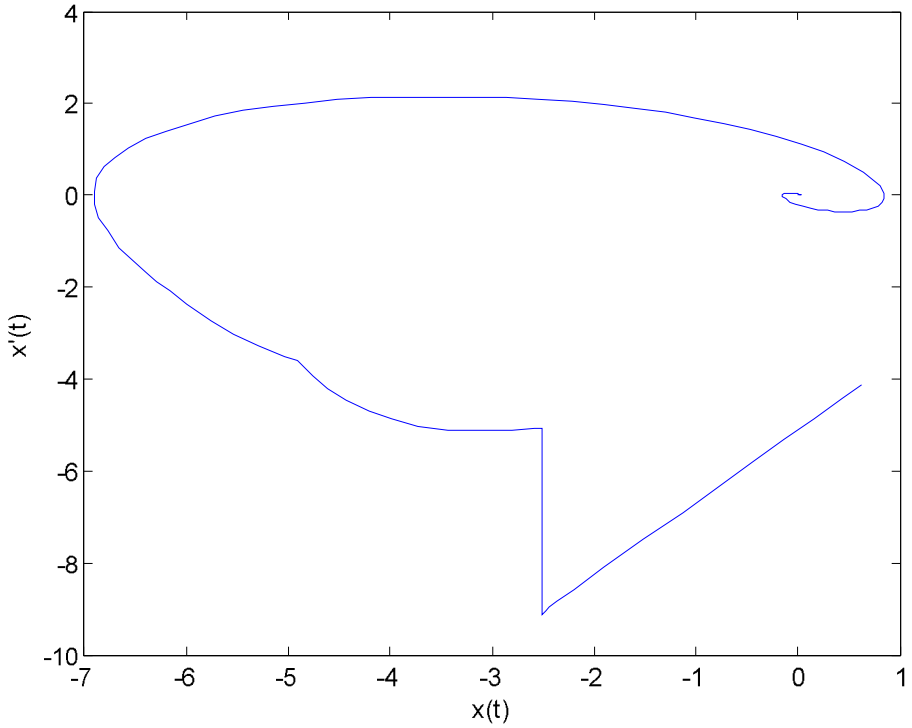
$$= \left(\sqrt{2r+1}x(t) - x(t-\tau)\right)\left(\sqrt{2r+1}x(t) + x(t-\tau)\right).$$

yazılabilir. Burada , $0 < x(t) < \sqrt{2r+1}x(t) < x(t-\tau)$ olması durumunda $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.2.1)}$ negatiftir. Bu ise Lyapunov fonksiyonu tanımı dikkate alındığında (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının global asimptotik kararlı olması anlamına gelir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.7. Teorem 4.2.4 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 1.570796$, $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.0003$, $\gamma = -1.7$ ve t=0 için başlangıç koşulları $x(0) = 0.62$ ve $x(-\tau) = 3$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.7(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.7(a) $\tau = 0.5, r = 1.570796, \alpha = 0.005, \beta = 0.0003, \gamma = -1.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 0.62$ ve $x(-\tau) = 3$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.7(b) $\tau = 0.5, r = 1.570796, \alpha = 0.005, \beta = 0.0003, \gamma = -1.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 0.62$ ve $x(-\tau) = 3$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.5. $0 < r < -\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma}{2(2\alpha+\beta)} < -\gamma$ ve $\gamma < -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için

$$(r+1)x(t) < x(t-\tau) \tag{4.2.44}$$

olsun. Bu durumda (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.2.44)'ü sağlayan x fonksiyonun sürekli olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\big(x(t), x(t+\theta)\big) = \{x(t) - \bar{u}_2\}^2 + \int_{-\tau}^{0} \{x(t+\theta) - \bar{u}_2\}^2 d\theta \tag{4.2.45}$$

şeklinde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanmış olsun. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{u}_2\}\frac{dx(t)}{dt} + \{(x(t) - \bar{u}_2)^2 - (x(t-\tau) - \bar{u}_2)^2\} \tag{4.2.46}$$

olup (4.2.1)'den

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{u}_2\}\{rx(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t-\tau)\}$$

$$+\{(x(t) - \bar{u}_2)^2 - (x(t-\tau) - \bar{u}_2)^2\}$$

$$= -2\alpha r x(t)^3 + (2r + 1 + 2\alpha r\bar{u}_2)x(t)^2 - x(t-\tau)^2 - 2\bar{u}_2 r x(t)$$

$$-2\bar{u}_2\big(x(t) - x(t-\tau)\big) - 2\beta r x(t)x(t-\tau)(x(t) - \bar{u}_2) + 2\gamma x(t-\tau)(x(t) - \bar{u}_2)$$

dir. Hipotezden r>0 ve $r + \gamma < 0$ olduğundan

$$\frac{dV}{dt} < (2r + 1 + 2\alpha r\bar{u}_2)x(t)^2 - 2\bar{u}_2\big((r+1)x(t) - x(t-\tau)\big) \tag{4.2.47}$$

bulunur. Ayrıca, $0 < r < -\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma}{2(2\alpha+\beta)}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$(2r + 1 + 2\alpha r\bar{u}_2)x(t)^2 < 0 \tag{4.2.48}$$

dir. Bu durumda (4.2.48)'i dikkate alırsak (4.2.47)

$$\frac{dV}{dt} < -2\bar{u}_2\big((r+1)x(t) - x(t-\tau)\big) \tag{4.2.49}$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan r>0 olduğundan

$$-\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma}{2(2\alpha+\beta)} > 0 \tag{4.2.50}$$

olması gerekir. Bu ise

$$\gamma < -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}$$

hipotezini verir. Şimdi yeniden (4.2.49) eşitsizliğini göz önüne alalım. Buradan

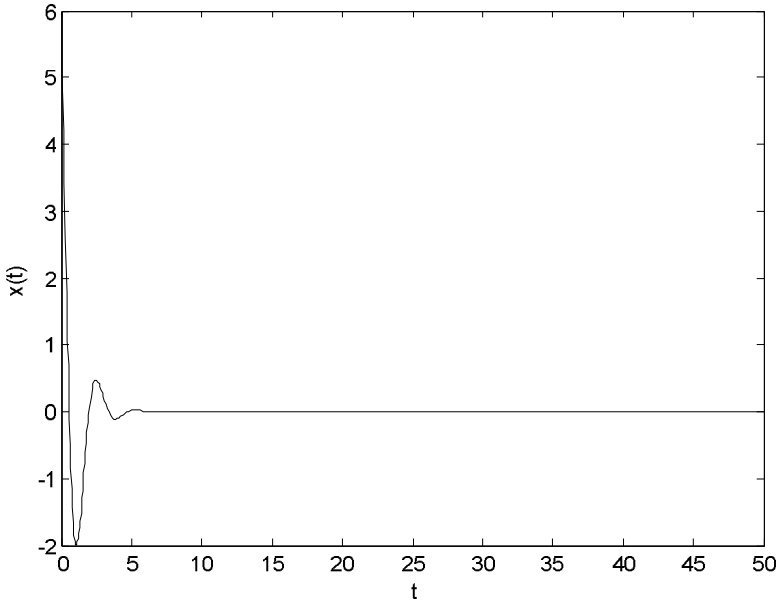
$$(r+1)x(t) - x(t-\tau) < 0 \tag{4.2.51}$$

elde edilir. Bu ise

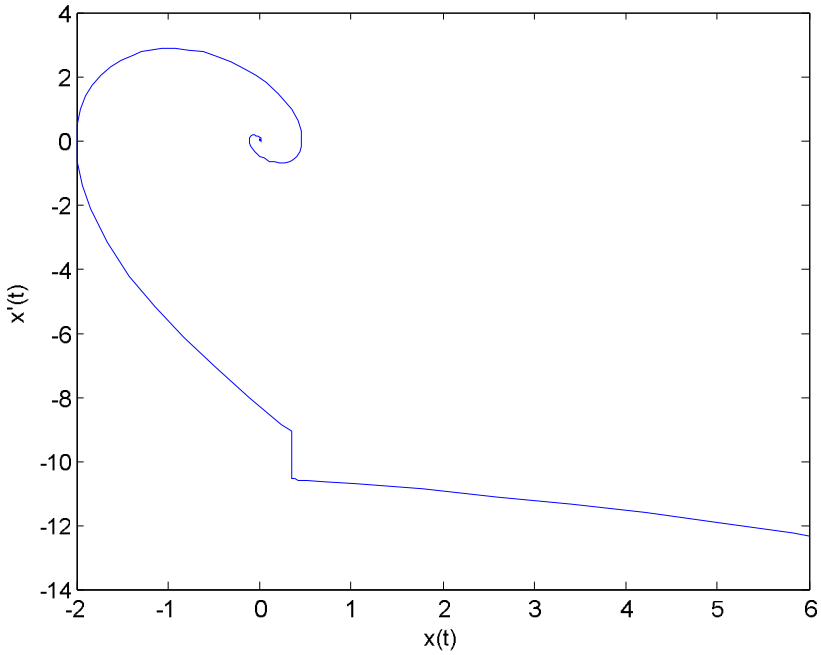
$$(r+1)x(t) < x(t-\tau) \tag{4.2.52}$$

hipotezidir. Bu da $\frac{dV}{dt} < 0$ olması demektir. Bu durumda, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.2.1)}$ negatif olduğundan Lyapunov fonksiyonu tanımı uyarınca (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.8. Teorem 4.2.5 dikkate alındığında $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.8(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.8(a) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.8(b) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5$ ve başlangıç koşuları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

4.2.2. (4.2.1) Diferensiyel Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi

Bu kesimde (4.2.1) lojistik diferensiyel denklemine t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak oluşturulan yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiş, elde edilen teorik sonuçlar geometrik olarak gösterilmiş, (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözümleri ile mukayeseleri yapılmıştır.
Şimdi, $p > 0$ olmak üzere

$$a\big(x(t)\big) = \frac{x(t)}{p+x(t)} \tag{4.2.53}$$

Allee fonksiyonunu tanımlayalım ve $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$, (4.2.1) diferensiyel denkleminin kritik noktası olmak üzere

$$r^* = \frac{r}{a(\bar{u}_2)} \tag{4.2.54}$$

ve

$$\rho^* = \frac{1}{a(\bar{u}_2)} \tag{4.2.55}$$

olsun. t zamanı için (4.2.1) diferensiyel denklemine (4.2.53)-(4.2.55)'un uygulanmasıyla

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\big(x(t)\big)\{r^*x(t)\{1-\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)\}+\gamma\rho^*x(t-\tau)\} \tag{4.2.56}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Burada r^* yeni popülasyon oranıdır. Şimdi bu denklemin çözümlerini inceleyelim (4.2.56) diferensiyel denklemine $v(t) = x(\tau t)$ dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\frac{dv(t)}{dt} = a\big(v(t)\big)\tau\{r^*v(t)\{1-\alpha v(t)-\beta v(t-1)\}+\gamma\rho^*v(t-1)\} \tag{4.2.57}$$

bulunur. Bu denklemin sıfır olmayan denge noktası

$$\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)} \ (r \neq 0) \tag{4.2.58}$$

dir. Şimdi

$$y(t) = v(t) - \bar{v} \tag{4.2.59}$$

dönüşümünü dikkate alarak (4.2.57)'den

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(y(t)+\bar{v})\tau\{r^*(y(t)+\bar{v})\{1-\alpha(y(t)+\bar{v})-\beta(y(t-1)+\bar{v})\} \\ +\gamma\rho^*(y(t-1)+\bar{v})\}$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda, (4.2.57) diferensiyel denkleminin (4.2.58) ile verilen kritik noktası civarında lineerleştirilmiş şekli

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(y(t)+\bar{v})\{-\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)y(t)-\tau(\beta\bar{v}r^*-\gamma\rho^*)y(t-1)\} \tag{4.2.60}$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi ise

$$(\bar{v}+p)\lambda+\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)+\bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^*-\gamma\rho^*)e^{-\lambda} = 0 \tag{4.2.61}$$

dir.

Teorem 4.2.6. $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$, $r \neq 0$ noktası (4.2.56) diferensiyel denkleminin kritik noktası ve $\gamma\rho^* > -\frac{1}{\tau} - \frac{p}{\bar{v}\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = -\frac{\tau a(\bar{v})}{\alpha+\beta}\big((2\alpha+\beta)\gamma\rho^*+\alpha r^*\big)\tan\chi, \ \ 0 < \chi < \pi \tag{4.2.62}$$

olmak üzere

$$-\gamma\rho^* < r^* < \frac{\alpha\gamma\rho^*}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)\left((2\alpha+\beta)\gamma\rho^* + \alpha r^*\right)^2} \qquad (4.2.63)$$

ise, bu taktirde (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası yerel kararlıdır.

İspat. Lemma 4.1.1 (Hale Lemması) ve (4.2.61) karakteristik denklemi birlikte dikkate alınırsa,

$$a_1 = \frac{\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)}{(\bar{v}+p)} \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{\bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^*-\gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} \qquad (4.2.64)$$

yazılabilir. Buna göre (4.1.10)'dan

$$a_1 = \frac{\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)}{(\bar{v}+p)} > -1 \qquad (4.2.65)$$

olmalıdır. Bu durumda, $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ olmak üzere (4.2.65) eşitsizliğinden

$$r^* > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} - \frac{(2\alpha+\beta)\gamma\rho^*}{\alpha} - \frac{p(\alpha+\beta)}{\alpha\bar{v}\tau} \qquad (4.2.66)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.1.11)'den

$$\frac{\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)}{(\bar{v}+p)} + \frac{\bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^*-\gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} > 0 \qquad (4.2.67)$$

eşitsizliğinden

$$r^* > -\gamma\rho^* \qquad (4.2.68)$$

dir. Son olarak, (4.1.12)'den

$$\frac{\bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^*-\gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} < \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v}+\beta\bar{v}r^*-r^*)}{(\bar{v}+p)}\right)^2} \qquad (4.2.69)$$

yazılabilir olup, burada $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ olduğu dikkate alındığında (4.2.69)'dan

$$r^* < \frac{\alpha\gamma\rho^*}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)\left((2\alpha+\beta)\gamma\rho^* + \alpha r^*\right)^2} \tag{4.2.70}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.2.66) ve (4.2.68)'den

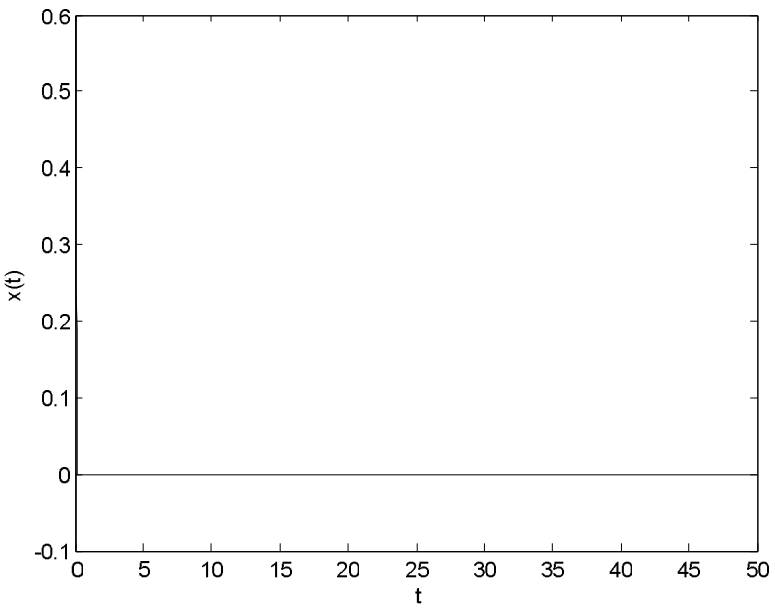
$$-\gamma\rho^* > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} - \frac{(2\alpha+\beta)\gamma\rho^*}{\alpha} - \frac{p(\alpha+\beta)}{\alpha\bar{v}\tau} \tag{4.2.71}$$

eşitsizliğinin mevcut olması gerekir. (4.2.71) dikkate alındığında

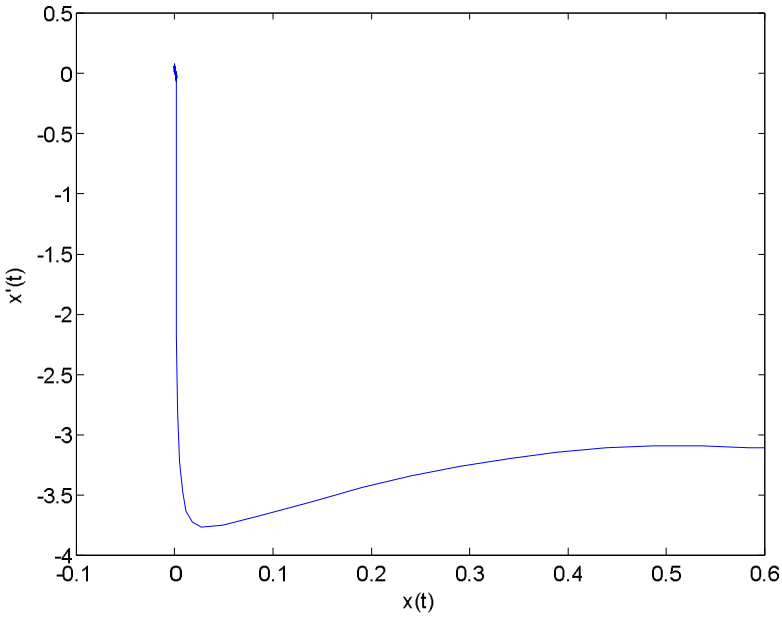
$$\gamma\rho^* > -\frac{1}{\tau} - \frac{p}{\bar{v}\tau} \tag{4.2.72}$$

elde edilir. Bu da teormin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.9. Teorem 4.2.6 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r^* = 6.664323027642$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.9(a) ve (b)'de verilmiştir.

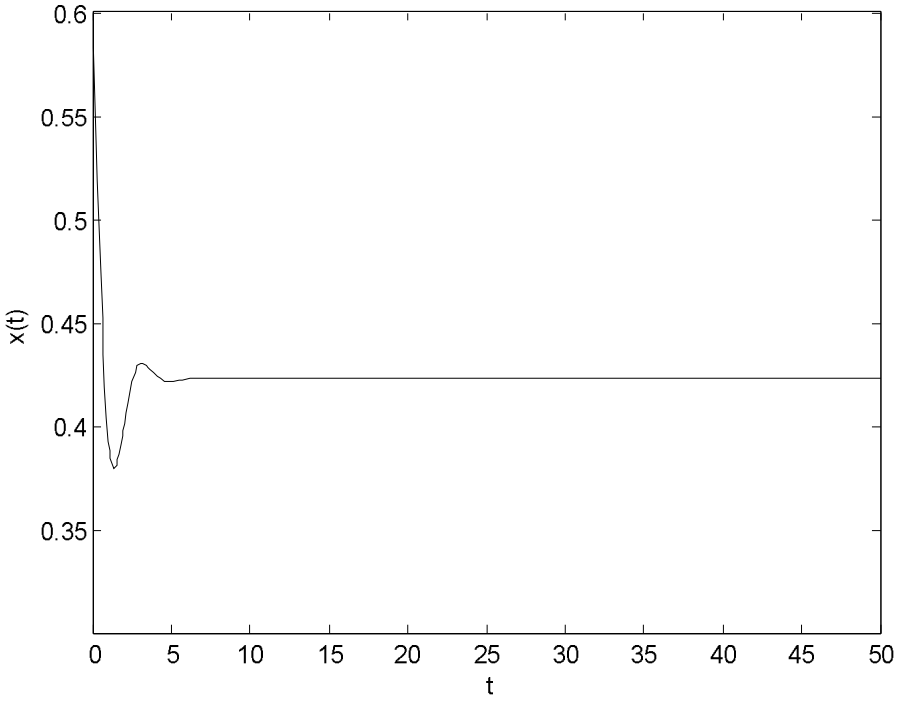


Şekil 4.2.9(a) $\tau = 0.5, r^* = 6.664323027642,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.01 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

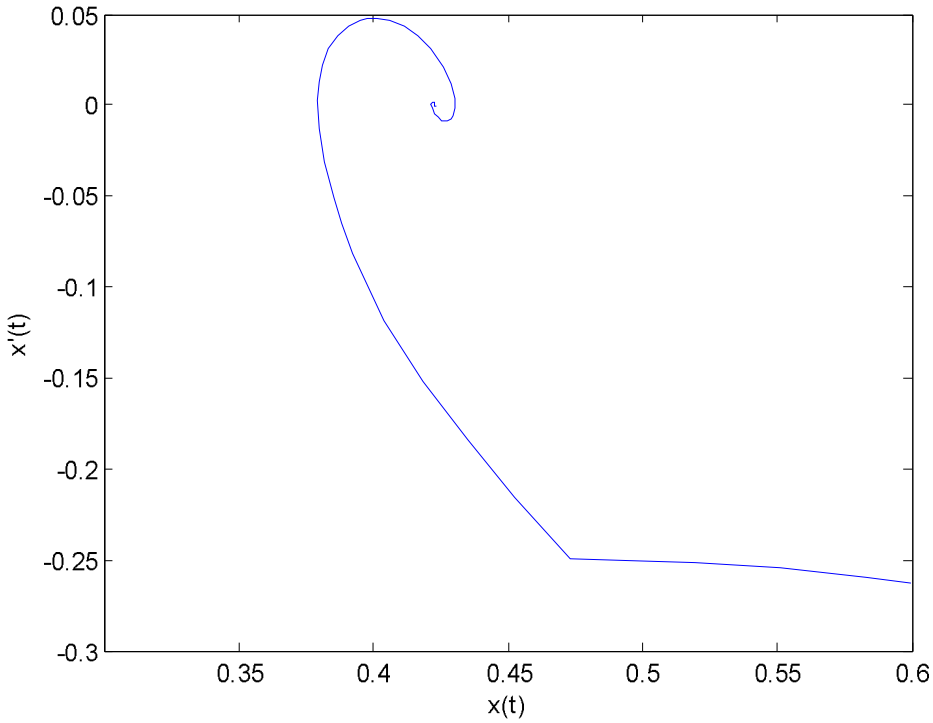


Şekil 4.2.9(b) $\tau = 0.5, r^* = 6.664323027642,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.01 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.10. Örnek 4.2.3'ü r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. Bu durumda $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.10 (a) ve (b)'de verilmiştir.

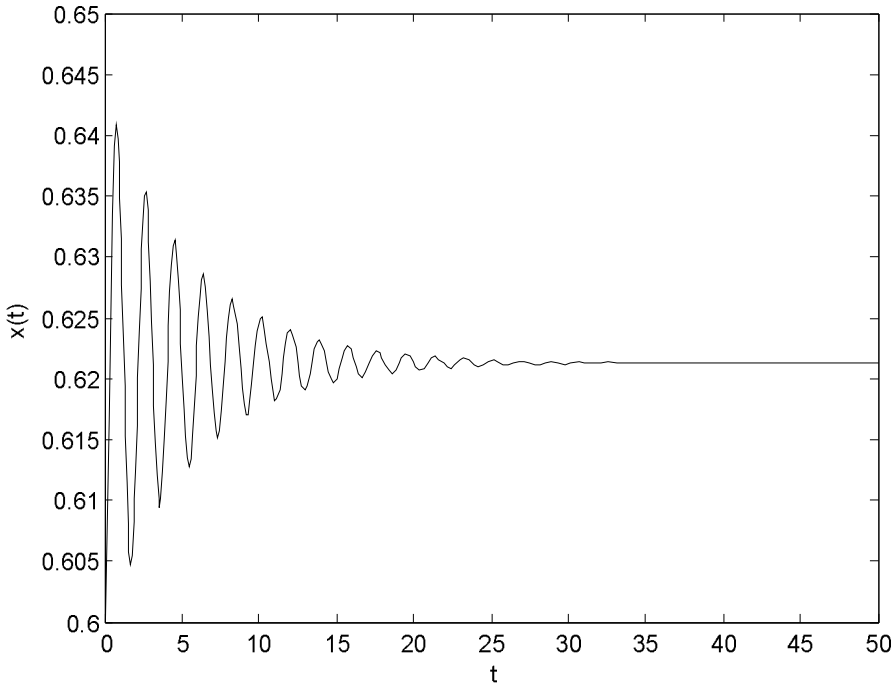


Şekil 4.2.10(a) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

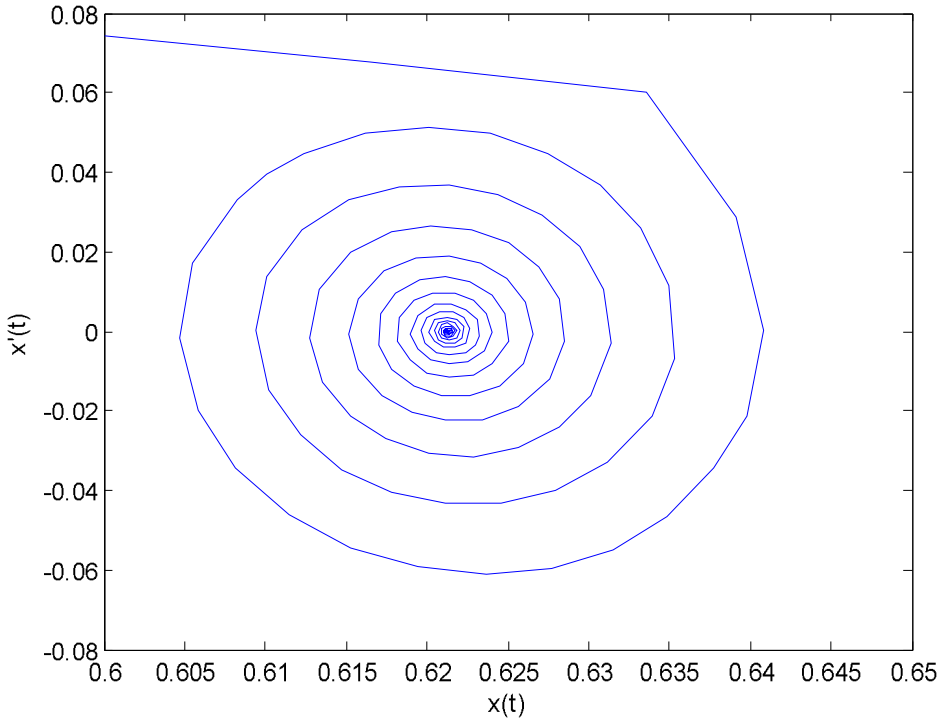


Şekil 4.2.10(b) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.11. Örnek 4.2.4'ü r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5$, $r^* = 5.2$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ değerleri seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının kararlı olduğu ile ilgili grafikler Şekil 4.2.11(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.11(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5.2,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.11(b) $\tau = 0.5, r^* = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.7. $\beta > \alpha$, $r^* \neq 0$ ve $r^* < \frac{\gamma\rho^*(3\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}$olsun. Bu durumda her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.2.61) karakteristik denklemin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda (4.2.61) karakteristik denklemi için

$$(\bar{v} + p)i\omega_0 + \bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v} + \beta\bar{v}r^* - r^*) + \bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^* - \gamma\rho^*)e^{-i\omega_0} = 0 \tag{4.2.73}$$

ve buradan da

$$\begin{cases} \tau\bar{v}\tau(2\alpha r^*\bar{v} + \beta\bar{v}r^* - r^*) + \bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^* - \gamma\rho^*)\cos\omega_0 = 0 \\ (\bar{v} + p)\omega_0 - \bar{v}\tau(\beta\bar{v}r^* - \gamma\rho^*)\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{4.2.74}$$

elde edilir. Buradan

$$\omega_0^2 = \frac{\tau^2\bar{v}^2}{(\bar{v}+p)^2}((\beta\bar{v}r^* - \gamma\rho^*)^2 - (2\alpha r^*\bar{v} + \beta\bar{v}r^* - r^*)^2) \tag{4.2.75}$$

ve

$$\omega_0^2 = \frac{(r^*+\gamma\rho^*)\tau^2\bar{v}^2}{(\bar{v}+p)^2}\left(\frac{(\beta-\alpha)r^* - \gamma\rho^*(3\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}\right) \tag{4.2.76}$$

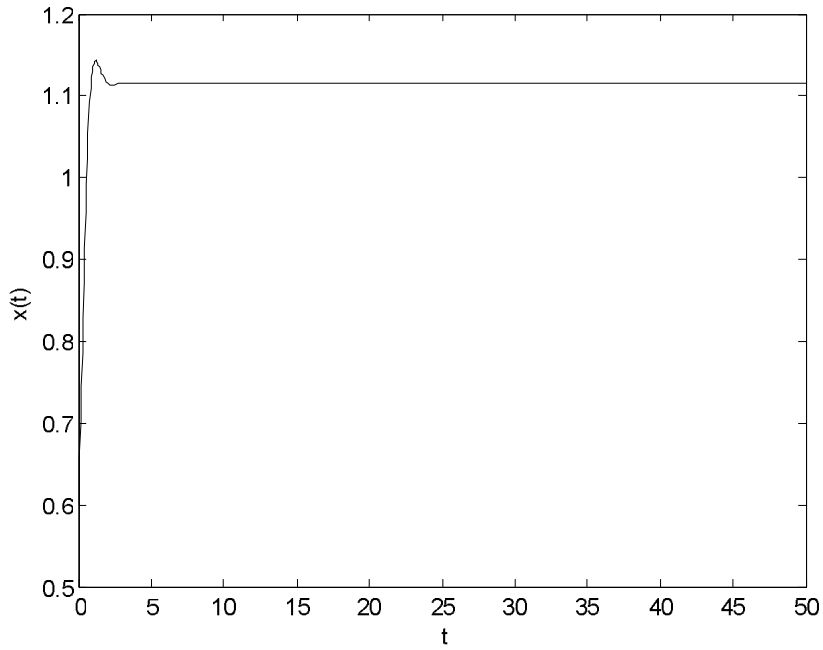
bulunur. (4.2.76) dikkate alındığında, eğer

$$(\beta - \alpha)r^* - \gamma\rho^*(3\alpha + \beta) < 0 \tag{4.2.77}$$

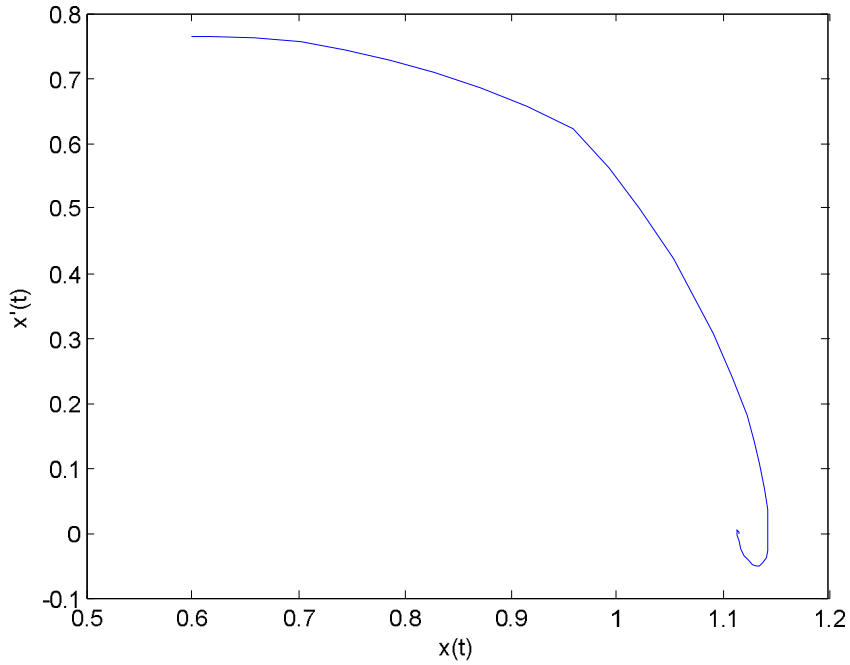
ise, bu taktirde $\omega_0^2 < 0$ dır. Bunun için de $\beta > \alpha$ ve $r^* < \frac{\gamma\rho^*(3\alpha+\beta)}{\beta-\alpha}$ hipotezleri yeter koşullardır. Yani, Buna durumda, (4.2.61) karakteristik denkleminin bütün kökleri

negatif reel kısma sahiptir ve böylece Teorem 4.1.2 dikkate alındığında her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.2.12. Örnek 4.2.6'da r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5$, $r^* = 2.2214414622$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$, $\gamma\rho^* = 1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.12(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.12(a) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = 1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.12(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ için (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.2.8. $0 < r^* < -\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma\rho^* a(x(t))}{2(2\alpha+\beta)a(x(t))} < -\gamma\rho^*$ ve $\gamma\rho^* < -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha a(x(t))}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için

$$0 < \left(r^* a(x(t)) + 1\right)x(t) < x(t-\tau) \tag{4.2.78}$$

olsun. Bu durumda (4.2.1) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.2.78)'i sağlayan x fonksiyonun sürekli olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\left(x(t), x(t+\theta)\right) = \{x(t) - \bar{v}\}^2 + \int_{-\tau}^{0}\{x(t+\theta) - \bar{v}\}^2 d\theta \tag{4.2.79}$$

şeklinde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanmış olsun. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{v}\}\frac{dx(t)}{dt} + \{(x(t) - \bar{v})^2 - (x(t-\tau) - \bar{v})^2\} \qquad (4.2.80)$$

olup (4.2.56)'dan

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{v}\}a\big(x(t)\big)\{r^*x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma\rho^* x(t-\tau)\}$$

$$+\{(x(t) - \bar{v})^2 - (x(t-\tau) - \bar{v})^2\}$$

$$= -2\alpha r^* x(t)^3 a\big(x(t)\big) + \big\{a\big(x(t)\big)(2r^* + 2\alpha r^*\bar{v}) + 1\big\}x(t)^2 - x(t-\tau)^2$$

$$-2\bar{v}r^* a\big(x(t)\big)x(t) - 2\bar{v}\big(x(t) - x(t-\tau)\big) - 2\beta r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)$$

$$\cdot (x(t) - \bar{v}) + 2\gamma\rho^* x(t-\tau)(x(t) - \bar{v})$$

dir. $r^*>0$ ve $r^* + \gamma\rho^* < 0$ olduğundan

$$\frac{dV}{dt} < \big\{a\big(x(t)\big)(2r^* + 2\alpha r^*\bar{v}) + 1\big\}x(t)^2 - 2\bar{v}r^* a\big(x(t)\big)x(t) - 2\bar{v}\big(x(t) - x(t-\tau)\big)$$

$$-2\beta r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big) \cdot (x(t) - \bar{v}) + 2\gamma\rho^* x(t-\tau)(x(t) - \bar{v}) \qquad (4.2.81)$$

bulunur. Ayrıca, $0 < r^* < -\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma\rho^* a(x(t))}{2(2\alpha+\beta)a(x(t))}$ olduğundan

$$a\big(x(t)\big)(2r^* + 2\alpha r^*\bar{v}) + 1 < 0 \qquad (4.2.82)$$

dir. Bu durumda (4.2.81)

$$\frac{dV}{dt} < -2\bar{v}r^* a\big(x(t)\big)x(t) - 2\bar{v}\big(x(t) - x(t-\tau)\big) - 2\beta r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big) \cdot (x(t) - \bar{v})$$

$$+2\gamma\rho^* x(t-\tau)(x(t) - \bar{v}) \qquad (4.2.83)$$

şeklindedir. Diğer taraftan $r^* > 0$ olduğundan

$$-\frac{(\alpha+\beta)+2\alpha\gamma\rho^* a(x(t))}{2(2\alpha+\beta)a(x(t))} > 0 \tag{4.2.84}$$

olması gerekir. $\gamma\rho^*$'ya göre düzenleme yapıldığında

$$\gamma\rho^* < -\frac{\alpha+\beta}{2\alpha a(x(t))}$$

hipotezi elde edilir. (4.2.87) eşitziliğinden

$$x(t) - \bar{v} > 0 \tag{4.2.85}$$

olması halinde

$$-2\beta r^* x(t)x(t-\tau)a(x(t)) \cdot (x(t) - \bar{v}) < 0 \tag{4.2.86}$$

ve

$$2\gamma\rho^* x(t-\tau)(x(t) - \bar{v}) < 0 \tag{4.2.87}$$

dır. Bu durumda

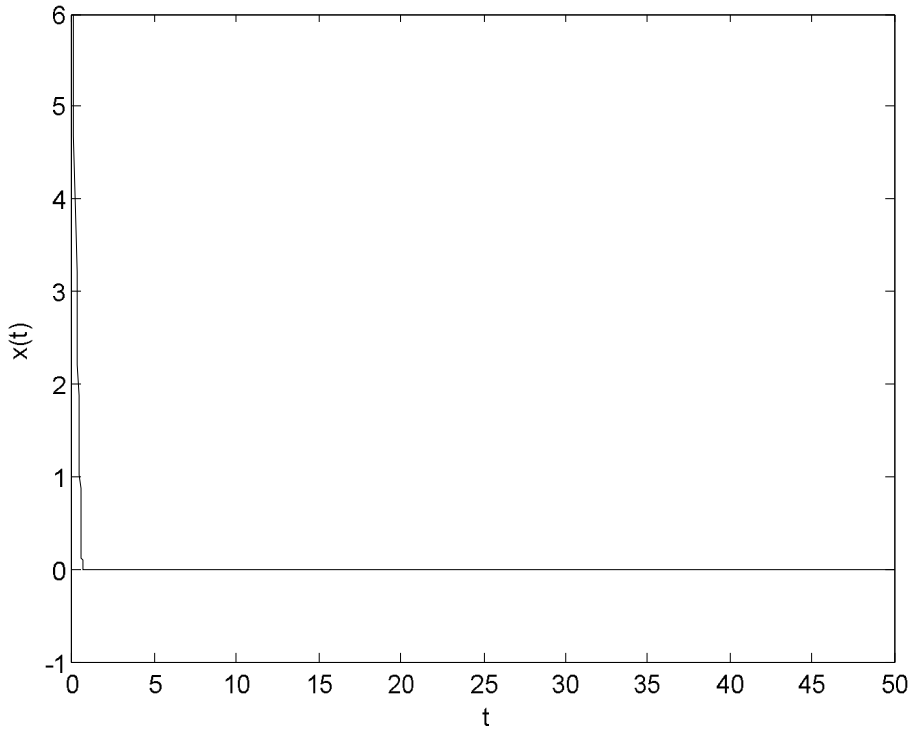
$$\frac{dV}{dt} < 2\bar{v}\left(\left(r^* a(x(t)) + 1\right)x(t) - x(t-\tau)\right) \tag{4.2.88}$$

eşitsizliği mevcut olmalıdır. Son olarak (4.2.88)'den

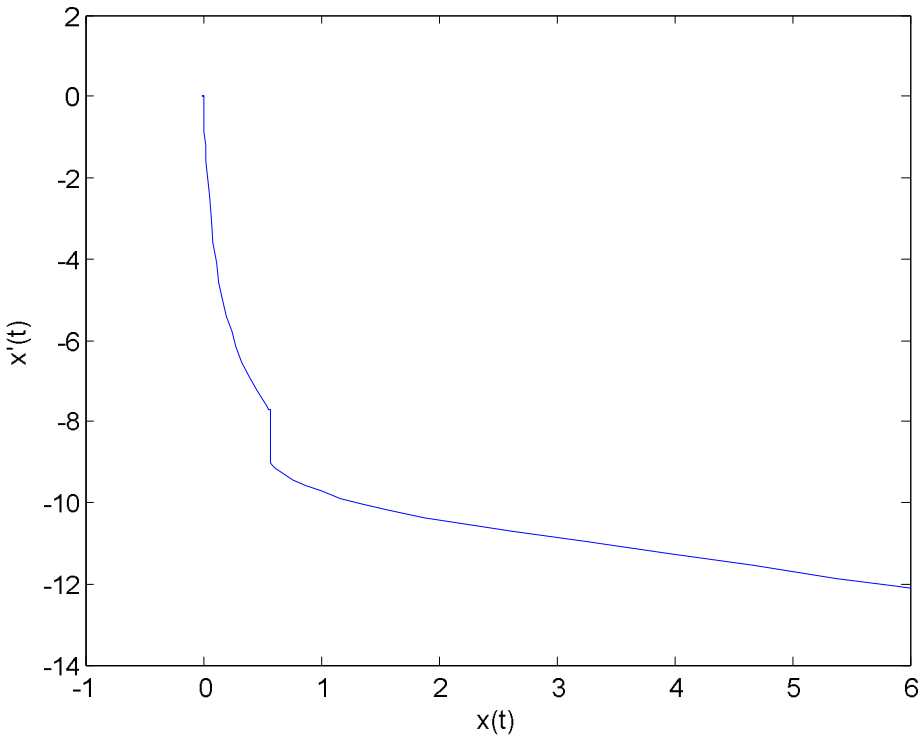
$$0 < \left(r^* a(x(t)) + 1\right)x(t) < x(t-\tau) \tag{4.2.89}$$

olduğundan $\frac{dV}{dt} < 0$ bulunur. Bu durumda, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.2.56)}$ negatif olduğundan Lyapunov fonksiyonun tanımı gereğince (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.13. .Örnek 4.2.8'de r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5,\ r^* = 0.04,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1.5$, p=0.1 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.13(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.13(a) $\tau = 0.5, r^* = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1.5, p = 0.1$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.13(b) $\tau = 0.5,\ r = 0.04,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma = -1.5,\ p = 0.1$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 7$ olmak üzere (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Benzer şekilde t-1 zamanı için

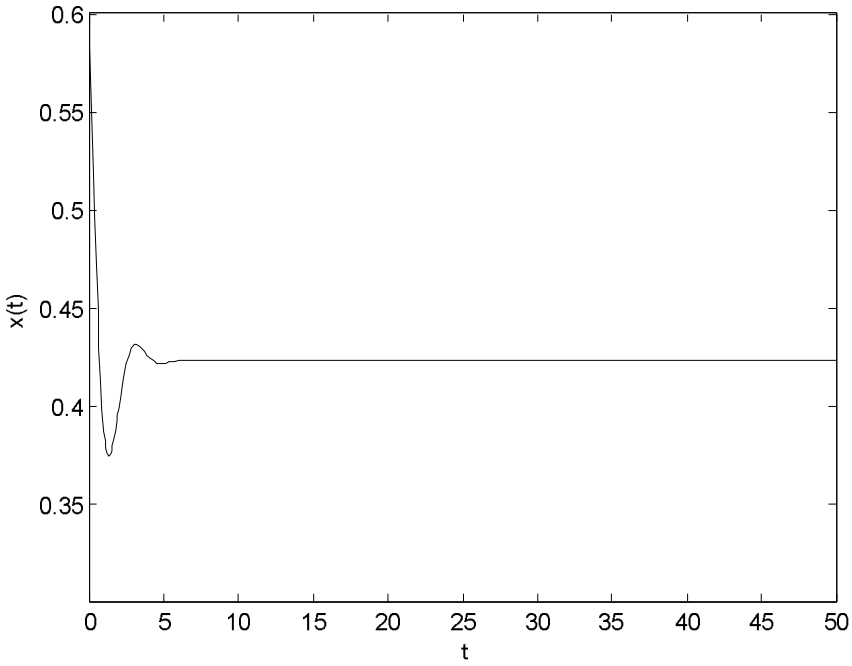
$$a\big(x(t-\tau)\big) = \frac{x(t-\tau)}{\gamma + x(t-\tau)} \tag{4.2.90}$$

Allee fonksiyonunu (4.2.1)'e uygularsak

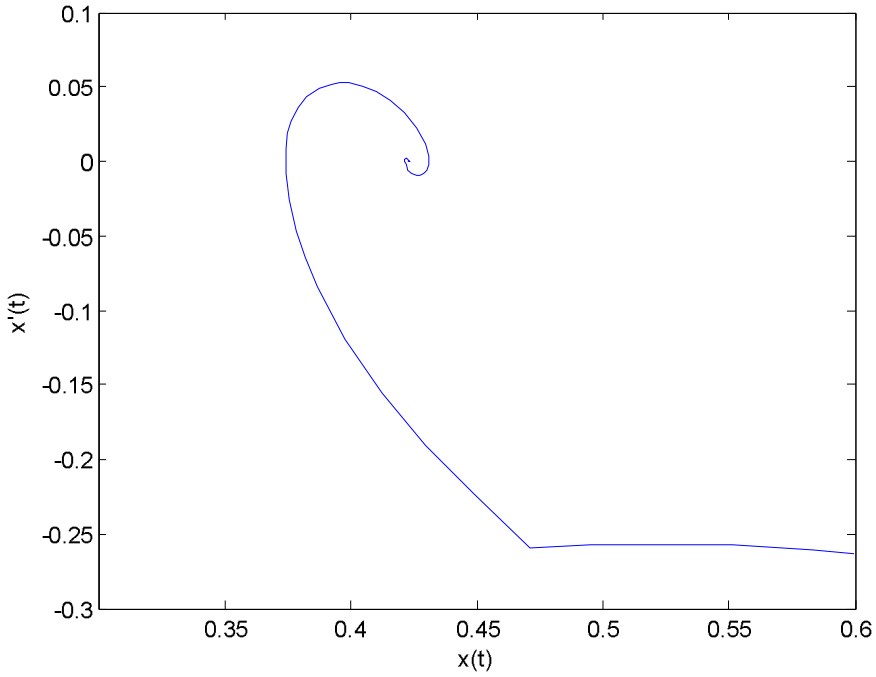
$$\frac{dx(t)}{dt} = a\big(x(t)\big)\{r^{*}x(t)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma\rho^{*}x(t-\tau)\} \tag{4.2.91}$$

lojistik diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin kritik noktası ve bu kritik noktası civarında elde edilen karakteristik denklemi (4.2.56) diferensiyel denklemi ile aynıdır (bakınız (4.2.58) ve (4.2.61)). Böylece, Teorem 4.2.6, Teorem 4.2.7 ve Teorem 4.2.8'deki kararlılık koşulları (3.2.91) diferensiyel denklemi için de geçerli olur.

Örnek 4.2.14. Örnek 4.2.3'de r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.91) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.14(a) ve (b)'de verilmiştir.

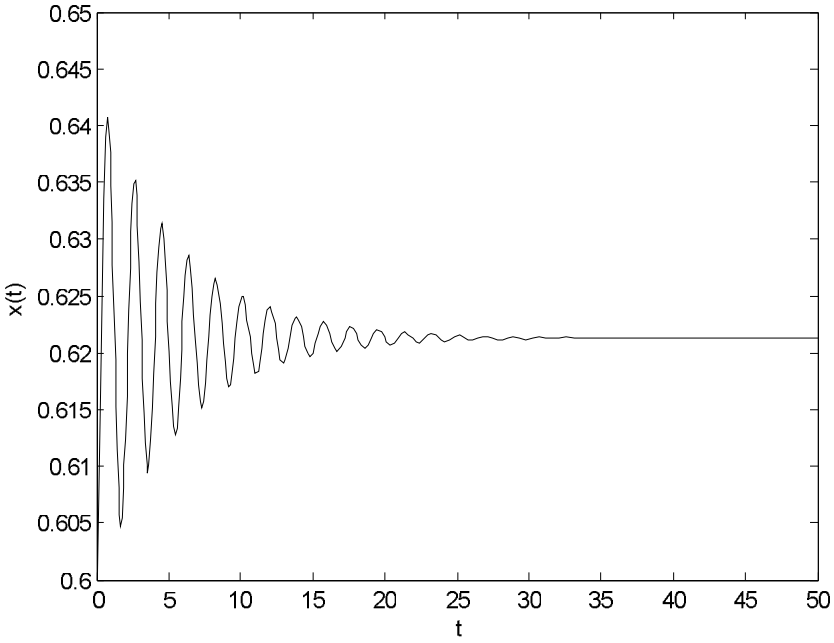


Şekil 4.2.14(a) $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

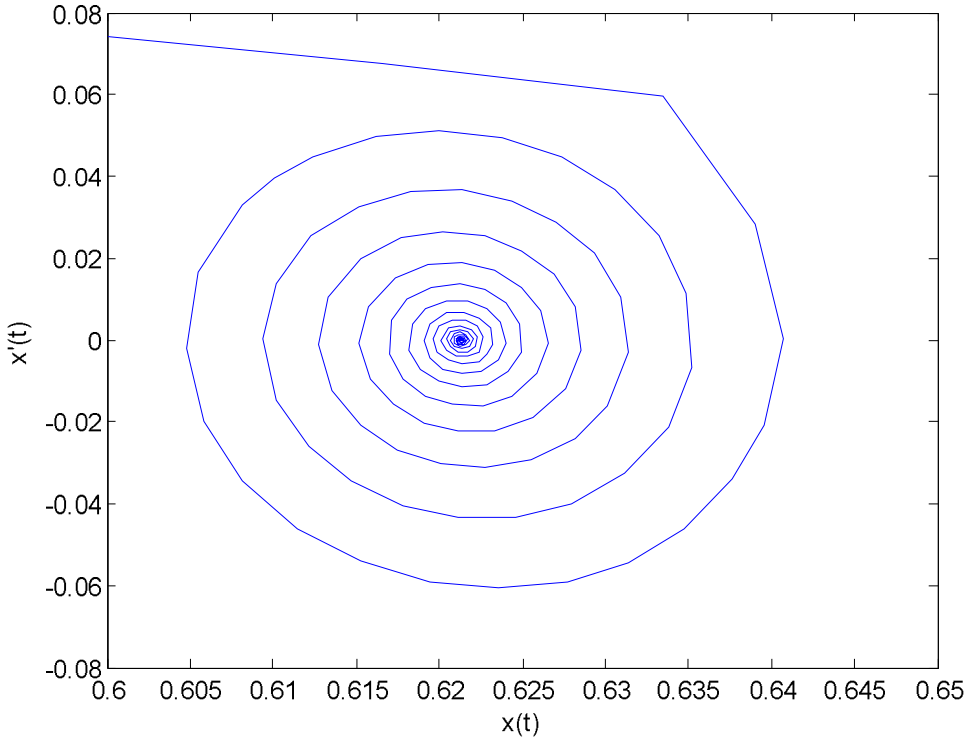


Şekil 4.2.14(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.15. Örnek 4.2.4'de r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5, r^* = 5.2,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ değerleri seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.91) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının karasızlığının zaman göre kararlı olduğu ile ilgili grafikler Şekil 4.2.15(a) ve (b)'de verilmiştir.

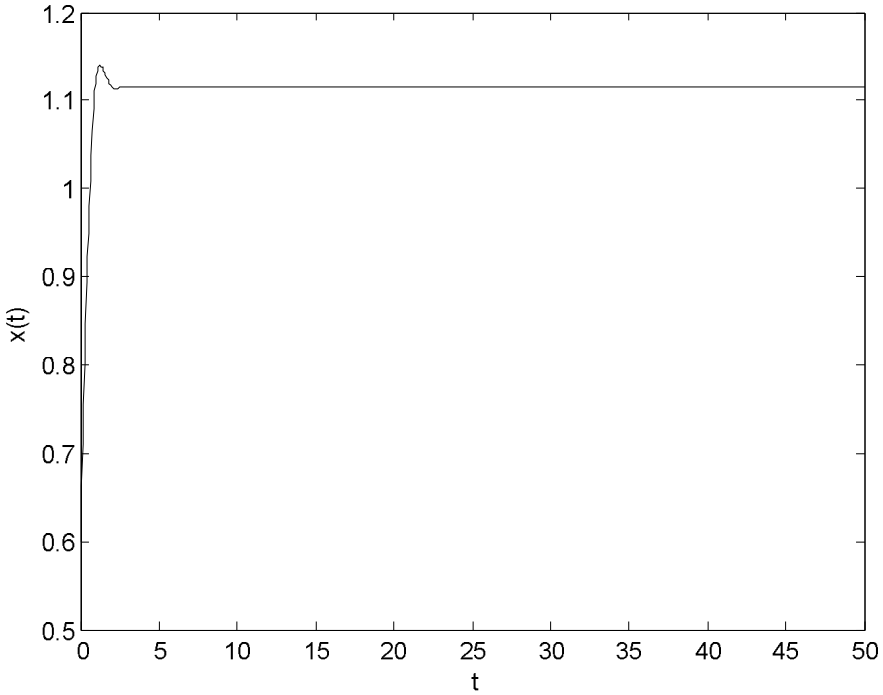


Şekil 4.2.15(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 5.2,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

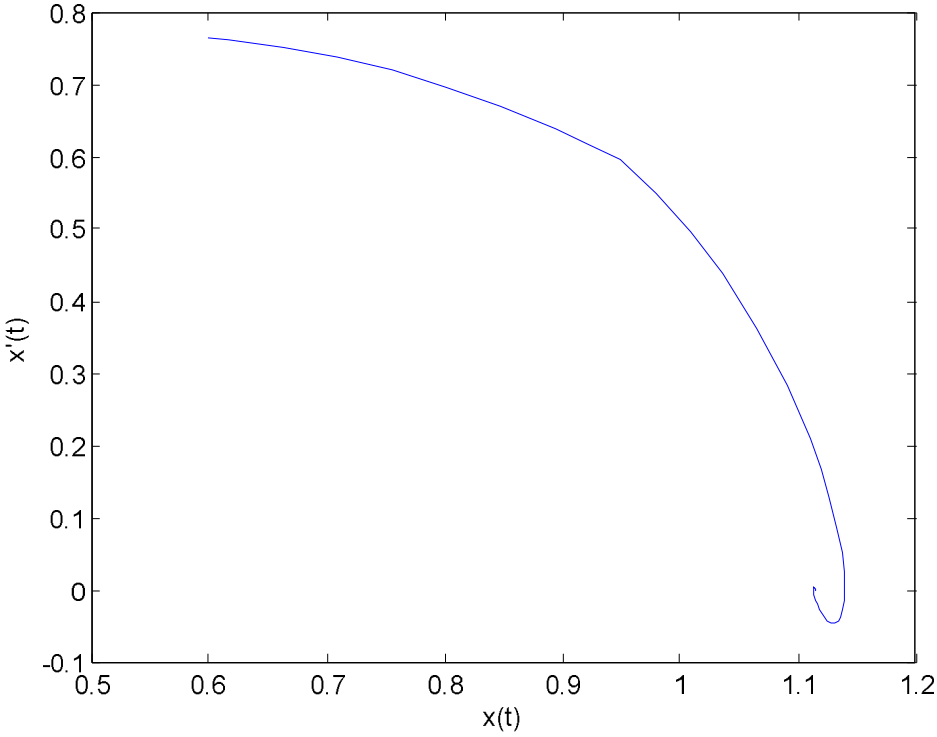


Şekil 4.2.15(b) $\tau = 0.5, r^* = 5.2, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.16. Örnek 4.2.6'da r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5, r^* = 2.2214414622, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1$, p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.91) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.16 (a) ve (b)'de verilmiştir.

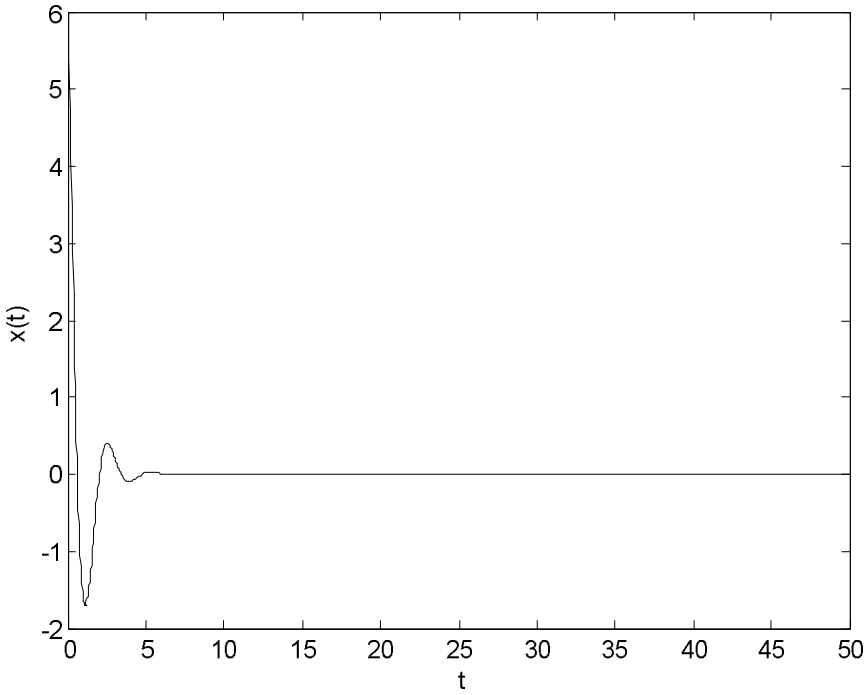


Şekil 4.2.16(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,$ $\gamma\rho^* = 1,$ p=0.1 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

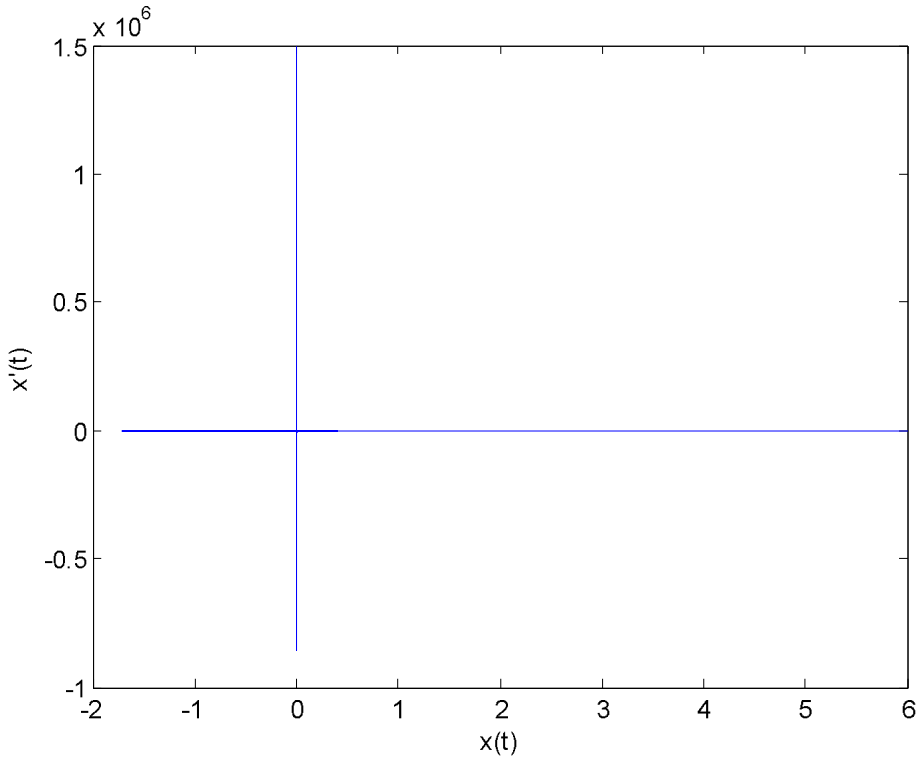


Şekil 4.2.16.(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 2.2214414622,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8, \gamma\rho^* = 1,$ p=0.1ve $x(-\tau) = x(0) = 0.6$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.2.17. Örnek 4.2.8'de r yerine r^* ve γ yerine $\gamma\rho^*$ yazarak yeniden göz önüne alalım. $\tau = 0.5,\ r^* = 0.04,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 0.8,\ \gamma\rho^* = -1.5$, p=0.001 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.2.91) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.17(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.2.17(a) $\tau = 0.5, r^* = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -1.5, p = 0.001$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.17(b) $\tau = 0.5, r = 0.04, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma = -1.5, p = 0.001$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 6.2$ olmak üzere (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

4.2.3. Kesim 4.2 İçin Genel Değerlendirme

Bu kesimde, elde edilen teorik sonuçlar MATLAB programı kullanılarak grafiklerle sunulmuş, oluşturulan diferensiyel denklemlerinin başlangıç koşulları $x(-\tau)$ ve $x(0)$ popülasyon yoğunluğu olarak seçilmiştir. Bu denklemlerin çözümlerine ait teşkil edilen iki boyutlu grafikler, kararlılık analizinde bulunan teorik sonuçları desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

Kesim 4.2.2'de (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin denge noktaları civarındaki yerel ve global davranışları Teorem 4.2.1-4.2.5 ile karakterize edilmiş, elde edilen sonuçlar Örnek 4.2.1-4.2.8'de grafiksel olarak gösterilmiştir.

Kesim 4.2.3'te ise (4.2.1) diferensiyel denklemi ve Allee sabiti $p = 0.1$ olmak üzere farklı t değerleri için Allee fonksiyonları birlikte incelenmiştir. Bu çerçevede, (4.2.56) diferensiyel denkleminin kararlılık analizi Teorem 4.2.6-Teorem4.2.8 ile verilmiştir. Bu teoremlerin ifade ve ispatları Teorem 4.2.1-Teorem 4.2.5 gibi yapılmıştır.

Teorem 4.2.6'ya göre

$\tau = 0.5, r^* = 6.664323027642, \alpha = 0.5, \beta = 0.8, \gamma\rho^* = -6.664323020764$, p=0.1 ve t=0 için $x(t-\tau) = x(t) = 0.6$ değerleri seçildiğinde (Örnek 4.2.9) (4.2.56) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlı olduğu görülmüştür.

Ayrıca, Teorem 4.2.3 dikkate alınarak oluşturulan Örnek 4.2.3' te seçilen aynı değerler (4.2.56) diferensiyel denklemi için dikkate alındığında bu denklemin çözümünün Örnek 4.2.3'e (Şekil 4.2.3) kıyasla daha erken kararlılık gösterdiği tespit edilmiştir. Üstelik, (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözümlerinin $\bar{v}$ kritik noktası civarında oluşan genliğinin (4.2.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin kritik noktası civarındaki genlik ile mukayese edildiğinde daha küçük olduğu görülmüştür (Şekil 4.2.10). Diğer taraftan, Allee fonksiyonun t-1 zamanı için oluşturulan (4.2.91) diferensiyel denkleminde Örnek 4.2.3'teki aynı değerler kullanıldığında çözümlerin kritik noktası civarındaki genliğinin (4.2.56) denkleminden de daha küçük olduğu görülmüştür (Örnek 4.2.14).

Bunlara ilave olarak, (4.2.1) diferensiyel denkleminin kritik noktasını kararsız yapan değerler (Örnek 4.2.4) (4.2.56) diferensiyel denkleminin çözümleri için t=35 değeri civarında kararlılık hali gözlenmiştir (Örnek 4.2.11). Benzer şekilde (4.2.91) diferensiyel denkleminde çözümler t=35 civarında kararlı olmuş, yine $\bar{v}$ kritik noktası civarında oluşan genliğin (4.2.56)'ya göre daha küçük olduğu gözlemlenebilmiştir (Örnek 4.2.15). Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.7 dikkate alındığında (4.2.1), (4.2.56) ve (4.2.91) için Örnek 4.2.6'da seçilen aynı değerler kullanılmış ve her üç denklemin çözümlerinin denge noktasına yaklaşık aynı t zamanında asimptotik olarak yakınsadığı tespit edilmiştir (bakınız sırasıyla Örnek 4.2.6, Örnek 4.2.12 ve Örnek 4.2.16). Bunun dışında gözlemlenebilen tek fark (4.2.91) diferensiyel denkleminin çözümlerinin kritik noktası civarındaki genlik büyüklüğünün (4.2.1) ve (4.2.56)'ya kıyasla daha küçük olmasıdır.

Yine, Örnek 4.2.8'de kullanılan aynı değerler (4.2.56) ve (4.2.91) diferensiyel denklemi için de dikkate alındığında (4.2.56) diferensiyel denkleminde (4.2.1)'e nazaran çok daha küçük t değerleri için global asimptotik kararlılığa geçiş gözlemlenebilirken (Örnek 4.2.13), (4.2.91) diferensiyel denkleminde de benzer bir özelliğe rastlanabilmekte,

ancak kullandığımız MATLAB programının hesaplamalarında oluşan güçlükler nedeniyle Allee sabitinin p=0.01 seviyelerinde seçilmesi durumunda grafik oluşturulabilmiş ve (4.2.1)'e kıyasla daha küçük t değerleri için global asimptotik kararlılığa geçişin olduğu tespit edilmiştir (Örnek 4.2.17).

Sonuç olarak, yukarıda söylediklerimizi özetlersek, Allee etkisi göz önüne alınan fark denklemlerinin çözümlerinin daha fazla kararlılık zamanına sahip olduğu görülmüştür. Buna ilave olarak, t-1 zamanı için tanımlanan Allee fonksiyonunun göz önüne aldığımız denklemlere uygulanmasıyla elde edilen kritik nokta civarındaki genliğin t zamanında tanımlanan Allee fonksiyonun göz önüne aldığımız denklemlere uygulanmasıyla daha küçük olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca global asimptotik kararlılık analizinde t zamanı için oluşturulan Allee fonksiyonun diğerlerine göre daha elverişli sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

4.3. $\frac{dx(t)}{dt} = rx(t-\tau)\{1-\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)\}+\gamma x(t)$ Diferensiyel Denkleminin Kararlılık Analizi

Bu kısımda α, β bilinen pozitif reel sayılar, $r, \gamma \in R-\{0\}$ ve $\tau > 0$ gecikme zamanı olmak üzere

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t-\tau)\{1-\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)\}+\gamma x(t) \qquad (4.3.1)$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. Bunun için S. Ruan ve J. Wei'nin [113] elde ettikleri sonuçlar dikkate alınmış ve ayrıca uygun Lyapunov fonksiyonları oluşturularak (4.3.1) diferensiyel denklemin kararlılık analizi yapılmıştır. Buna ilave olarak (4.3.1) denklemine belirli tipte Allee fonksiyonları uygulanmış ve Allee etkisinin oluşturduğu değişiklikler tespit edilerek elde edilen bulgular geometriksel olarak gösterilmiştir.

Şimdi (4.3.1) diferensiyel denkleminin kararlılık analizini yapalım.

4.3.1. Yerel Ve Global Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.3.1) diferensiyel denkleminin denge noktalarının yerel ve global kararlılığı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar geometrik olarak gösterilmiştir.

Şimdi (4.3.1) diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde t yerine τt yazarsak

$$\frac{dx(\tau t)}{dt} = rx(\tau t - \tau)\{1 - \alpha x(\tau t) - \beta x(\tau t - \tau)\} + \gamma x(\tau t) \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Şimdi $u(t) = x(\tau t)$ dönüşümü yapalım.
Buna durumda,

$$\frac{du(t)}{dt} = \tau \frac{dx(\tau t)}{dt} \tag{4.3.3}$$

olmak üzere (4.3.2)'den

$$\frac{du(t)}{dt} = r\tau u(t-1)\{1 - \alpha u(t) - \beta u(t-1)\} + \gamma \tau u(t) \tag{4.3.4}$$

elde edilir.

$$\bar{u}_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}, \; r \neq 0 \tag{4.3.5}$$

noktaları (4.3.4) diferensiyel denkleminin kritik noktalarıdır.
O halde (4.3.4) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası civarında (4.3.4) diferensiyel denkleminin linnerleştirilmiş şekli

$$\frac{du(t)}{dt} = r\tau u(t-1) + \gamma \tau u(t) \tag{4.3.6}$$

ve buna ait karakteristik denklemi de

$$\lambda - \gamma\tau - r\tau e^{-\lambda} = 0 \tag{4.3.7}$$

dir.

Benzer şekilde, (4.3.4) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası civarında lineerleştirilmiş şeklini bulalım. Bunun için

$$y(t) = u(t) - \bar{u}_2 \tag{4.3.8}$$

dönüşümü yapılarak

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma)y(t) - \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)y(t-1) \tag{4.3.9}$$

denklemi elde edilir. Bu (4.3.4)'ün lineerleştirilmiş şeklidir ve buna ait karakteristik denklem de

$$\lambda + \tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) + \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)e^{-\lambda} = 0 \tag{4.3.10}$$

dır.

(4.3.5) kritik noktalarının kararlılık analizini yapabilmek için (4.3.7) ve (4.3.10) karakteristik denklemlerinin köklerinin ayrıntılı bir incelenmesine ihtiyaç vardır. Bu nedenle anılan denklemlerinin köklerinin özelliklerinin tespitinde Hale Lemma'sına ihtiyaç duyulur. Aşağıdaki Teoremin ifade ve ispatı Hale Lemması [112] dikkate alınarak oluşturulmuştur

Teorem 4.3.1. $\bar{u}_1 = 0$ ve $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ $(r \neq 0)$ noktaları (4.3.1) diferensiyel denkleminin kritik noktaları olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\gamma < \frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = \gamma\tau\tan\chi, \quad 0 < \chi < \pi \tag{4.3.11}$$

olmak üzere

$$-\frac{1}{\tau}\sqrt{\chi^2 + \gamma^2\tau^2} < r < -\gamma \tag{4.3.12}$$

ise, bu taktirde (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası yerel kararlıdır.

ii)$\gamma < \frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = -\frac{\tau}{\alpha+\beta}(\alpha r - \beta\gamma)\tan\chi, \quad 0 < \chi < \pi \tag{4.3.13}$$

olmak üzere

$$-\gamma < r < -\frac{(\alpha+2\beta)\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)(\alpha r - \beta\gamma)^2} \tag{4.3.14}$$

ise, bu taktirde (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası yerel kararlıdır.

İspat.

i) Lemma 4.1.1 (Hale Lemması) ve (4.3.7) karakteristik denklemi birlikte dikkate alınırsa,

$$a_1 = -\gamma\tau \qquad \text{ve} \qquad a_2 = -r\tau \tag{4.3.15}$$

yazılabilir. Lemma 4.1.1 dikkate alınırsa (4.1.10)'dan

$$a_1 = -\gamma\tau > -1 \tag{4.3.16}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan ise $\gamma < \frac{1}{\tau}$ elde edilir ki bu da (i)'deki kabuldür.

Benzer şekilde, (4.1.11)'den

$$a_1 + a_2 = -\gamma\tau - r\tau > 0 \tag{4.3.17}$$

olmalıdır ve $\tau > 0$ olduğundan

$$-(r+\gamma) > 0 \tag{4.3.18}$$

ve buradan da

$$r < -\gamma \tag{4.3.19}$$

bulunur.

Son olarak, (4.1.12)'den (4.3.11) koşulu mevcut olmak üzere

$$-r\tau < \sqrt{\chi^2 + \gamma^2\tau^2} \tag{4.3.20}$$

dir. Bu eşitsizlikten

$$-\frac{1}{\tau}\sqrt{\chi^2 + \gamma^2\tau^2} < r \tag{4.3.21}$$

elde edilir. (4.3.19) ve (4.3.21) birlikte dikkate alındığında (4.3.12) bulunmuş olur.

ii) Lemma 4.1.1 ve (4.3.10) karakteristik denklemi birlikte düşünülürse,

$$a_1 = \tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) \qquad \text{ve} \qquad a_2 = \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r) \tag{4.3.22}$$

yazılabilir. Buna göre (4.1.10)'dan

$$a_1 = \tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) > -1 \tag{4.3.23}$$

olmalıdır. Bu durumda, $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ olmak üzere (4.3.23) eşitsizliği

$$\alpha\frac{r+\gamma}{(\alpha+\beta)} - \gamma > \frac{-1}{\tau} \tag{4.3.24}$$

şeklinde olup

$$r > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \tag{4.3.25}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (4.1.11)'den

$$\tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) + \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r) > 0 \tag{4.3.26}$$

dir ve buradan

$$r > -\gamma \tag{4.3.27}$$

elde edilir.

Son olarak, (4.1.12)'den

$$\tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r) < \sqrt{\chi^2 + \tau^2(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma)^2} \tag{4.3.28}$$

yazılabilir. $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ ve (4.2.13) birlikte dikkate alındığında (4.3.28)'den

$$r < -\frac{(\alpha+2\beta)\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)(\alpha r - \beta\gamma)^2} \tag{4.3.29}$$

elde edilir. (4.2.27) ve (4.2.29) birlikte göz önüne alınırsa (4.3.14) koşulunun sağlanabilir olması için (4.3.25) ve (4.3.27)'den

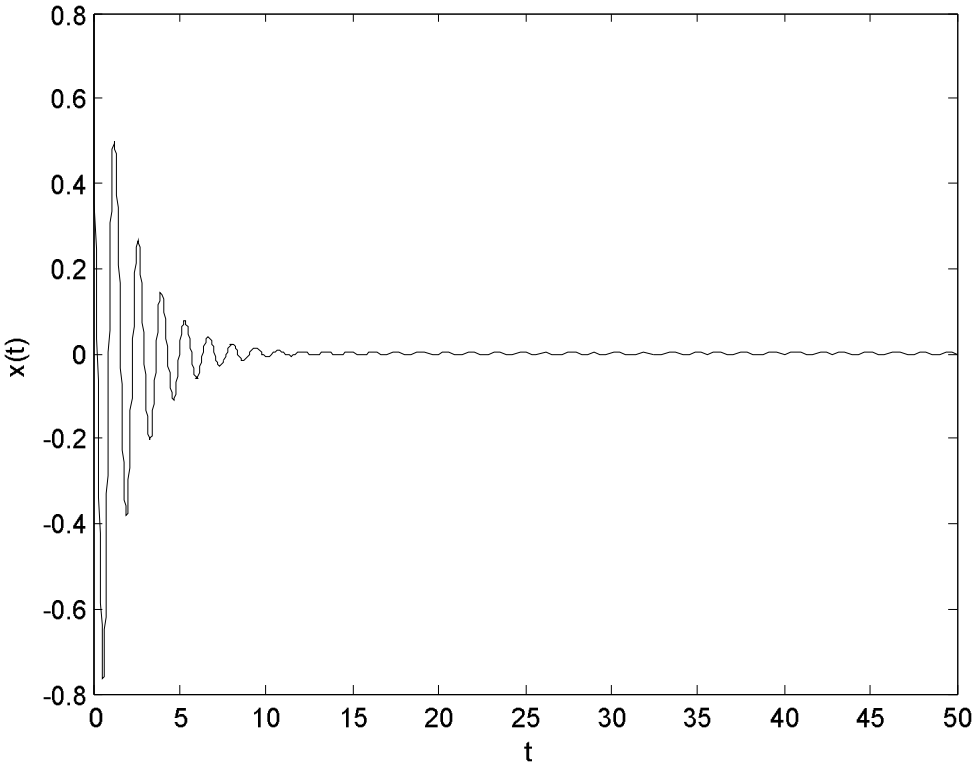
$$-\gamma > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} \tag{4.3.30}$$

eşitsizliğinin mevcut olması gerekir. Bu ise

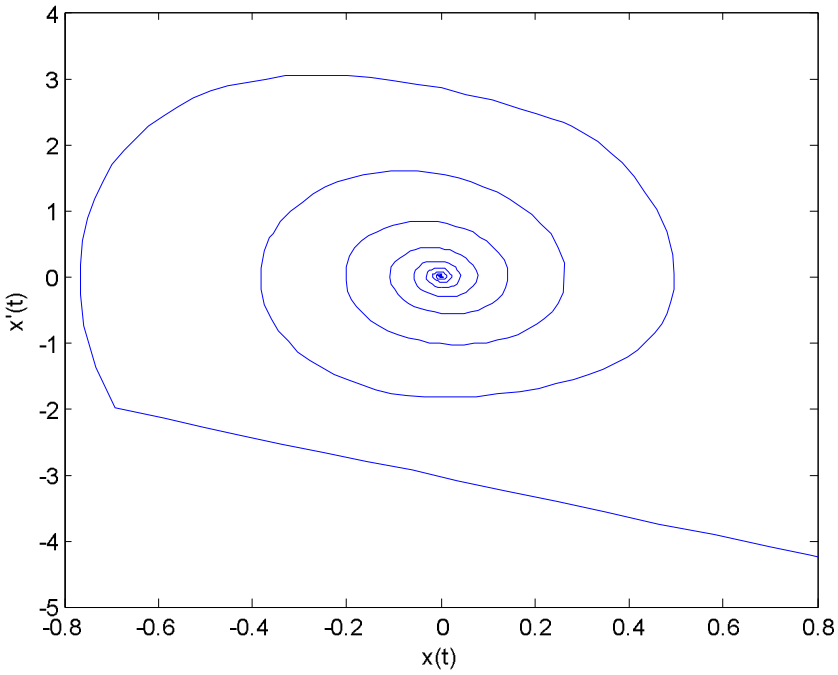
$$\gamma < \frac{1}{\tau} \tag{4.3.31}$$

olması demektir. Bu da teormin ispatını tamamlar.

Örnek 4.3.1. Teorem 4.3.1/(i) dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = -5$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.3$, $\gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.1(a) ve (b)'de verilmiştir.

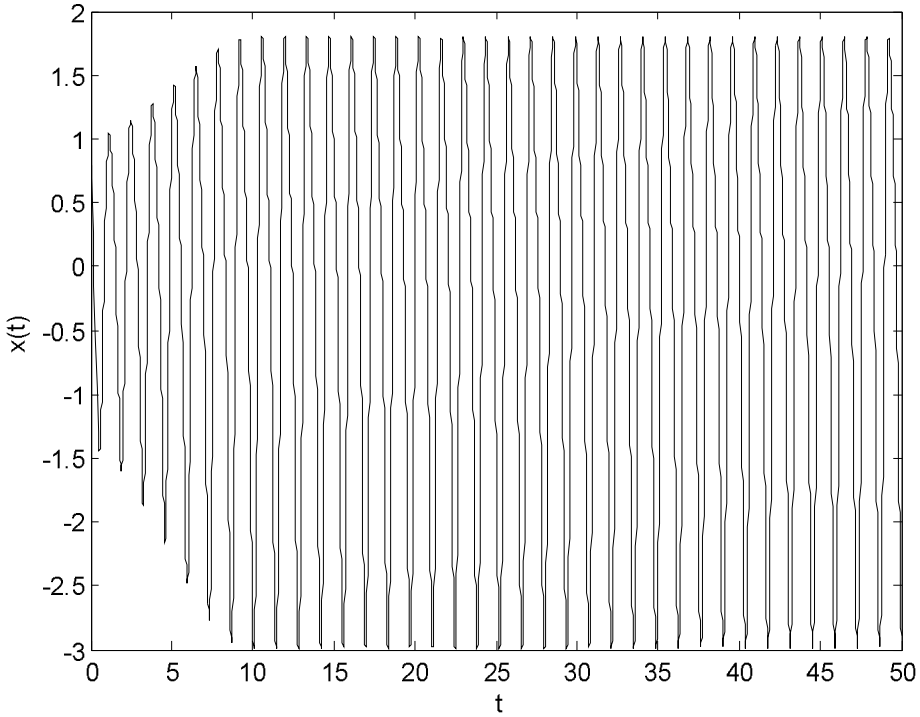


Şekil 4.3.1(a) $\tau = 0.5,\ r = -5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

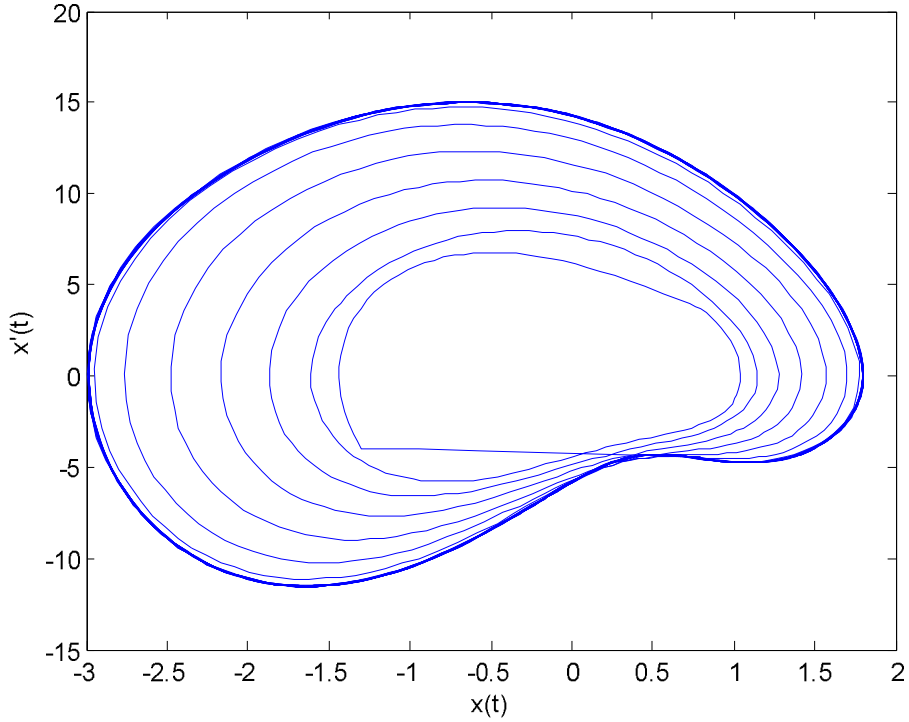


Şekil 4.3.1(b) $\tau = 0.5, r = -5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ için (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.2. Teorem 4.3.1/(i) dikkate alındığında $\tau = 0.5,\ r = -7,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,$ $\gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının kararsız yapısı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.2(a) ve (b)'de verilmiştir.

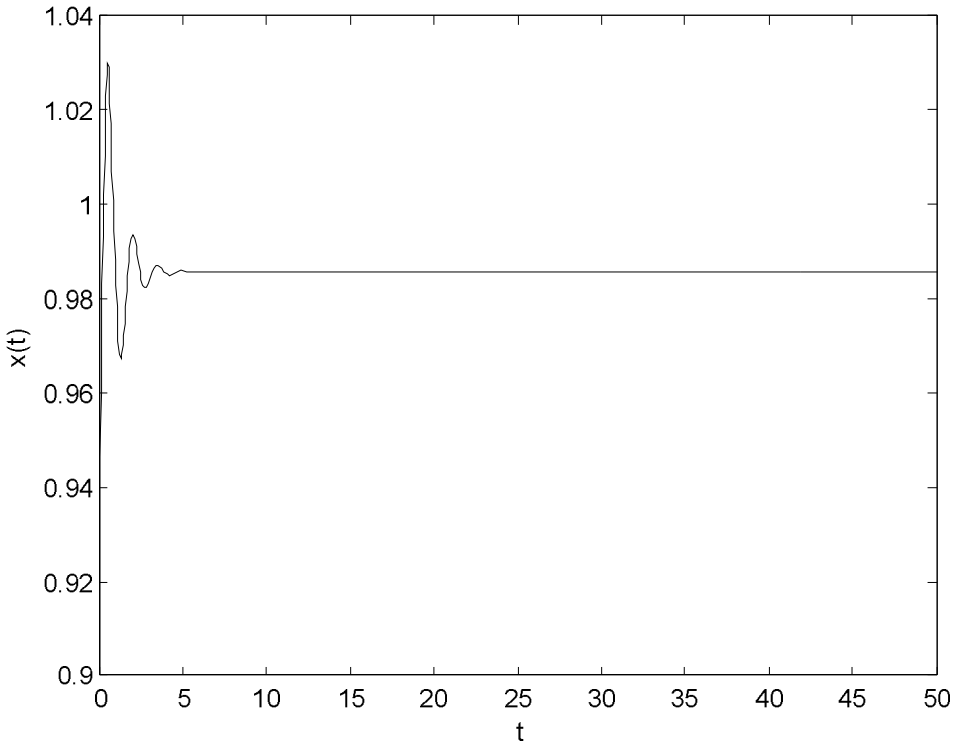


Şekil 4.3.2(a) $\tau = 0.5,\ r = -7,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

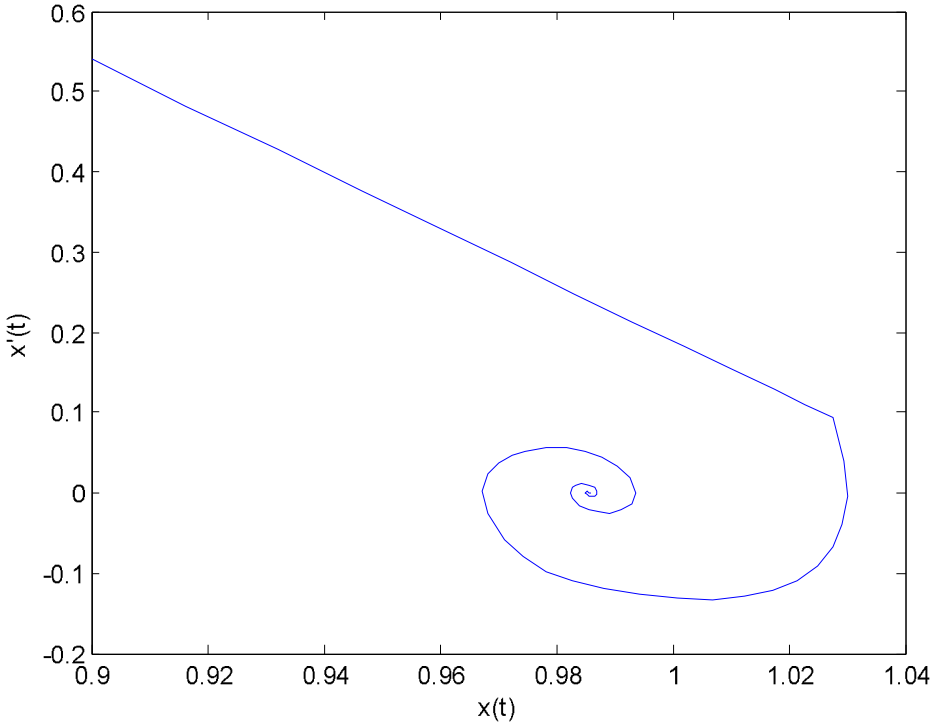


Şekil 4.3.2(b) $\tau = 0.5,\ r = -5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.3. Teorem 4.3.1/(ii) dikkate alındığında $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.3(a) ve (b)'de verilmiştir.

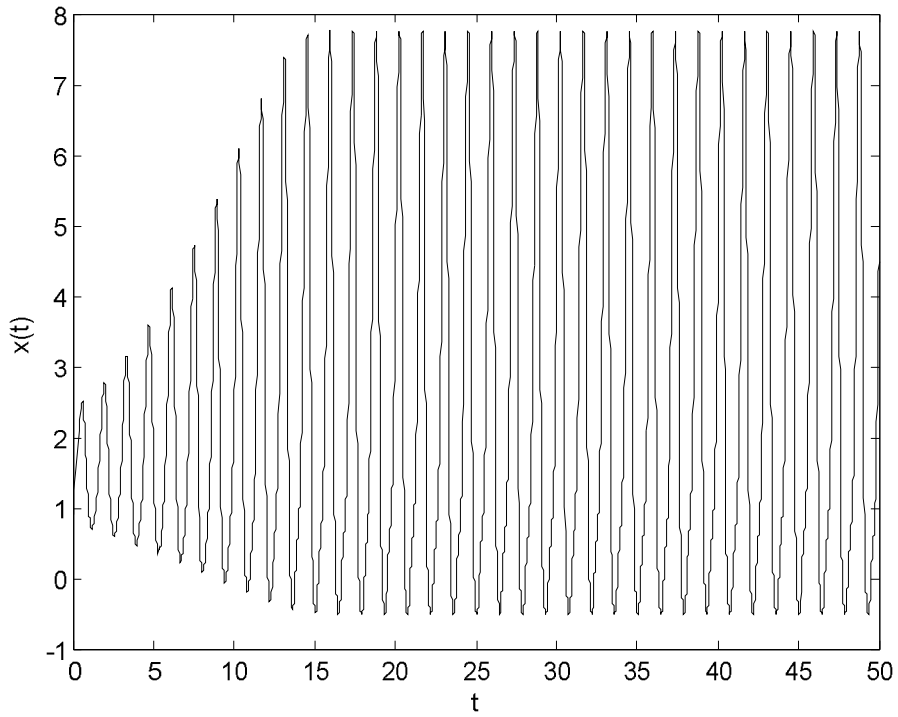


Şekil 4.3.3(a) $\tau = 0.5, r = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = 1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

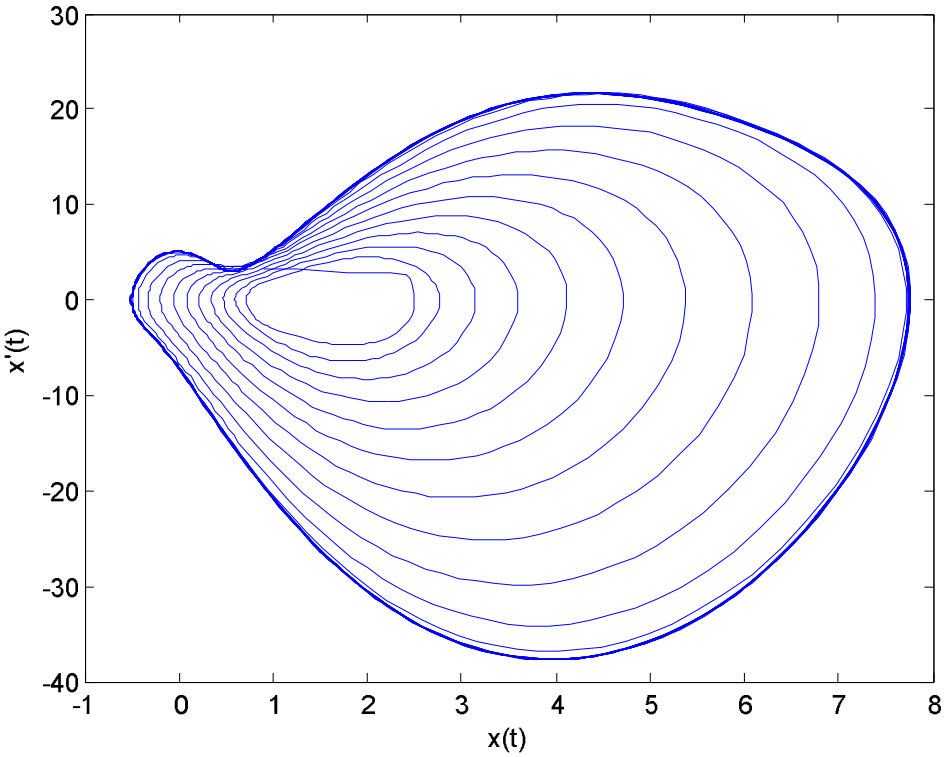


Şekil 4.3.3(b) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.4. Teorem 4.3.1/(ii) dikkate alındığında $\tau = 0.5, r = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = 5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının kararsız yapısı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.4(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.4(a) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.4(b) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 5$ t=0 $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.2. Eğer $r^2 < \gamma^2$ ise, bu taktirde her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.3.7) karakteristik denkleminin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.3.7) karakteristik denklemi için

$$i\omega_0 - \gamma\tau - r\tau e^{-i\omega_0} = 0 \tag{4.3.32}$$

yazılabilir. (4.3.32)'den

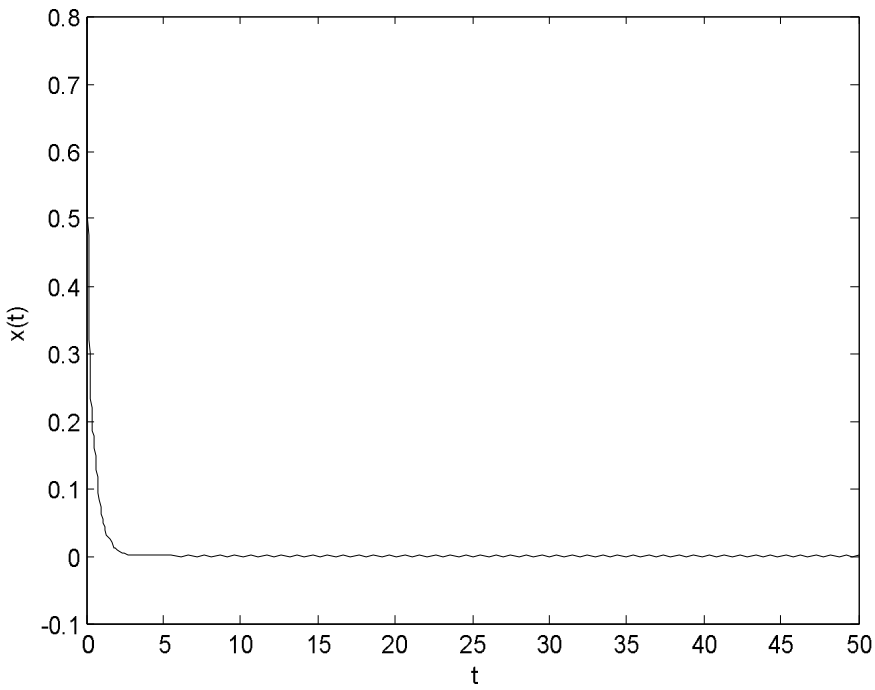
$$\begin{cases} -\gamma\tau - r\tau\cos\omega_0 = 0 \\ \omega_0 - r\tau\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{4.3.33}$$

elde edilir. Buradan

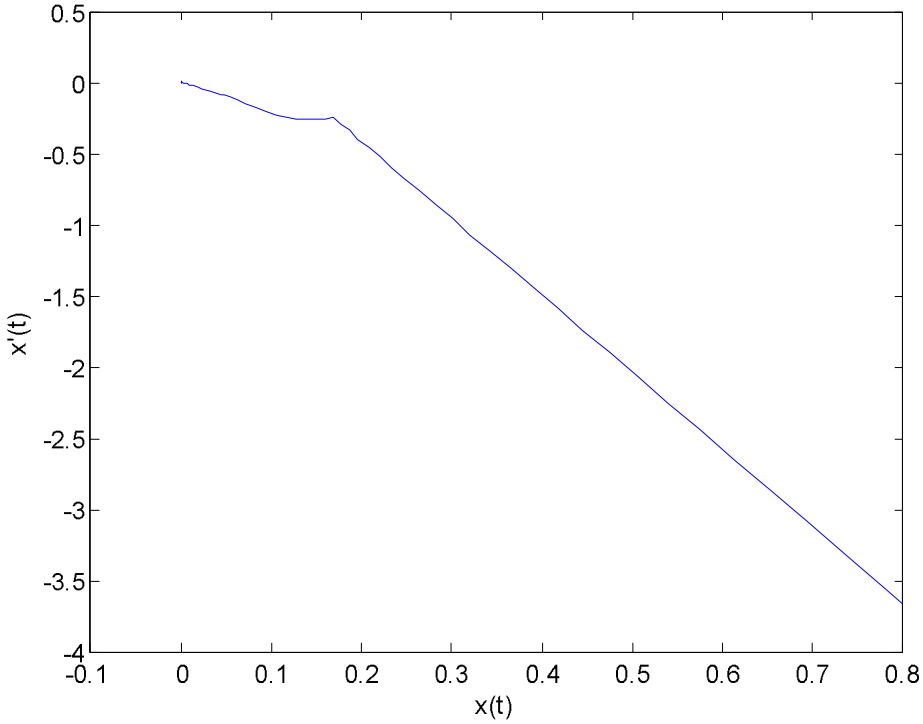
$$\omega_0^2 = \tau^2(r^2 - \gamma^2) \tag{4.3.34}$$

bulunur. $r^2 < \gamma^2$ olduğunda (4.3.7) karakteristik denkleminin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir. Bu durumda Teorem 4.1.2 dikkate alındığında her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.3.5. Teorem 4.3.2 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = -5$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.3$, $\gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.5(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.5(a) $\tau = 0.5$, $r = -5$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.3$, $\gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.2.5(b) $\tau = 0.5, r = -5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3, \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.8$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.3. $\alpha > \beta$, $r \neq 0$ ve $r > \frac{(\alpha+3\beta)\gamma}{\alpha-\beta}$ mevcut olsun. Bu durumda her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.3.10) karakteristik denklemin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.3.10) karakteristik denklemi için

$$i\omega_0 + \tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) + \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)e^{-i\omega_0} = 0 \tag{4.3.35}$$

yazılabilir. (4.3.35)'ten

$$\begin{cases} \tau(\alpha r\bar{u}_2 - \gamma) + \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)\cos\omega_0 = 0 \\ \omega_0 - \tau(2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \tag{4.3.36}$$

elde edilir. Buradan

$$\omega_0^2 = \tau^2((2\beta r\bar{u}_2 + \alpha r\bar{u}_2 - r)^2 - (\alpha r\bar{u}_2 - \gamma)^2) \tag{4.3.37}$$

bulunur. (4.3.37)'nin düzenlenmesiyle

$$\omega_0^2 = \tau^2 \frac{(\gamma+r)}{(\alpha+\beta)}\big(-(r-\gamma)(\alpha+\beta) + 2\beta(r+\gamma)\big) \tag{4.3.38}$$

yazılabilir. Teorem 4.3.1/(ii)'den dolayı

$$\gamma + r > 0$$

dır.

Buna göre, eğer

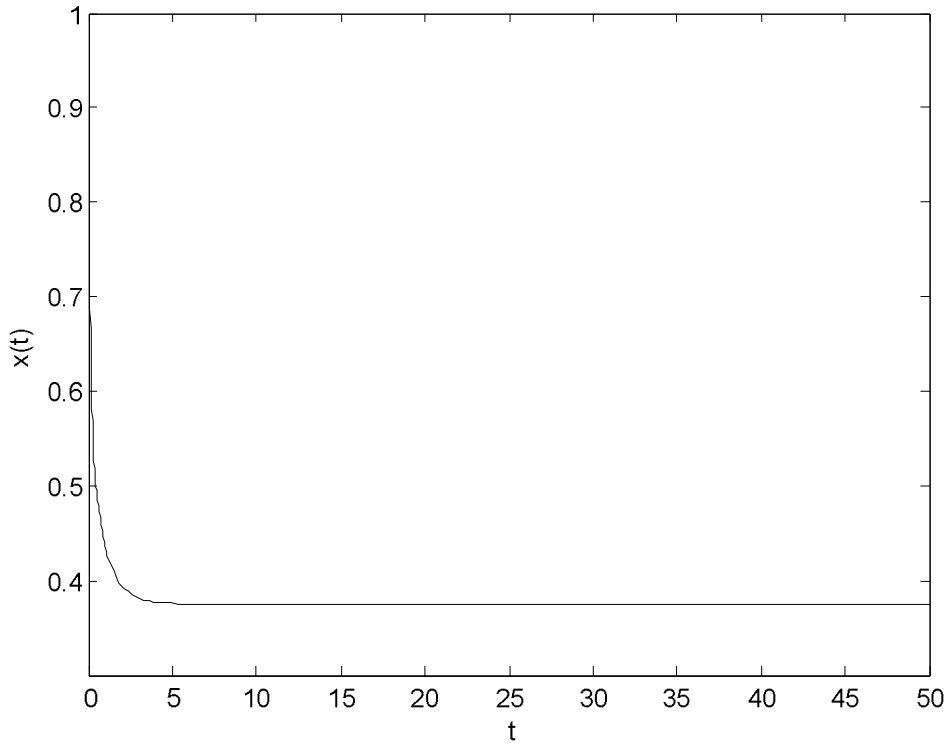
$$-(r-\gamma)(\alpha+\beta) + 2\beta(r+\gamma) < 0 \tag{4.3.39}$$

ise, $\omega_0^2 < 0$ olacaktır.(4.3.39) eşitsizliğinden,$\alpha > \beta$ olmak üzere

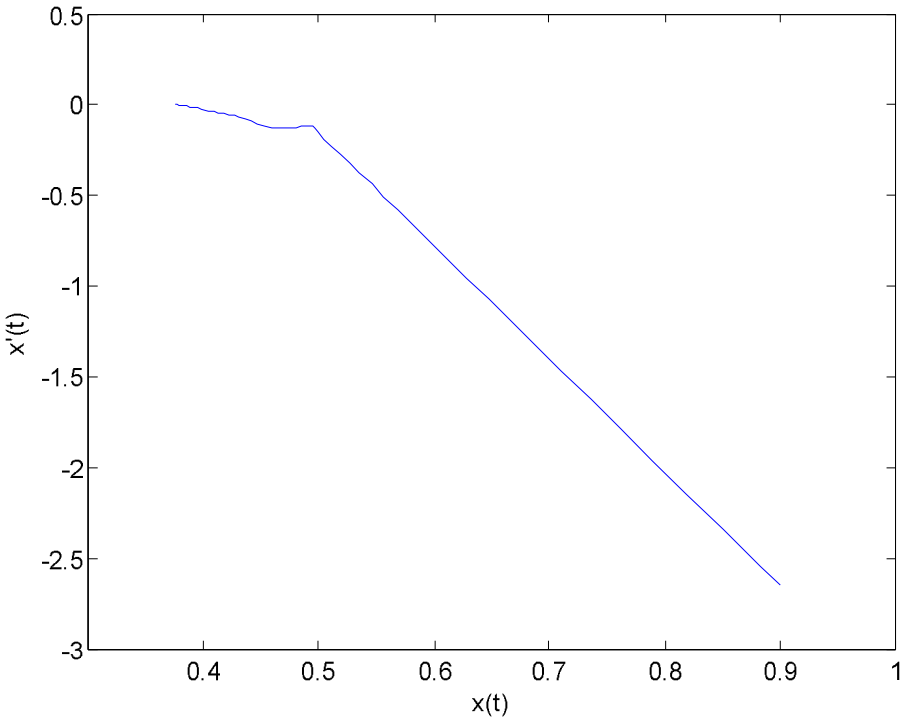
$$r > \frac{(\alpha+3\beta)\gamma}{\alpha-\beta} \tag{4.3.40}$$

elde edilir ki bu da hipotezin kendisidir.Yani, (4.3.10) karakteristik denklemin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir ve böylece Teorem 4.1.2'den her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.3.6. Teorem 4.2.3 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma = -1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.6(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.6(a) $\tau = 0.5, r = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = -1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.6(b) $\tau = 0.5,\ r = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = -1.9$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.4. $\gamma < -\frac{1}{2}$ ve $r > 0$ olduğu kabul edilsin. Üstelik, $\tau > 0$ için

$$\frac{1}{2\alpha} < x(t) \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2\beta} < x(t-\tau) \tag{4.3.41}$$

mevcut olsun. Bu taktirde (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.3.41) eşitsizlikleri sağlanacak şekilde x'in bir sürekli fonksiyon olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\big(x(t), x(t+\theta)\big) = x^2(t) + \int_{-\tau}^{0} x^2(t+\theta)d\theta \tag{4.3.42}$$

olacak şekilde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlayalım. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + \{x(t)^2 - x(t-\tau)^2\} \tag{4.3.43}$$

olup (4.3.1)'den $\gamma < -\frac{1}{2}$ ve $r > 0$ hipotezleri dikkate alınırsa

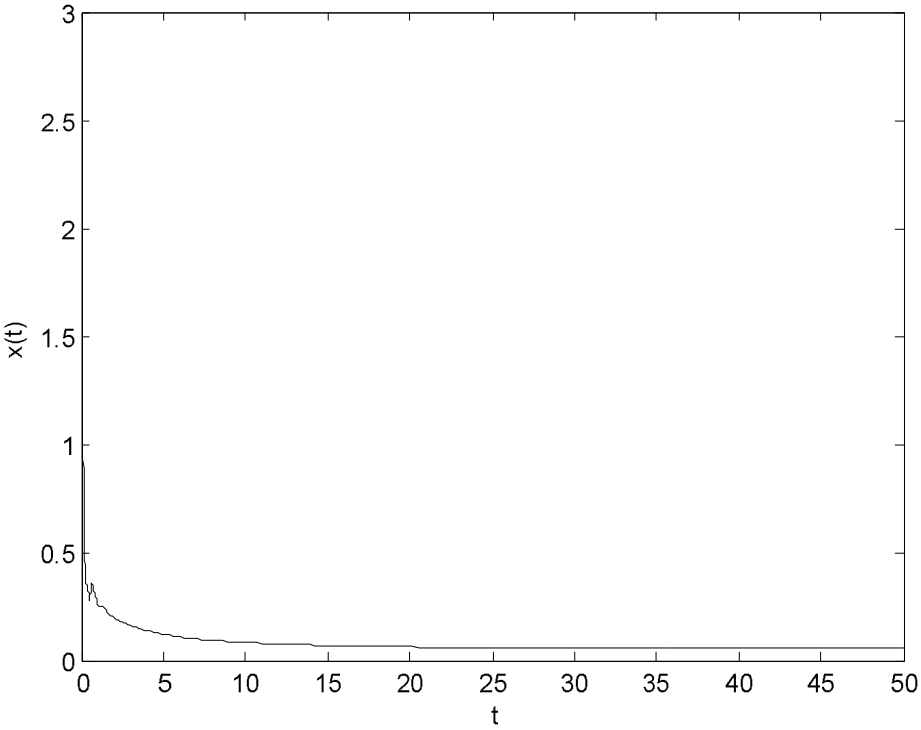
$$\frac{dV}{dt} = 2x(t)\{rx(t-\tau)\{1-\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)\}+\gamma x(t)\}+\{x(t)^2-x(t-\tau)^2\}$$
$$= (2\gamma+1)x(t)^2 - x(t-\tau)^2 + rx(t)x(t-\tau)\big(1-2\alpha x(t)\big)$$
$$+rx(t)x(t-\tau)\,\big(1-2\beta x(t)\big)$$
$$< rx(t)x(t-\tau)\big(1-2\alpha x(t)\big) + rx(t)x(t-\tau)\big(1-2\beta x(t)\big)$$

yazılabilir. Bu durumda,

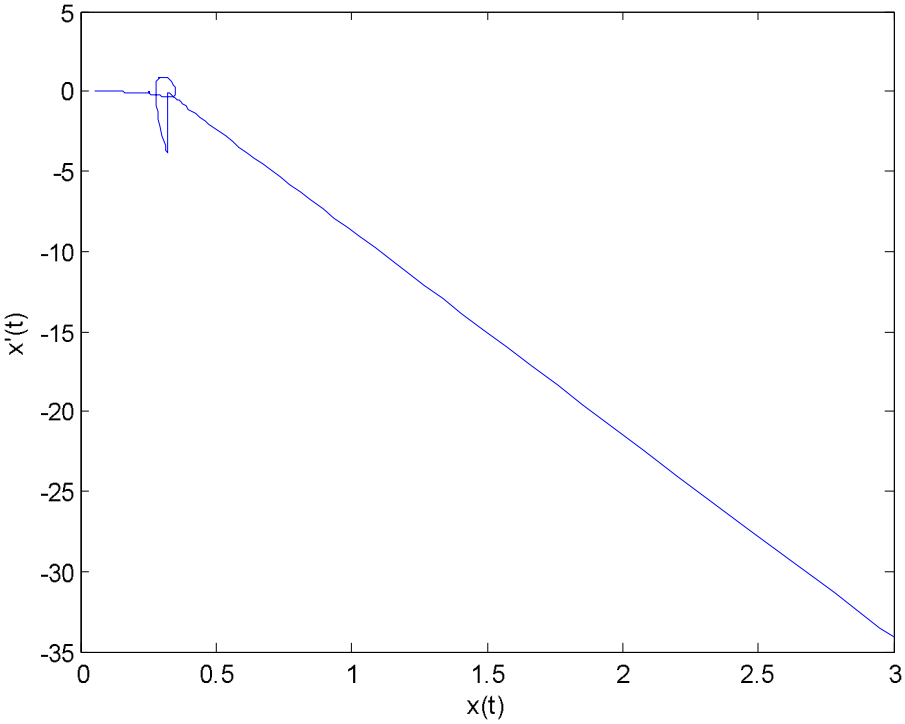
$$\frac{1}{2\alpha} < x(t) \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2\beta} < x(t-\tau) \tag{4.3.44}$$

olması durumunda $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.3.1)}$ negatif olacağından Lyapunov fonksiyonu tanımı dikkate alındığında (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.3.7. Teorem 4.3.4 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 5$, $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.3$, $\gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = 3$ ve $x(0) = 2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.7(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.7(a) $\tau = 0.5,\ r = 5,\ \alpha = 0.8,\ \beta = 0.3,\ \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = 3$ ve $x(0) = 2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.7(b) $\tau = 0.5, r = 5, \alpha = 0.8, \beta = 0.3, \gamma = -4.71238898025$ ve $x(-\tau) = 3$ ve $x(0) = 2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.5. $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$ ve $1 < r < \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2\beta}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için

$$x(t) > \bar{u}_2 \qquad \text{ve} \qquad x(t-\tau) > \frac{1}{\beta} \tag{4.3.45}$$

olsun. Bu durumda (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.3.45)'i sağlayan x fonksiyonun sürekli olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\big(x(t), x(t+\theta)\big) = \{x(t) - \bar{u}_2\}^2 + \int_{-\tau}^{0} \{x(t+\theta) - \bar{u}_2\}^2 d\theta \tag{4.3.46}$$

şeklinde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanmış olsun. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{u}_2\}\frac{dx(t)}{dt} + \{(x(t) - \bar{u}_2)^2 - (x(t-\tau) - \bar{u}_2)^2\} \qquad (4.3.47)$$

olup (4.3.1)'den

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{u}_2\}\{rx(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma x(t)\}$$

$$+\{(x(t) - \bar{u}_2)^2 - (x(t-\tau) - \bar{u}_2)^2\}$$

$$= (1 + 2\gamma)x(t)^2 + (2\beta r\bar{u}_2 - 1)x(t-\tau)^2 - 2\bar{u}_2(1+\gamma)x(t) + 2\bar{u}_2(1-r)x(t-\tau)$$

$$+2\alpha rx(t)x(t-\tau)\big(\bar{u}_2 - x(t)\big) + 2rx(t)x(t-\tau)\big(1 - \beta x(t-\tau)\big)$$

dir.$-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{dV}{dt} < (2\beta r\bar{u}_2 - 1)x(t-\tau)^2 + 2\bar{u}_2(1-r)x(t-\tau) + 2\alpha rx(t)x(t-\tau)\big(\bar{u}_2 - x(t)\big) + 2rx(t)x(t-\tau)\big(1 - \beta x(t-\tau)\big) \qquad (4.3.48)$$

bulunur. Ayrıca, $1 < r < \frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2\beta}$ olduğundan

$$2\beta r\bar{u}_2 - 1 < 0 \qquad \text{ve} \quad 1 - r < 0 \qquad (4.3.49)$$

dir. Bu durumda (4.3.49)

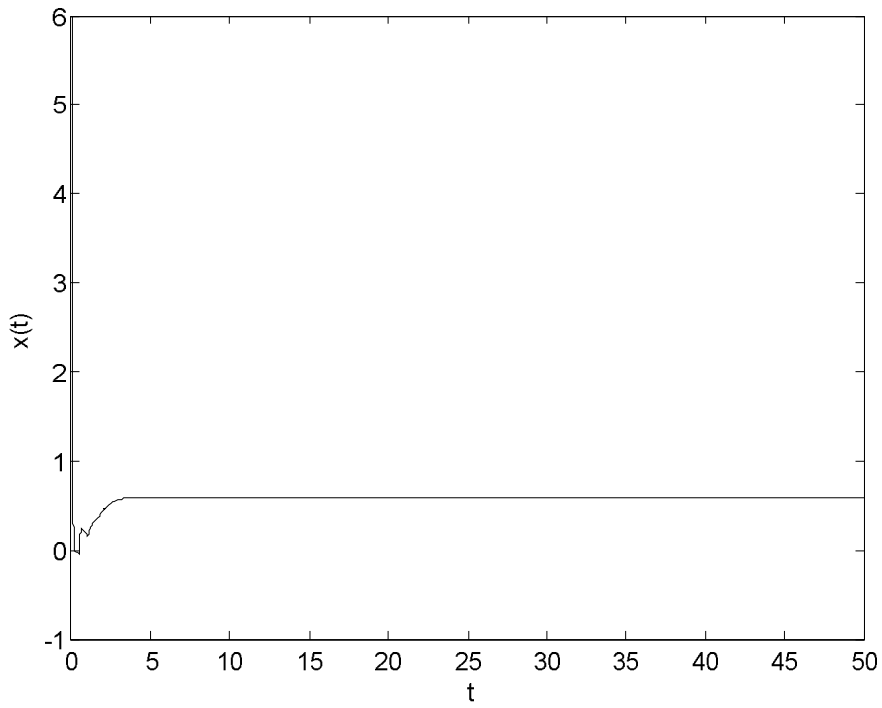
$$\frac{dV}{dt} < 2\alpha rx(t)x(t-\tau)\big(\bar{u}_2 - x(t)\big) + 2rx(t)x(t-\tau)\big(1 - \beta x(t-\tau)\big) \qquad (4.3.50)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda

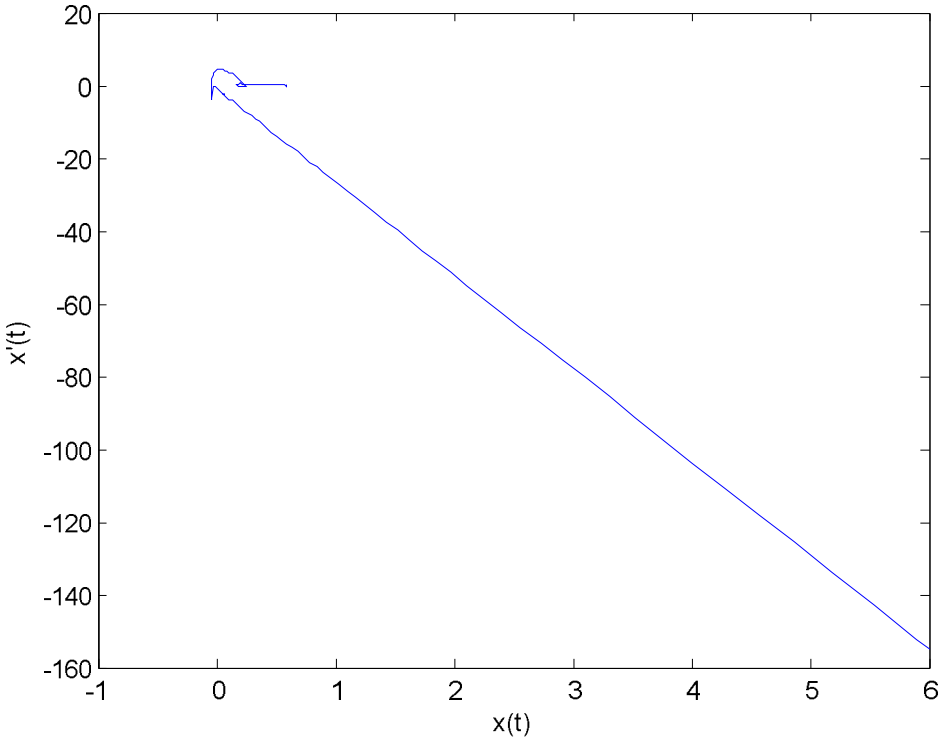
$$x(t) > \bar{u}_2 \qquad \text{ve} \qquad x(t-\tau) > \frac{1}{\beta} \qquad (4.3.51)$$

olması halinde $\frac{dV}{dt} < 0$ elde edilir. Yani, $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.3.1)}$ negatif olduğundan Lyapunov tanımı gereğince (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.3.8. Teorem 4.3.5 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma = -0.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.1) diferensiyel denkleminin $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.2.8(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.8(a) $\tau = 0.5, r = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma = -0.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.8(b) $\tau = 0.5,\ r = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma = -0.7$ ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

4.3.3 (4.3.1) Denkleminin Denge Noktalarının Yerel Ve Global Kararlılık Analizinde Allee Etkisi

Bu kesimde (4.3.1) lojistik diferensiyel denklemine t zamanına göre Allee fonksiyonları uygulanarak elde edilen yeni diferensiyel denklemlerin çözümlerinin yerel ve global davranışları incelenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar teorik ve geometrik olarak gösterilmiş ve (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözümleri ile mukayeseleri yapılmıştır.

Şimdi, $\gamma > 0$ olmak üzere

$$a\big(x(t)\big) = \frac{x(t)}{p + x(t)} \tag{4.3.52}$$

Allee fonksiyonunu tanımlayalım ve $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$, (4.3.1) diferensiyel denkleminin kritik noktası olmak üzere

$$r^* = \frac{r}{a(\bar{u}_2)} \tag{4.3.53}$$

ve

$$\rho^* = \frac{1}{a(\bar{u}_2)} \tag{4.3.54}$$

olsun. Bu durumda (4.3.53) ve (4.2.54) dikkate alınırsa (4.3.1) diferensiyel denklemi

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\big(x(t)\big)\{r^* x(t-\tau)\{1-\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)\}+\gamma\rho^* x(t)\} \tag{4.3.55}$$

şeklinde yazılabilir. Burada r^* yeni popülasyon oranıdır. Şimdi bu denklemin çözümlerini inceleyeceğiz. (4.3.55) diferensiyel denklemine $v(t) = x(\tau t)$ dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\frac{dv(t)}{dt} = a\big(v(t)\big)\tau\{r^* v(t-1)\{1-\alpha v(t)-\beta v(t-1)\}+\gamma\rho^* v(t)\} \tag{4.3.56}$$

bulunur. Kritik nokta tanımı gereğince (4.3.56) diferensiyel denklemin sıfır olmayan kritik noktası

$$\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)} \ ,r \neq 0 \tag{4.3.57}$$

dir. Bu kritik nokta civarında (4.3.56) diferensiyel denklemini lineerleştirebilmek için

$$y(t) = v(t) - \bar{v} \tag{4.3.58}$$

dönüşümü yapılarak

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(y(t)+\bar{v})\tau\{r^*(y(t-1)+\bar{v})\{1-\alpha(y(t)+\bar{v})-\beta(y(t-1)+\bar{v})\}$$

$$+\gamma\rho^*(y(t)+\bar{v})\}$$

denklemi bulunur ve buradan (4.3.56)'nın lineerleştirilmiş şekli olan

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(y(t)+\bar{v})\{-\tau(\alpha r^*\bar{v}-\gamma\rho^*)y(t) - \tau(\alpha r^*\bar{v}+2\beta\bar{v}r^*-r^*)y(t-1)\} \quad (4.3.59)$$

bulunur. Bu denkleme ait karaktersitik denklem ise

$$(\bar{v}+p)\lambda + \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v}-\gamma\rho^*) + \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v}+2\beta\bar{v}r^*-r^*)e^{-\lambda} = 0 \quad (4.3.60)$$

dir.

(4.3.57) kritik noktasının kararlılık analizi için (4.3.60) karakteristik denkleminin köklerinin incelenmesine ihtiyaç vardır. Bu nedenle anılan denklemlerinin köklerinin özelliklerinin tespitinde Hale Lemma'sına ihtiyaç duyulur. Aşağıdaki Teoremin ifade ve ispatı Hale Lemması [112] dikkate alınarak oluşturulmuştur

Teorem 4.3.6. $r \neq 0$ olmak üzere $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ noktası (4.3.55) diferensiyel denkleminin kritik noktası ve $\gamma\rho^* < \frac{1}{\tau} + \frac{p}{\bar{v}\tau}$ olsun. Eğer

$$\chi = -\frac{\tau a(\bar{v})}{\alpha+\beta}(\alpha r^* - \beta\gamma\rho^*)\tan\chi, \quad 0 < \chi < \pi \quad (4.3.61)$$

olmak üzere

$$-\gamma\rho^* < r^* < -\frac{(\alpha+2\beta)\gamma\rho^*}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)(\alpha r^* - \beta\gamma\rho^*)^2} \quad (4.3.62)$$

ise, bu taktirde (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası yerel kararlıdır.

İspat. Lemma 4.1.1 ve (4.3.60) karakteristik denklemi birlikte dikkate alınırsa,

$$a_1 = \frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v}-\gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v}+2\beta\bar{v}r^*-r^*)}{(\bar{v}+p)} \quad (4.3.63)$$

yazılabilir. Buna göre (4.1.10)‘dan

$$a_1 = \frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} > -1 \tag{4.3.64}$$

olmalıdır. Bu durumda, $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ olmak üzere (4.3.64) eşitsizliğinden

$$r^* > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} + \frac{\beta\gamma\rho^*}{\alpha} - \frac{p(\alpha+\beta)}{\alpha\bar{v}\tau} \tag{4.3.65}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (4.1.11)‘den

$$\frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)} + \frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)}{(\bar{v}+p)} > 0 \tag{4.3.66}$$

eşitsizliğinden

$$r^* > -\gamma\rho^* \tag{4.3.67}$$

dir.

Son olarak, (4.1.12)‘den

$$\frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)}{(\bar{v}+p)} < \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{\bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*)}{(\bar{v}+p)}\right)^2} \tag{4.3.68}$$

yazılabilir. Burada $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ olduğu dikkate alındığında (4.3.68)’den

$$r^* < -\frac{(\alpha+2\beta)\gamma\rho^*}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(1+\tan^2\chi)(\alpha r^* - \beta\gamma\rho^*)^2} \tag{4.3.69}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.3.65) ve (4.3.67)‘den

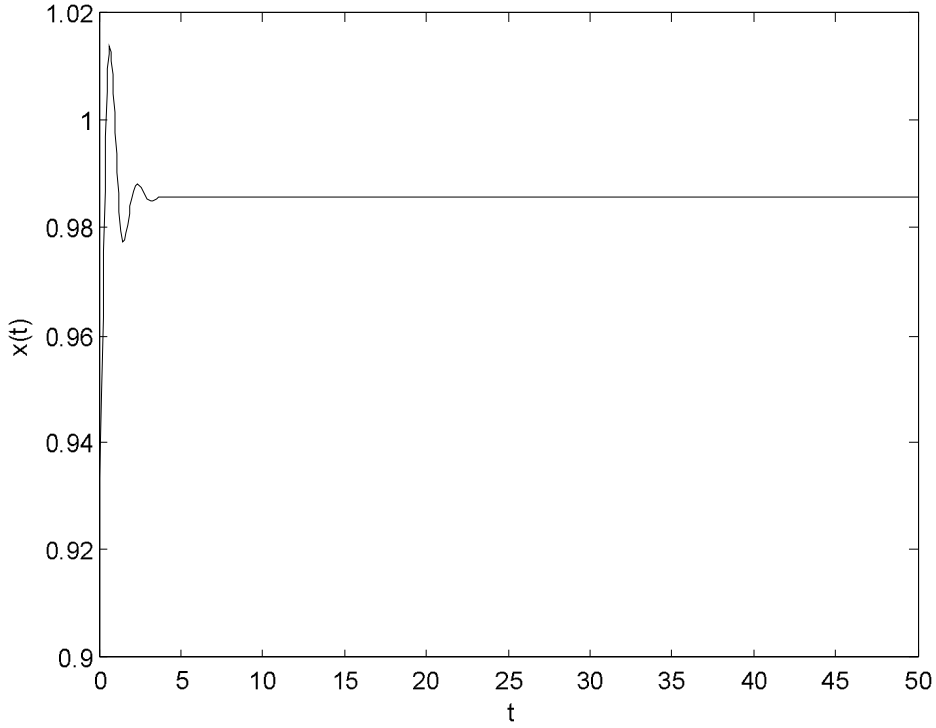
$$-\gamma\rho^* > -\frac{\alpha+\beta}{\tau\alpha} + \frac{\beta\gamma\rho^*}{\alpha} - \frac{p(\alpha+\beta)}{\alpha\bar{v}\tau} \tag{4.3.70}$$

eşitsizliğinin mevcut olması gerekir. (4.3.70) dikkate alındığında

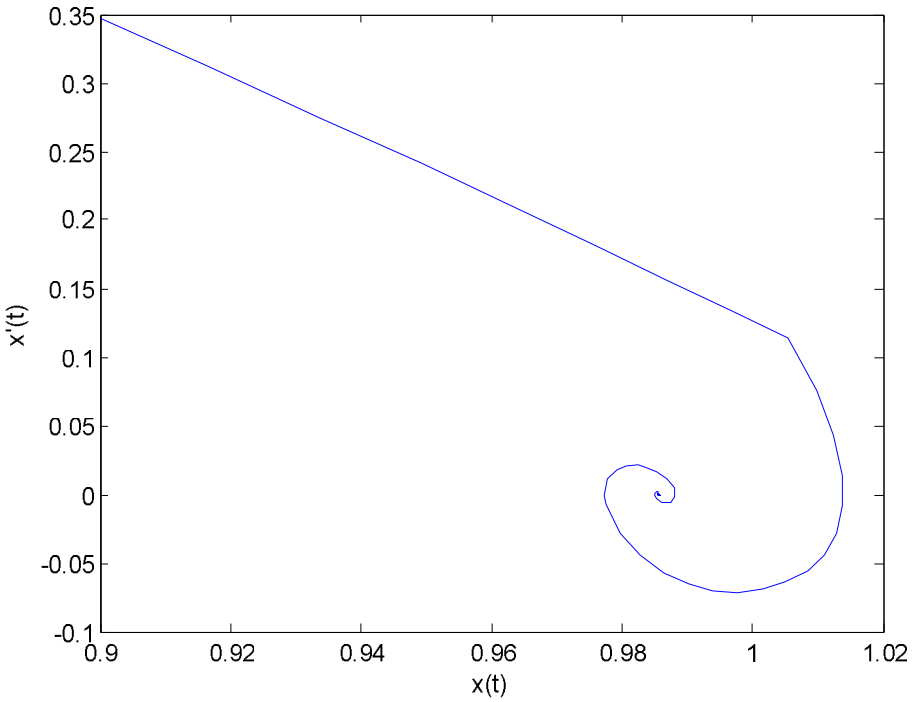
$$\gamma\rho^* < \frac{1}{\tau} + \frac{p}{\bar{v}\tau} \tag{4.3.71}$$

hipotezi elde edilir. Bu da teormin ispatını tamamlar.

Örnek 4.3.9. Teorem 4.3.3 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r^* = 5$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = 1.9, p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.9 (a) ve (b)'de verilmiştir.

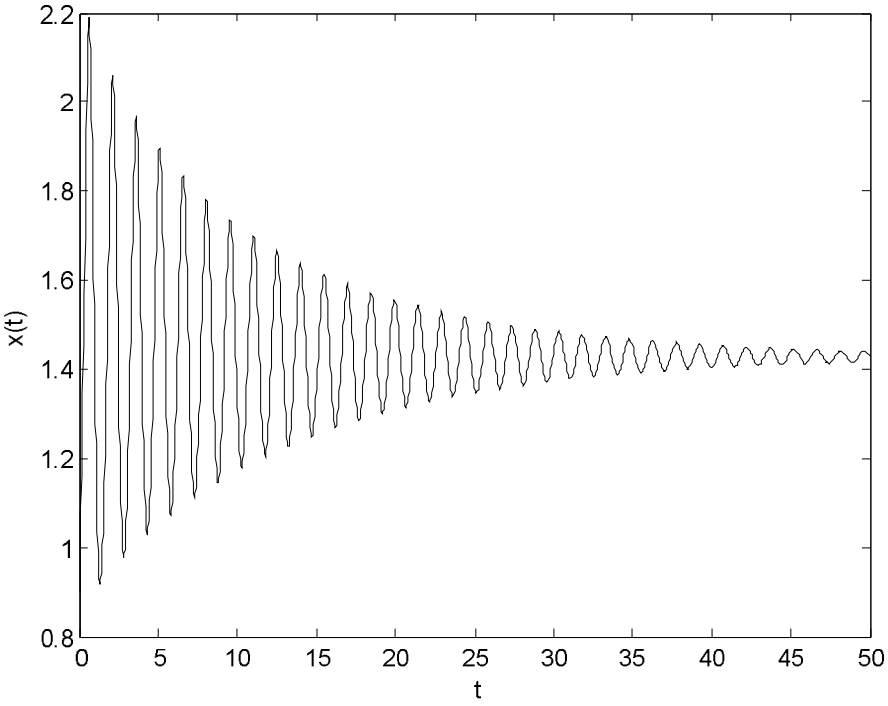


Şekil 4.3.9(a) $\tau = 0.5$, $r^* = 5$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = 1.9$, $p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

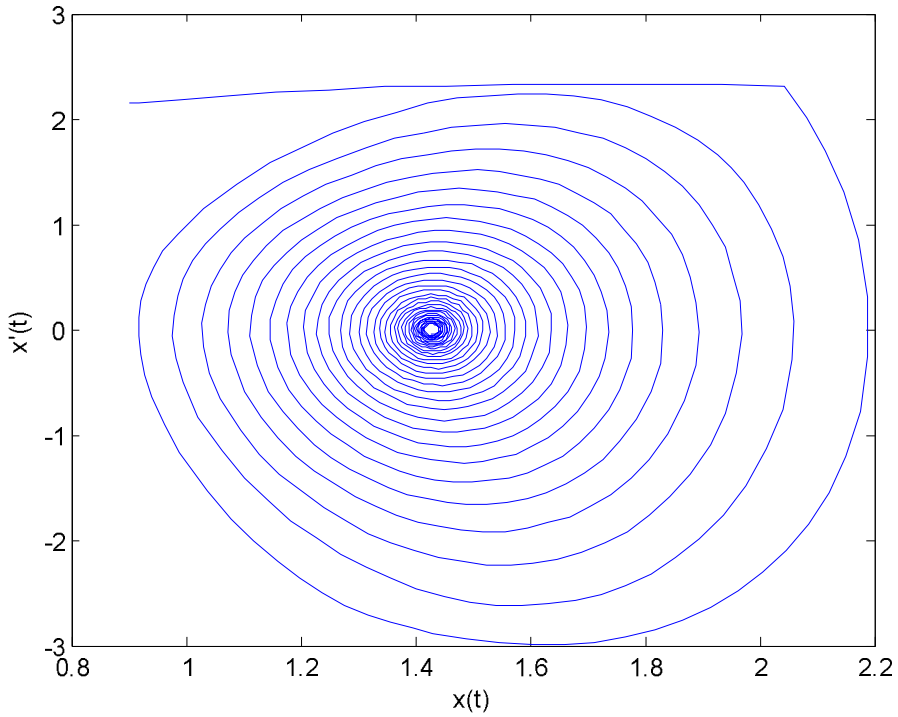


Şekil 4.3.9(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.10. Teorem 4.3.6 dikkate alındığında Örnek 4.3.4'deki $\tau = 0.5$, $r^* = 5$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ değerleri seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının karasızlığının zaman göre kararlı olduğu ile ilgili grafikler Şekil 4.3.10 (a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.10(a) $\tau = 0.5$, $r^* = 5$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.10(b) $\tau = 0.5, r^* = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.7. $\alpha > \beta$ ve $r^* < \frac{\gamma\rho^*(\alpha+3\beta)}{\alpha\beta}$ olsun. Bu durumda $r^* \neq 0$ ve her $\tau > 0$ gecikme zamanı için (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.3.60) karakteristik denklemin bir kompleks kökü mevcut olsun. Bu durumda $i\omega_0 \neq 0$ olmak üzere (4.3.60) karakteristik denklemi için

$$(\bar{v} + p)i\omega_0 + \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*) + \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)e^{-i\omega_0} = 0 \qquad (4.3.72)$$

yazılabilir. (4.3.72)'den

$$\begin{cases} \tau\bar{v}(\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*) + \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)\cos\omega_0 = 0 \\ (\bar{v} + p)\omega_0 - \bar{v}\tau(\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)\sin\omega_0 = 0 \end{cases} \qquad (4.3.73)$$

elde edilir. Buradan

$$\omega_0^2 = \frac{\tau^2\bar{v}^2}{(\bar{v}+p)^2}((\alpha r^*\bar{v} + 2\beta\bar{v}r^* - r^*)^2 - (\alpha r^*\bar{v} - \gamma\rho^*)^2) \tag{4.3.74}$$

bulunur. (4.3.74)'ün düzenlenmesiyle

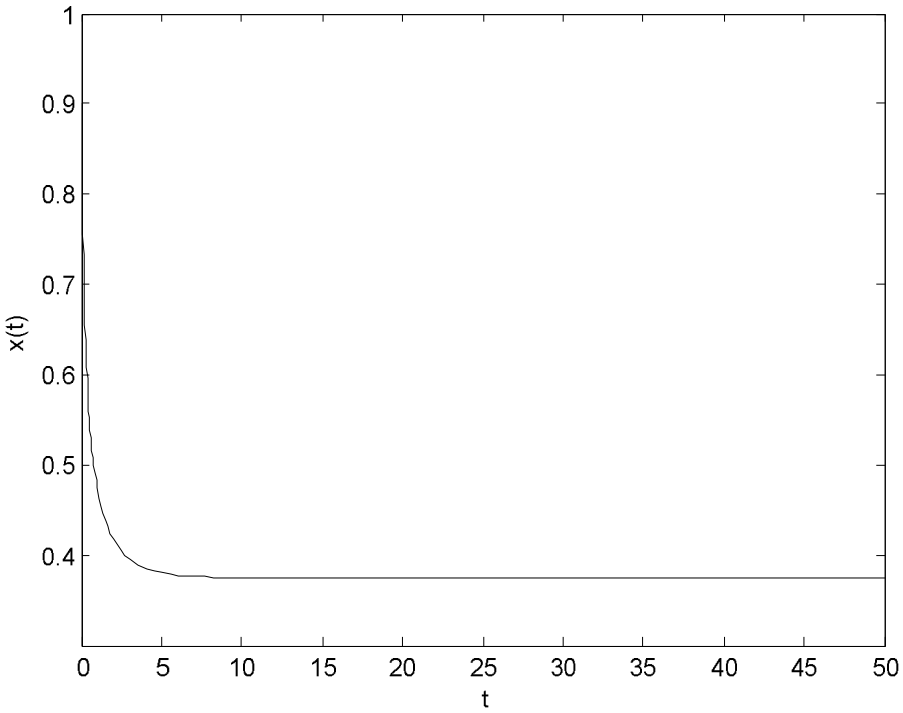
$$\omega_0^2 = \frac{(r^*+\gamma\rho^*)\tau^2\bar{v}^2}{(\bar{v}+p)^2}\left(\frac{(\beta-\alpha)r^*+\gamma\rho^*(\alpha+3\beta)}{(\alpha+\beta)}\right) \tag{4.3.75}$$

yazılabilir. (4.3.75) dikkate alındığında, eğer

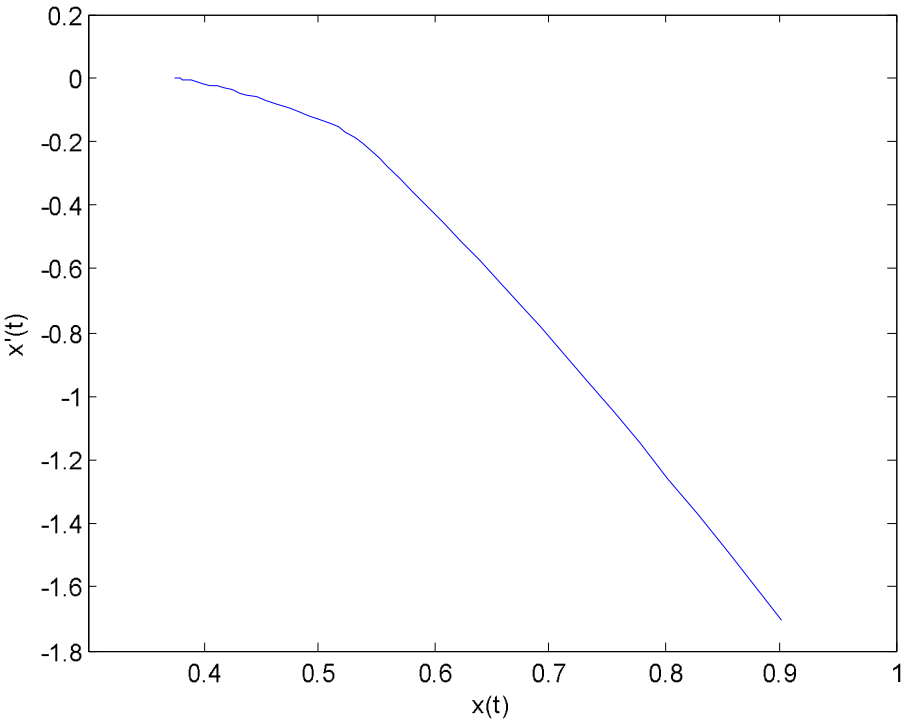
$$(\beta - \alpha)r^* + \gamma\rho^*(\alpha + 3\beta) < 0 \tag{4.3.76}$$

ise, bu taktirde $\omega_0^2 < 0$ dır. Bunun için ise $\alpha > \beta$ ve $r^* < \frac{\gamma\rho^*(\alpha+3\beta)}{\alpha\beta}$ yeter koşullardır. Buna durumda, (4.3.60) karakteristik denklemin bütün kökleri negatif reel kısma sahiptir ve böylece Terorem 4.1.2den her $\tau > 0$ gecikme zamanı için $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası asimptotik kararlıdır.

Örnek 4.3.11. Teorem 4.3.7 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r^* = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = -1.9$, $p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.11 (a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.11(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ için (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.11(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Teorem 4.3.8. $1 < r^* a\big(x(t)\big) < \frac{\alpha+\beta-2\gamma\rho^*}{2\beta}$ ve $-1 < \gamma\rho^* a\big(x(t)\big) < -\frac{1}{2}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için

$$x(t) > \bar{v} \qquad \text{ve} \qquad x(t-\tau) > \frac{1}{\beta} \tag{4.3.77}$$

olsun. Bu durumda (4.3.55) diferensiyel denklemin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. $\tau > 0$ için (4.3.77)'yi sağlayan x fonksiyonun sürekli olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$V\big(x(t), x(t+\theta)\big) = \{x(t) - \bar{v}\}^2 + \int_{-\tau}^{0} \{x(t+\theta) - \bar{v}\}^2 d\theta \tag{4.3.78}$$

şeklinde bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanmış olsun. Buna göre,

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{v}\}\frac{dx(t)}{dt} + \{(x(t) - \bar{v})^2 - (x(t-\tau) - \bar{v})^2\} \qquad (4.3.79)$$

olup (4.3.55)'ten

$$\frac{dV}{dt} = 2\{x(t) - \bar{v}\}a\big(x(t)\big)\{r^*x(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma\rho^* x(t)\}$$

$$+\{(x(t) - \bar{v})^2 - (x(t-\tau) - \bar{v})^2\}$$

$$= \Big(1 + 2\gamma\rho^* a\big(x(t)\big)\Big)x(t)^2 + \big(2\beta r^*\bar{v}a\big(x(t)\big) - 1\big)x(t-\tau)^2$$

$$-2\bar{v}\Big(1 + \gamma\rho^* a\big(x(t)\big)\Big)x(t) + 2\bar{v}\Big(1 - r^* a\big(x(t)\big)\Big)x(t-\tau)$$

$$+2\alpha r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(\bar{v} - x(t)\big) + 2r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(1 - \beta x(t-\tau)\big)$$

dir. $-1 < \gamma\rho^* a\big(x(t)\big) < -\frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{dV}{dt} < \big(2\beta r^*\bar{v}a\big(x(t)\big) - 1\big)x(t-\tau)^2 + 2\bar{v}\Big(1 - r^* a\big(x(t)\big)\Big)x(t-\tau)$$

$$+2\alpha r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(\bar{v} - x(t)\big)$$

$$+2r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(1 - \beta x(t-\tau)\big) \qquad (4.3.80)$$

bulunur. Ayrıca, $1 < r^* a\big(x(t)\big) < \frac{\alpha+\beta-2\gamma\rho^*}{2\beta}$ ve olduğundan

$$2\beta r^*\bar{v}a\big(x(t)\big) - 1 < 0 \qquad \text{ve} \quad 1 - r^* a\big(x(t)\big) < 0 \qquad (4.3.81)$$

dir. Bu durumda (4.3.80)

$$\frac{dV}{dt} < 2\alpha r^* x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(\bar{v} - x(t)\big)$$

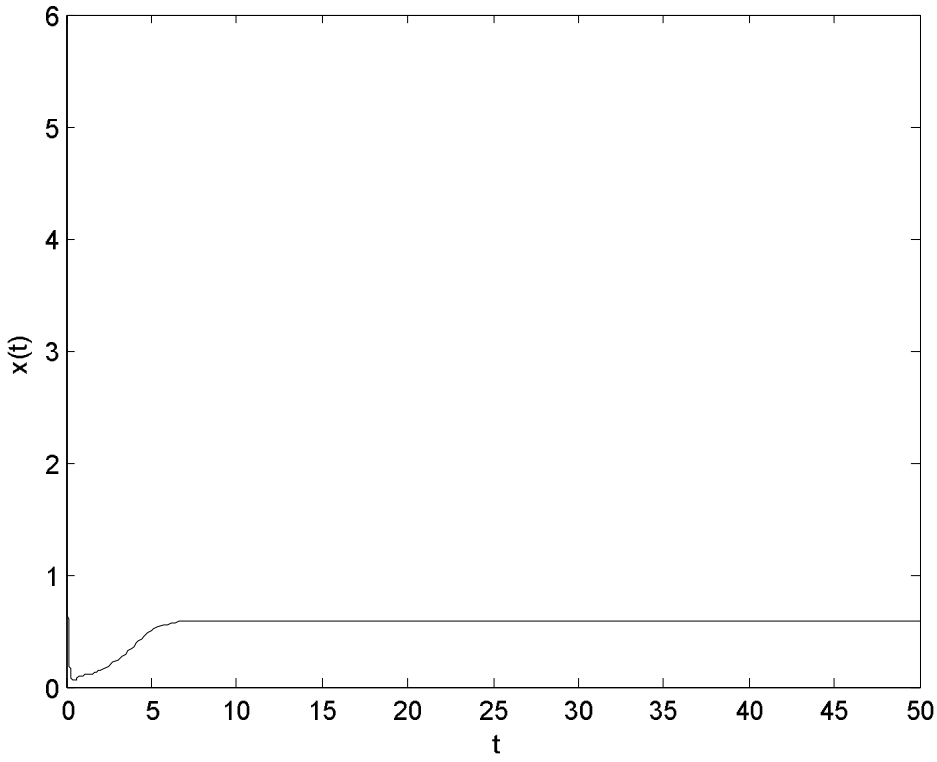
$$+2r^{*}x(t)x(t-\tau)a\big(x(t)\big)\big(1-\beta x(t-\tau)\big) \tag{4.3.82}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda

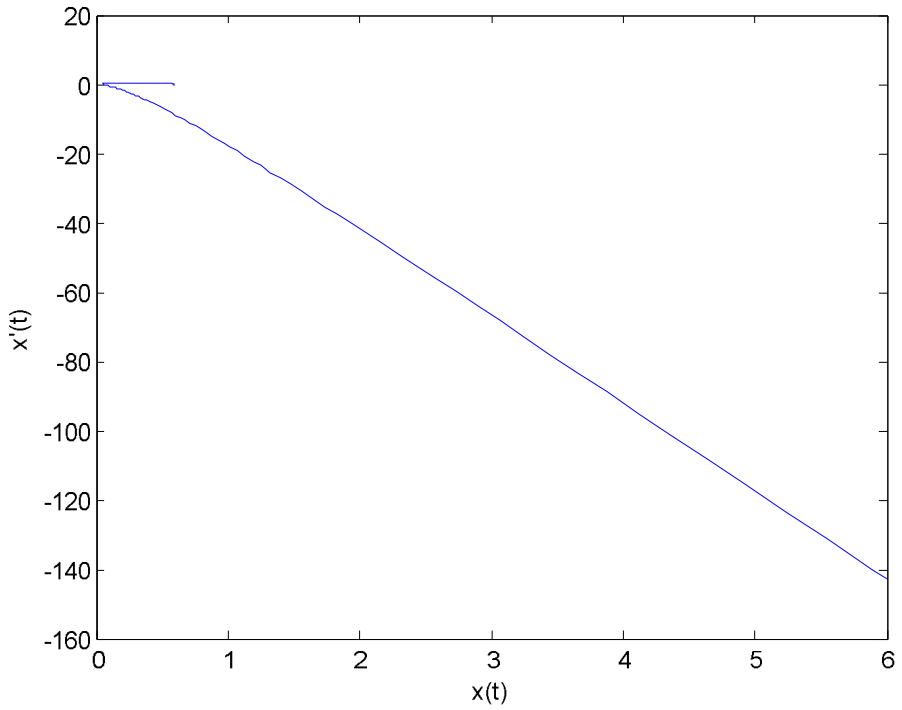
$$x(t) > \bar{v} \qquad \text{ve} \qquad x(t-\tau) > \frac{1}{\beta} \tag{4.3.83}$$

olması halinde $\frac{dV}{dt} < 0$ elde edilir. O halde $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4.3.55)}$ negatif olduğundan Lyapunov tanımı gereğince (4.3.55) diferensiyel denklemin $\bar{v} = \frac{r^{*}+\gamma\rho^{*}}{r^{*}(\alpha+\beta)}$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.3.12. Teorem 4.3.8 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r^{*} = 4$, $\alpha = 1.2, \beta = 0.2$, $\gamma\rho^{*} = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.55) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^{*}+\gamma\rho^{*}}{r^{*}(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.12 (a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.12(a) $\tau = 0.5$, $r^* = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.12(b) $\tau = 0.5$, $r^* = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Benzer şekilde t-1 zamanı için

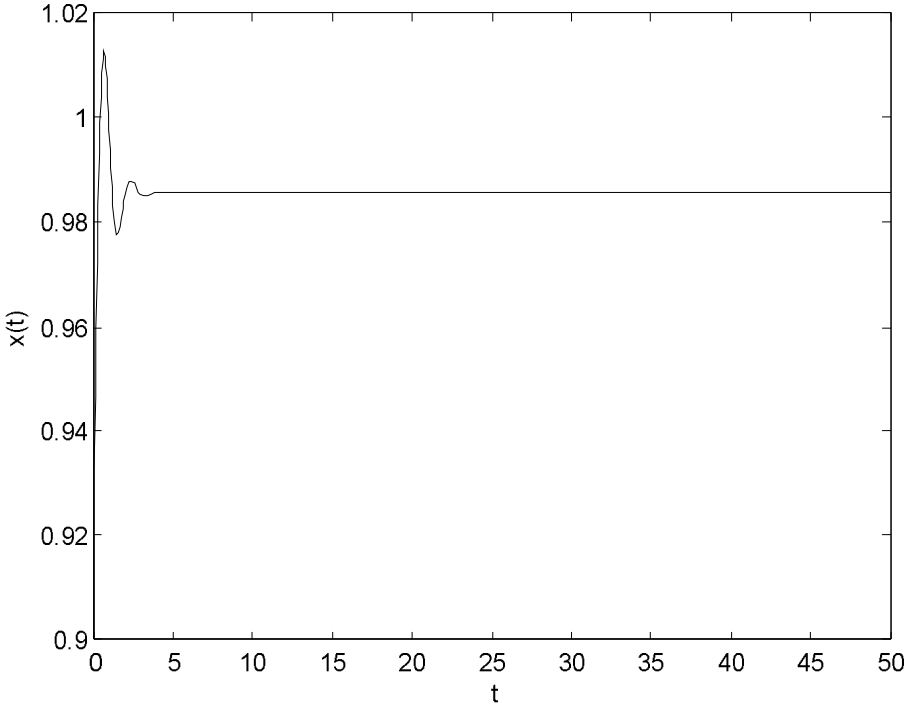
$$a\big(x(t-\tau)\big) = \frac{x(t-\tau)}{\gamma + x(t-\tau)} \tag{4.3.84}$$

Allee fonksiyonunu (4.3.1)'e uygularsak

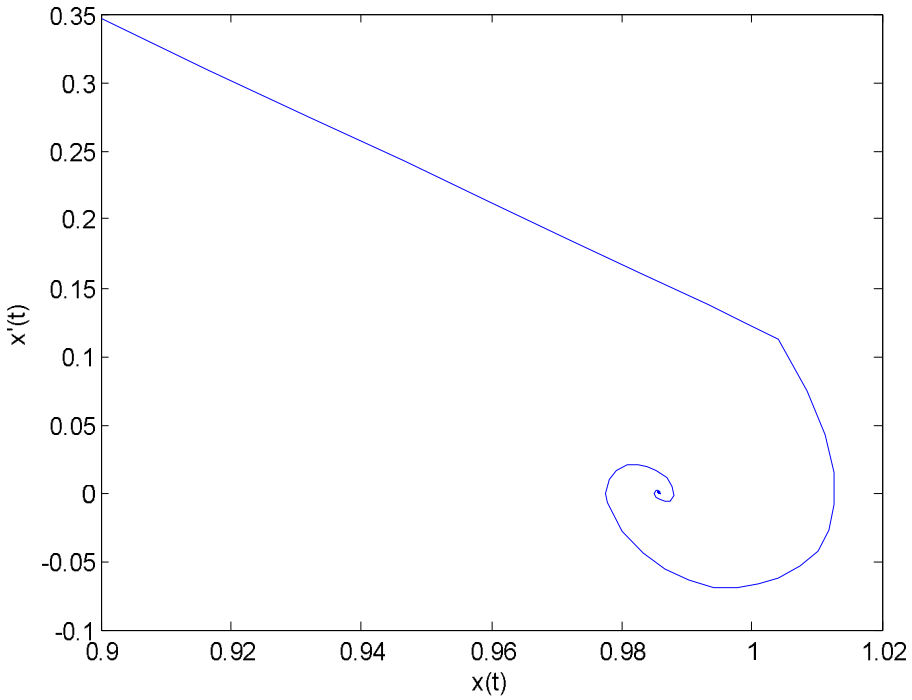
$$a\big(x(t)\big)\{r^* x(t-\tau)\{1 - \alpha x(t) - \beta x(t-\tau)\} + \gamma\rho^* x(t)\} \tag{4.3.85}$$

lojistik diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin kritik noktası ve bu kritik noktası civarında elde edilen karakteristik denklem (4.3.55) diferensiyel denklemi ile aynıdır (bakınız (4.2.57) ve (4.2.60)). Böylece, Teorem 4.3.6, Teorem 4.3.7 ve Teorem 4.3.8'deki kararlılık koşulları (3.3.85) diferensiyel denklemi için de geçerli olur.

Örnek 4.3.13. Teorem 4.3.6 dikkate alındığında $\tau = 0.5, r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,$ $\gamma\rho^* = 1.9, p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.85) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$kritik noktasının yerel kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.13 (a) ve (b)'de verilmiştir.

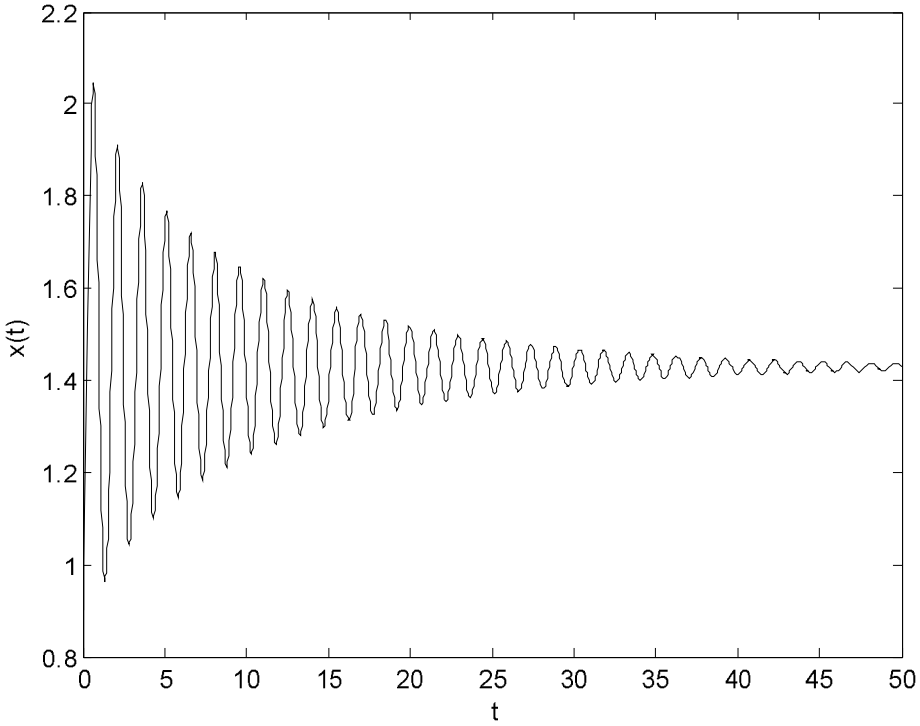


Şekil 4.3.13(a) $\tau = 0.5, r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

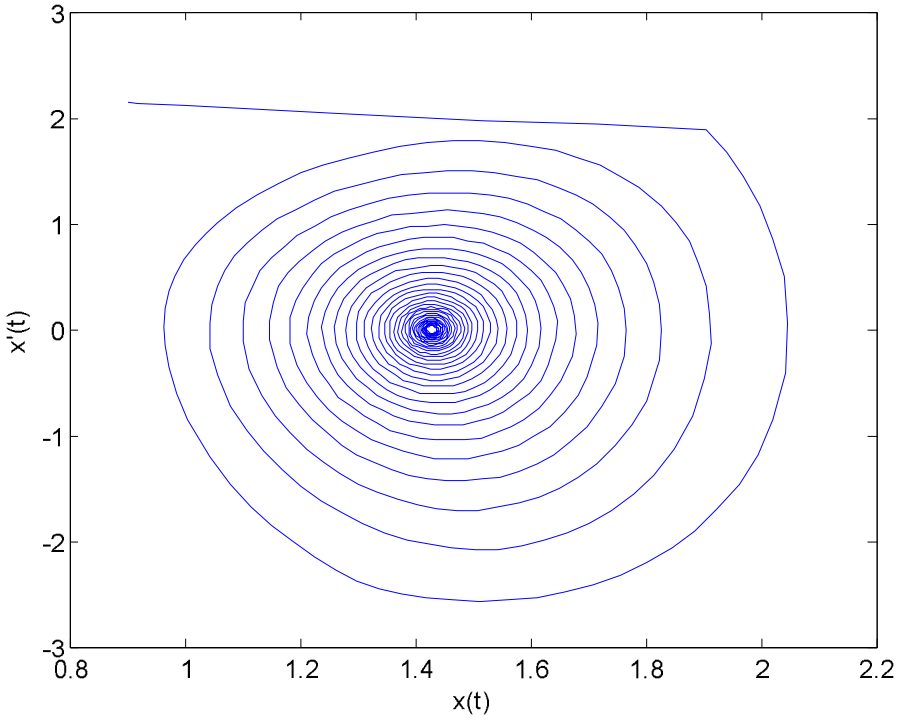


Şekil 4.3.13(b) $\tau = 0.5, r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 1.9, p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ için (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.14. Teorem 4.3.6 dikkate alındığında Örnek 4.3.4'deki $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ değerleri seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.85) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının karasızlığının zaman göre kararlı olduğu ile ilgili grafikler Şekil 4.3.14 (a) ve (b)'de verilmiştir.

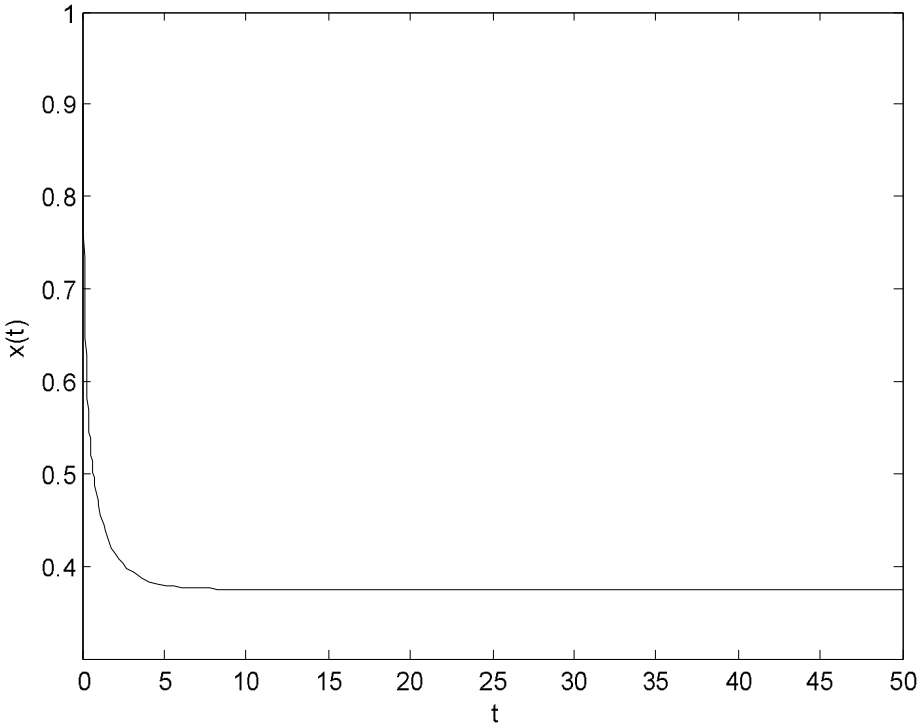


Şekil 4.3.14(a) $\tau = 0.5, r^* = 5, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

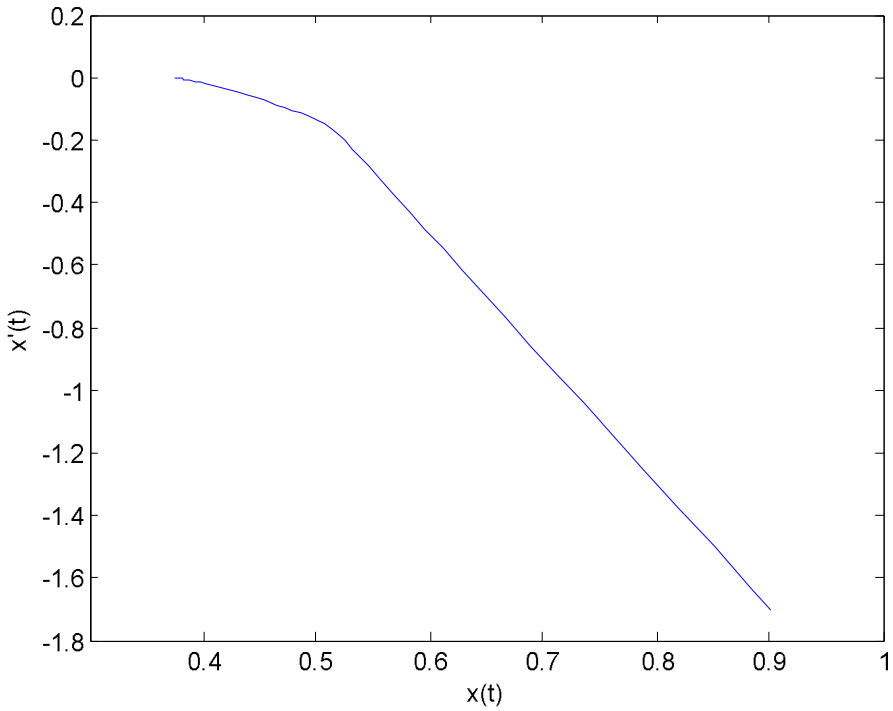


Şekil 4.3.14(b) $\tau = 0.5,\ r^* = 5,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = 5$, p=0.5 ve $x(t-\tau) = x(t) = 0.9$ için (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.15. Teorem 4.3.7 dikkate alındığında $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(t-\tau) = x(t) = 0.9$ seçilebilir. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.85) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.15 (a) ve (b)'de verilmiştir.

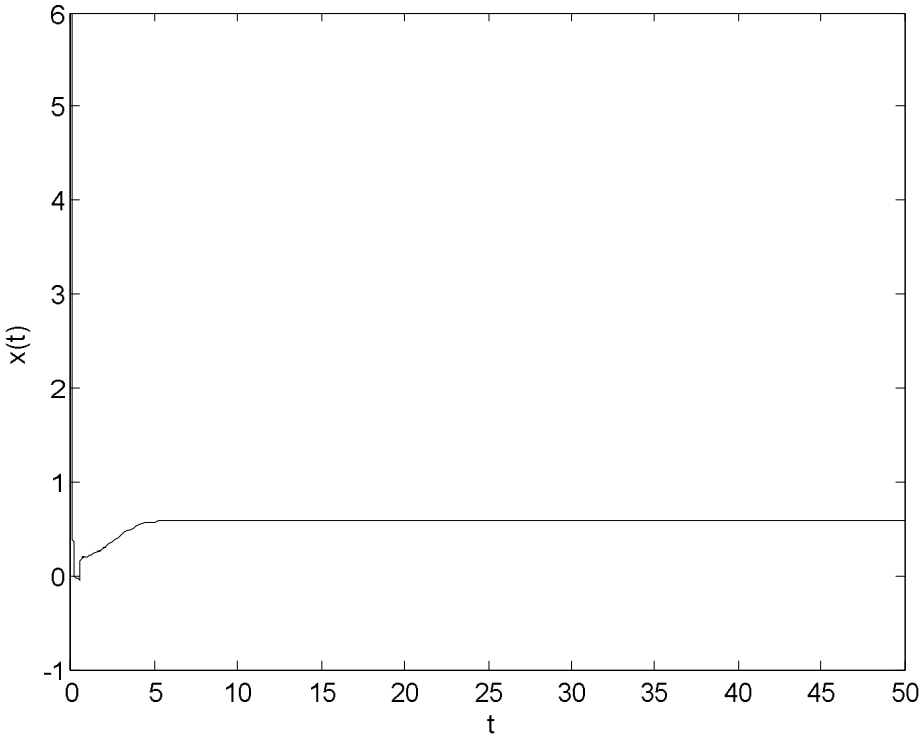


Şekil 4.3.15(a) $\tau = 0.5,\ r^* = 4,\ \alpha = 1.2,\ \beta = 0.2,\ \gamma\rho^* = -1.9,\ p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman-popülasyon yoğunluğu grafiği

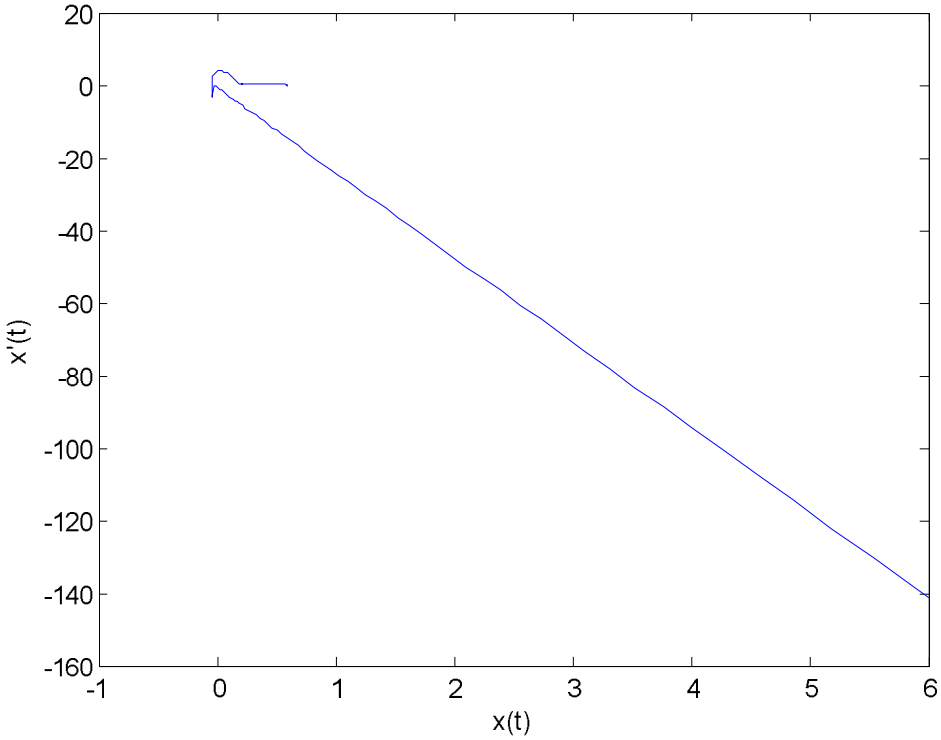


Şekil 4.3.15(b) $\tau = 0.5$, $r^* = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = -1.9$, $p = 0.5$ ve $x(-\tau) = x(0) = 0.9$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

Örnek 4.3.16. Teorem 4.3.8 dikkate alındığında $\tau = 0.5$, $r^* = 4$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ seçilsin. İlk 50 ardışık tekrar için (4.3.85) diferensiyel denkleminin $\bar{v} = \frac{r^*+\gamma\rho^*}{r^*(\alpha+\beta)}$ kritik noktasının global asimptotik kararlılığı ile ilgili grafikler Şekil 4.3.16 (a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.3.16(a) $\tau = 0.5, r^* = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin zaman popülasyon yoğunluğu grafiği



Şekil 4.3.16(b) $\tau = 0.5, r^* = 4, \alpha = 1.2, \beta = 0.2, \gamma\rho^* = -0.7$, p=0.5 ve başlangıç koşulları $x(0) = 6$ ve $x(-\tau) = 5.2$ olmak üzere (4.3.85) diferensiyel denkleminin çözüm dizisinin popülasyon yoğunluğu-popülasyon değişim grafiği

4.3.3. Kesim 4.3 İçin Genel Değerlendirme

Bu kesimde, elde edilen teorik sonuçlar MATLAB programını kullanılarak grafiklerle sunulmuş, oluşturulan diferensiyel denklemlerinin başlangıç koşulları t=0 için $x(t-\tau)$ ve $x(t)$ popülasyon yoğunluğu olarak seçilmiştir. Diferensiyel denklemlerin çözümlerine ait oluşturulan iki boyutlu grafikler, kararlılık analizinde bulunan teorik sonuçları desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

Kısım 4.3.2'de verilen Teorem 4.3.1-4.3.5, (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin denge noktaları civarındaki yerel ve global davranışlarını karakterize etmiş, Örnek 4.3.1-4.3.8'de bunlar grafiksel olarak gösterilmiştir.

Kısım 4.3.3'de ise (4.3.1) diferensiyel denklemi ve Allee sabiti $p = 0.5$ olmak üzere farklı t değerleri için Allee fonksiyonları birlikte incelenmiştir. Bu çerçevede, (4.3.55) diferensiyel denklemin kararlılık analizi Teorem 4.3.1-Teorem4.3.5'e benzer şekilde

yapılarak Teorem 4.3.6-Teorem 4.3.8 elde edilmiştir. Teorem 4.3.6 dikkate alınarak Örnek 4.3.3'de kullanılan değerler seçilmiştir. Burada (4.3.55) diferensiyel denklemin çözümlerinin (4.3.1) denklemin çözümlerine göre daha erken kararlılık gösterdiği görülmüştür. Üstelik, (4.3.55) diferensiyel denkleminin çözümlerinin $\bar{v}$ kritik noktası civarında oluşan genliği (4.3.1) diferensiyel denkleminin çözümlerinin kritik noktası civarı ile mukayese edildiğinde daha küçük olduğu görülmüştür (Örnek 4.3.9). (4.3.85) diferensiyel denkleminde ise, Allee fonksiyonun t-1 zamanından oluşması hali, aynı değerler için genliğin (4.3.55) denklemine kıyasla daha da küçük olduğu görülmüştür (Örnek 4.3.13). Diğer taraftan, Örnek 4.3.4'te seçilen değerler için (4.3.1) diferensiyel denklemin kritik noktası kararsız iken aynı değerler altında (4.3.55) diferensiyel denklemin çözümleri kararlı davranışlar göstermektedir (Örnek 4.3.10). (4.3.85) diferensiyel denkleminde ise tıpkı (4.3.55)'te olduğu gibi kararlı olmuştur, ancak $\bar{v}$ kritik noktası civarında oluşan genliğin (4.3.55)'e göre daha küçük olduğu gözlemlenebilmiştir (Örnek 4.3.14). Teorem 4.3.3 ve Teorem 4.3.7 dikkate alındığında (4.3.1), (4.3.55) ve (4.3.85) için Örnek 4.3.6 için seçilen değerler belirlenmiş ve her üç denklemin çözümlerinin grafiklerinin yaklaşık aynı zamanda asimptotik kararlılık gösterdiği tespit edilmiştir (bakınız sırasıyla Örnek 4.3.6, Örnek 4.3.11 ve Örnek 4.3.15). Bunun dışında gözlemlenebilen tek fark (4.3.85) diferensiyel denklemin çözümlerinin kritik noktası civarındaki genlik genişliğinin diğerlerine kıyasla daha küçük olmasıdır. Son olarak Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.8'in dikkate alınmasıyla Örnek 4.3.8'de kullanılan değerler (4.3.55) ve (4.3.85) diferensiyel denklemi için de seçilmiştir. (4.3.55) ve (3.3.85) diferensiyel denklemlerinde aniden global asimptotik kararlılığa geçişin olduğu Örnek 4.3.12 ve Örnek 4.3.16'da görülebilir. (4.3.85) diferensiyel denkleminde ise yine genliğin kritik noktası civarında (3.3.55)'in çözümlerine göre daha küçük olduğu görülebilir.

Sonuç olarak, yukarıda söylediklerimizi özetlersek, Allee etkili fark denklemlerin çözümlerinin Allee etkisiz olanlara kıyasla daha geç kararsızlığa geçtiği görülmektedir. Buna ilave olarak, Allee etkisini oluşturmak amacıyla iki çeşit Alle fonksiyonu dikkate alınmıştır, sadece t zamanından oluşan ve sadece t-1 zamanından oluşan. Bunlar arasındaki tek farkın kritik noktası civarındaki genlik aralığının olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

1. Bicknell-Johnson, M., Spears, C.P., Classes of Identities for Generalized Fibonacci Numbers G(n)=G(n-1)+G(N-c) for Matrices with Constant Valued Determinants, Fib. Quart., 34, 121-128, 1996.
2. Dujella, A., Generalized Fibonacci Numbers and Problems of Diophantus, Fib. Quart., 34, 164-175, 1996.
3. Basmakova, I.G., The 'Liber quadratorum' of Leonardo of Pisa (Russian) in History and methodology of natural sciences, 20, 27-37, 1978.
4. Fort, T., Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain, Oxford, England: Clarendon Press. 1948.
5. Dubbey, J.M., The mathematical work of Charles Babbage, Cambridge, 1978.
6. Morrison, P., Morrison, E., Charles Babbage and his calculating engines, New York, 1961.
7. Gompertz, B., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 26, 104-109, 1865-6.
8. Hooker, P.F., Gompertz, B., Journal of the Institute of Actuaries, 91, 203-212, 1965.
9. Quetelet, A., Verhulst, P.F., Annuaire de l'Academie royale des sciences de Belgique, 16, 97-124, 1850.
10. Verhulst, P.F., Recherches mathematiques sur la loi d'accroissment de la population, Nouv. Mem. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles, 18, 1-41, 1845.
11. Verhulst, P.F. Deuxieme memoire sur la loi d'accroissement de la population, Mem. de l'Academie Royale des Sci. des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 20, 1-32, 1847.

12. Iserles, A., Peplow, A., Stuart, A.M., A unified approach to spurious solution introduced by time discretization. Part I: Basic Theory, SIAM J. Num. Anal., 28, 1723-1751, 1991.
13. Sanz-Serna, J.M., Numerical Ordinary Differential Equations vs. Dynamical Systems, Oxford University Press, 81-106, 1992.
14. Iserles, A., Dynamics of Numerics, Bull. IMA, 30, 106-115, 1994.
15. Hubbard, J.H., West, B.H., Differential Equations. A Dynamical Systems Approach, Part I: ODEs, Springer-Verlag, New York, 1991.
16. Corless, R.M., Essex, C., Nerenberg, M.A.H., Numerical methods can suppress chaos, Physics Letters A, 157, 27-36, 1991.
17. Beyn, W.J., Numerical methods for dynamical systems, In Proceedings of the SERC Summer School at Lancaster (UK), Oxford University Press, 1990.
18. Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations, Springer –Verlag, Volume I, Second Edition, 1992.
19. Iserles, A., Stability and dynamics of numerical methods for nonlinear ordinary differential equations, IMA J. Num. Anal., 10, 1-30, 1990.
20. Stuart, A.M., Humphries, A.R., Model problems in numerical stability theory for initial value problems, SIAM Rev., 36 , 226-257, 1994.
21. Grote, K., Meyer-Spasche, R., Euler-Like Discrete Models of the Logistic Differential Equation, Computers Math. Applications, 36 (10-12), 211-225, 1998.
22. Gopalsamy, K., Kulenovic, M.R.S., Ladas, G., On a logistic equation with piecewise constant arguments, Differential Integral Equations, 4, 215-223, 1991.
23. So, J.W.H., Yu, J.S., Global Stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, Hokkaido Math. J., 24, 269-286, 1995.
24. Muroya, Y., A sufficient condition on global stability in a logisitc equation with piecewise constant arguments, Hokkaido Math. J., 32, 75-83, 2003.
25. Muroya, Y., Persistence, contractivityand global stability in logistic equations with piesewise constant delays, J. Math. Anal. Appl., 270, 602-635, 2002.
26. Muroya, Y., Global stability in discretes models of nonautonomous Lotka-Volterra Type, J. Math. Anal. Appl., 33, 115-126, 2004.

27. Wang, W., Mulone, G., Salemi, F., Salone, V., Global stability of discrete population models with time delays and fluctuating environments, J. Math. Anal. Appl., 264, 147-167, 2001.
28. Seifert, G., Certain systems with piecewise constant feedback controls with a time delay, Differential Integral Equations, 6, 937-947, 1993.
29. Uesugi, K., Muroya, Y., Ishiwata, E., On the global atrractivity for a logistic equation with piesewise constant arguments, J. Math. Anal. Appl., 294, 560-580, 2004.
30. Dohtani, A., Occurrence of chaos in higher dimensional discrete time systems, SIAM J. Appl. Math., 52, 1707-1721, 1992.
31. Fischer, M.E., Goh, B.S., Stability results for delayed-recruiment models in population dynamics, J. Math. Biol., 19, 147-156, 1984.
32. Guckenheimer, J., Oster, G., Ipaktchi, A., The Dynamics of density dependent population models, J. Math. Biol., 4, 101-147, 1977.
33. May, R.M., Biological populations obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos, J. Theoret. Biol., 51, 511-524, 1975.
34. May, R.M., Oster, G.F., Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models, Amer. Natur., 110, 573-599, 1976.
35. Norris, D.O., Soewono, E., Period doubling and chaotic behavior of solutions to $y' = \mu y(t)\left(1 - y\left(\left[\frac{t+\alpha}{\delta}\right]\right)\right)$, Appl. Anal., 40 181-188, 1991.
36. Seifert, G., On an interval map associated with delay logistic equation with discontinuous delays, in: S. Busenberg, M. Martelli (Eds.), Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1475, Springer, Berlin, New York, 1991.
37. Gopalsamy, K., Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publischers, Dortrecht, 1992.
38. Gopalsamy, K., Liu, P., Persistence and global stability in a population model, J. Math. Anal. Appl., 224, 59-80, 1998.
39. Muroya, Y., Kato, Y., On Gopalsamy and Liu's conjecture for global stability in a population model, Journal of computational and Applied Mathematics, 181, 70-82, 2005.

40. Li, H., Muroya, Y., Nakata, Y., Yuan, R., Global stability of nonautonomous logistic equations with piecewise constant delay, Nonlinear Analysis: Real World Applications, in press.
41. Muroya, Y., new contractivity condition in a population model with piecewise constant arguments, J. Math. Anal. Appl., 346, 65-81, 2008.
42. Shen, J.H., Stravroulakis, I.P., Oscillatory andd nonoscillatory delay equations with piesewise constant argument, Journal of Mathematical Analaysis and Applications, 248, 385-401, 2000.
43. Kwong, M.K., Oscillation of first- order delay equations, J. Math. Anal. Appl., 156, 274-286, 1991.
44. Philos, Ch.G., Sficas, Y.G., An oscillation criterion for first order linear delay differential equations, Canad. Math. Bull., 41, 207-213, 1998.
45. Wiener, J., Cooke, K.L., Oscillations in systems of differential equations with piesewise constant argument, J. Math. Anal. Appl., 137, 221-239, 1989.
46. Yu, J.S., Wang, Z.C., Some further results on oscillation of neutral differential equations, Bull. Austral. Math. Soc., 46, 149-157, 1992.
47. Wendi, W., Zmulone, G., salemi, F., salone, V., Global Stability of Discrete Population Models with Time Delays and Fluctuating Environment, J. Math. Anal. Appl., 264, 147-167, 2001.
48. Crone, E.E., Delayed density dependence and the stability of interacting populations and subpopulations, Theoret. Population biol., 51, 67-76, 1997.
49. Luo, Z., Shen, J., New Results on oscillation for Delay Differential Equations with Piecewise Constant Argument, Computers and Mathematics with Applications, 45, 1841-1848, 2003.
50. W.C., Allee, 1931. Animal Aggregations: A Study in General Sociology. University of Chicago Press, Chicago, IL.
51. G. Wang, X-G., Liang, F.-Z., Wang, The competitive dynamics of populations subject to an Allee Effect, Ecological Modelling, 124, 183–192, 1999.
52. Asmussen, M.A., Density-dependent selection II. The Allee effect. Am. Nat. 114, 796–809, 1979.
53. Lande, R., Extinction thresholds in demographic models of territorial populations. Am. Nat. 130, 624–635, 1987.

54. Dennis, B., Allee-effect: population growth, critical density, and chance of extinction. Nat. Resource Model. 3, 481–538, 1989.
55. Stephan, T., Wissel, C., Stochastic extinction models discrete in time. Ecol. Model. 75-76, 183-192, 1994.
56. Hanski, I., Single-species metapopulation dynamics: concepts, models and observations. Biol. J. Linnean Soc. 42, 17–38, 1991.
57. Amarasekare, P., Allee effects in metapopulation dynamics. Am. Nat. 152, 298–302, 1998.
58. Dobson, A.P., Lyles, A.M., The population Dynamics and conservation of primate populations. Conserv. Biol. 3, 362–380, 1989.
59. Burgman, M.A., Ferson, S., Akcakaya, H.R., Risk Assessment in Conservation Biology. Chapman and Hall, London, 1993.
60. Fowler, C.W., Baker, J.D., A review of animal populations dynamics at extremely reduced population levels, Rep. Int. Whal. Comm. 41, 545–554, 1991.
61. Lande, R., Genetics and demography in biological conservation. Science, 241, 1455–1460, 1988.
62. Celik, C., Merdan, H., Duman, O., Akın, O., Allee effects on population dynamics with delay , Chaos, Solutions and Fractals, 37, 65–74, 2008.
63. Hutchinson, G.E., Circular causal systems in ecology, Ann. N.Y. Acad. Sci., 50, 221-246, 1948.
64. Betz, H., Burcham, P.B., Ewing, G.M., Differential Equations with Applications, New York: Harper and Brothers, 1954.
65. Gopalsamy, K., On the global attractivity in a generalized delay-logistic differential equation, Proc. Camb. Philos. Soc., 100, 183-192, 1986.
66. Uchmanski, J., Classical Mathematical Ecology, Warsaw: PWN, 1992.
67. Kuang, Y., Delay differential equations with applications in population dynamics, Boston: Academic Press, 1993.
68. Wright, K.E.M., A nonlinear difference differential equation, J. Reine Angew. Math., 194, 66-87, 1955.
69. Jiang, M., Shen, Y., Jian, J., Liao, X., Stability, bifurcation and a new chaos in the logistic differential equation with delay, Physcis Letters A, 350, 221-227, 2006.

70. Jiang, M., Shen, Y., Luo, H., Liao, X., Nonlinear behavior of the parameterized logistic differential systems, Applied Mathematics and Computation, 189 (2), 1694-1704, 2007.
71. Sun, C., Han, M., Lin, Y., Analysis of stability and Hopf bifurcation for delayed logistic equation, Chaos, Solutions and Fractals, 31, 672-682, 2007.
72. Lisena, B., Periodic solutions of logistic equations with time delay, Applied Mathematics Letters, 20, 1070-1074, 2007.
73. Lisena, B., Global attractivity in nonautonomous logistic equations with delay, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 9, 53-63, 2008.
74. Pielou, E.C., An Introducation to Mathematical Ecology, Wiley Inter-Science, 1969.
75. Pielou, E.C., Population and Community Ecology, Gordon and Breach, New York, 1974.
76. Kocic, V.L.J., Ladas, G., Global Attractivity in Nonlinear Delay Difference Equations, Proc. Amer. Math. Soc., 115(4) , 1083-1088, 1992.
77. Kocic, V.L.J., Ladas, G., Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
78. Kuruklis, S.A., Ladas, G., Oscillations and Global Attractivity in a Discrete Delay Logistic Model, Quart. Appl. Math., L(2), 227-233, 1992.
79. Jianshe, Y., Global Attractivity in a Discrete delay Logistic Model, Acta Mathematicae Sinica, 14 (1), 80-85, 1998.
80. Nicholson, A.J., An Outline of the Dynamics of Animal Populations, Austral. J. Zool., 2, 9-65, 1954.
81. Chen, M.P., Yu, J.S., Oscillation and global attractivity in a delay logistic difference equation, J. Differ. Equations Appl., 1, 227-237, 1995.
82. Philos, Ch.G., Oscillations in a nonautonomous delay logistic difference equation, Proceedings of the Edinburgh mathematical Society, 35, 121-131, 1992.
83. Erbe, L.H., Zhang, B.G., Oscillation of discrete analogue of delay equations, Differential and Integral Equations, 2 , 300-309, 1989.
84. Yu, J.S., Zhang, B.G., Wang, Z.C., Oscillation of delay difference equations, Applicable Analysis, 53, 117-124, 1994.

85. Zhou, Z., Zhang, Q., Global Attractivity of a nonautonomous logistic difference equation with delay, Computers and Mathematics with Applications, 38, 57-64, 1999.
86. Adimy M, Crauste F, Halanay A, Neamtu M, Opris_ D. Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model. Chaos, Solitons & Fractal, 27, 1091–107, 2006.
87. Scheuring I. Allee effect increases the dynamical stability of populations. J Theor Biol., 199, 407–14, 1999.
88. Stephens PA, Sutherland WJ. Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. Trend Ecol Evol., 14, 401–5, 1999.
89. Murray JD. Mathematical biology. New York: Springer-Verlag, 1993.
90. Ahmad S, Rao MRM. Stability of Volterra diffusion equations with time delays. Appl Math Comput., 90, 143–54, 1998.
91. O. Duman, H. Merdan, Stability analysis of continuous population model involving predation and Allee effect, Chaos, Solutions and Fractals, 41, 1218-1222, 2009.
92. H. Merdan et al., Allee effects on population Dynamics in continuous (overlapping) case, Chaos, Solutions and Fractals, 39, 1994-2001, 2009.
93. Thomas, G.B., Thomas' Calculus, International Edition, USA, 2005.
94. Kılıç, F., Lineer ve Lineer olmayan sistemlerin kararlılığının değişik metotlarla belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, 2008.
95. Kelley, W.G., Peterson, A.C., Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press.Inc., San Diego, 1991.
96. Mickens, R.E., Difference Equations: Theorey and Applications, Chapman and Hall, New York, 1990.
97. Ritger, P.D., Rose, N.J., Differential Equations with Applications, Stevens Instituteof Technology, McGraw-Hill Book Company, USA, 1968.
98. Gibbons, C.H., Kulenovic´, M.R.S., Ladas G., Voulov H.D., On the Trichotomy Character of $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1})/(A + x_n)$, J. of Difference Equations andApplications, 8(1), 75-92, 2002.
99. Amleh, A.M., Grove, E.A., Ladas, G., On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233, 790- 798, 1999.

100.Lambert, J.D., Numerical Mathods for Ordinary Differential Systems, John Wiley and Sons, Chichester, 1991.

101.Kendall, E.A., An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley and Sons, 1989.

102.Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, pp. 145 and 149-150, 1997.

103.El-Owaidy, H. M., El-Afifi, M. M., A note on the periodic cycle of $x_{n+2} = (1 + x_{n+1})/(x_n)$, Applied Mathematics and Computation, 109, 301-306, 2000.

104. K. Cunningham, M.R.S. Kulenovic, G. Ladas, S.V. Valicenti, Nonlinear Analysis, 47(7), 4603-4614, 2001.

105. Berryman, A.A., Underpopulation (Allee) effects, Entomology Department, Washington State University, 1997.

106.Leviton, D.A., Mc Govern, T.M., "The Allee effect in the Sea" in Marine conservation biology: the science of maintaining the sea's biodiversity, Eds: Norse EA and Crowder LB, 2005.

107. Çelik, C., Proceedings of the World Congresson Engineering and Computer Science, WCECS 2007, San Francisco, USA, 2007.

108. Murray, R.M., Li, Z., Sastry, S.S., A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press LLC, N.Y., 2000.

109. Khalil, H.K., Nonlinear systems, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1996.

110. Hale, J., Lunel, S. Verduyn, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, N.Y., 1993.

111. Ruan, S., Wei, J., On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differentail equations, Dynam. Cont. Discr. Impul. Sys. Series A: Math. Anal., 10, 863-878, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma BOZKURT
Baba Adı : Ali Hasan
Anne Adı : Münevver
Dogum yeri : Almanya
Dogum tarihi : 04.11.1979

İlk öğrenimini Almanya'da Oesterholz-Grundschule'de, ortaöğrenimini Nevşehir Avanos Lisesi'nde tamamladı. Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Uygulamalı Matematik Alanı'nda Yüksek Lisans'a başladı. 2003 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlarında Tezsiz Yüksek Lisans'a başladı ve 2005 yılında bu programdan mezun oldu. 2005 yılında Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

Adres:
Erciyes Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
38039 Melikgazi
Kayseri