

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ



**Impulsive Diferansiyel Denklemler ile Popülasyon Modellerinin Kararlılık
Analizi**

Proje No:FYL-2014-5122

Proje Türü
Yüksek Lisans Tez Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. Fatma Bozkurt
Eğitim Fakültesi/ İlköğretim Bölümü

Araştırmacılar:
Yrd. Doç. Dr. Fatma Berna Benli
Eğitim Fakültesi/ İlköğretim Bölümü

YL Sümeyye Atasoy
Fen Bilimleri Enstitüsü/ Matematik

Ocak 2013

KAYSERİ

TEŞEKKÜRLER

“Impulsive Diferansiyel Denklemler ile Popölasyon Modellerinin Kararlılık Analizi” isimli tezin ve yüksek lisans projesinin araştırma sürecinde başarılı sonuçlar elde etmemizi sağlayan Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi’ne teşekkür ederiz.

Bu çalışma FYL-2014-5122 proje kodu ile BAP birimi tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	5
ABSTRACT	6
1. GİRİŞ	7
2. İMPULSİVE DİFERANSİYEL DENKLEMLİ BAKTERİ POPÜLASYONUNUN SALINIMLILIĞI VE KARARLILIK ANALİZİ	12
3. GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN MATEMATİKSEL MODELİ VE KARARLILIK ANALİZİ	25
4.KAYNAKLAR	40

ÖZET

Impulsive diferansiyel denklemler, biyoloji, biyo-teknoloji, tıp bilimi, ekoloji bilimi gibi alanlarda faydalı matematiksel araçlardır.

Birçok biyolojik olaylar için sürekli zaman diliminden ziyade anlık darbeleri açıklayabilecek model gereksinimi duyulmaktadır. Doğanın belirli sebeplere bağlı değişimi, bir popülasyonun dinamik davranışını da etkilemektedir. Çevrede görülen periyodik değişimlerin etkileri, popülasyonu etkilemekte ve bu çevre olaylarındaki değişimler popülasyonun büyümesine veya yok olmasına sebep olmaktadır.

Bu çalışmada, öncelikle impulsive diferansiyel denklemler ve impulsive delay diferansiyel denklemler ile ilgili bazı çalışmalar incelenecek, bunların tek tür popülasyonlara uyarlamaları analiz edilecektir. Daha sonraki aşamalarda, impulsive lojistik diferansiyel denklemler oluşturulacak ve bu denklemlerin çözümlerinin belirli koşullar altında global çekiciliği irdelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Impulsive diferansiyel denklemler, global kararlılık, lojistik denklemler, popülasyon dinamiği

ABSTRACT

Impulsive differential equations are important mathematical tools in biology, biotechnology, medicine and in ecology.

For many biological phenomena in constructing a mathematical model the need is to use impulsive time instead of continuous time. Some specific changes in the environment are also changing the population density of the species. The periodic affects in the environment is influencing the population so that it either increases or goes to an extinction case.

In this study, firstly we investigate impulsive differential equations and impulsive delay differential equations. Thereafter, we studied on impulsive models on single species. Finally, we construct impulsive logistic equations to explain the global behavior of a single and multi population under spesific conditions.

Anahtar Kelimeler: Impulsive diferantial equations, global stability, logistic equations, population dynamics

1. GİRİŞ

Impulsive (anlık darbeleri) diferansiyel denklemler, biyoloji, optimal kontrol, mekanik, biyo-teknoloji, tıp bilimi, ekoloji bilimi, ekonomi bilimi gibi alanlarda gerçek süreç ve olayları açıklayan faydalı matematiksel araçlardır.

Birçok biyolojik olaylar için sürekli zaman diliminden ziyade anlık darbeleri açıklayabilecek model gereksinimi duyulmaktadır. Doğanın belirli sebeplere bağlı değişimi, bir popülasyonun dinamik davranışını da etkilemektedir. Özel olarak, çevrede görülen periyodik değişimlerin etkileri (seleksiyon, iç çekişme, simbiyosis vb.), türün popülasyonunu etkilemekte ve bu çevre olaylarındaki değişimler popülasyonun büyümesine veya yok olmasına sebep olmaktadır. Doğada yaşanan periyodik değişimler (mevsim, kıtlık vb), impulsive diferansiyel denklemler ve gecikmeli impulsive diferansiyel denklemlerin önemini artırmıştır. Çünkü, periyodik değişimleri sabit kabul eden sabit katsayılı diferansiyel denklem modelleri, doğa olaylarını açıklamada yetersiz kalmıştır. Impulsive diferansiyel denklemlerde sabit katsayı yerine periyodik fonksiyonların yer alması ve bununla birlikte çevreden kaynaklanan anlık etkilerin impulsive fonksiyonlarla açıklanması, popülasyon modelinde söz konusu eksikliklerin giderilmesine yol açmıştır.

Dinamik fiziksel süreçlerin matematiksel modellemelerinin gelişimi, doğa ve içinde yaşadığımız gerçek dünya anlayışımızın gelişiminde büyük bir önemi olmuştur. Sir Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibnitz tarafından yapılan diferansiyel ve integral hesaplamalarına yönelik araştırmalardan beri diferansiyel denklemler, fizik, biyoloji ve sosyal bilimdeki problemlerin geniş bir yelpazede incelenmesine yardımcı olmuştur. Mekanikteki çeşitli problemleri çözen Jacob ve Johann Bernoulli, diferansiyel denklemler üzerine çalışma yapan matematikçilerdendir. Johann Bernoulli'nin öğrencisi olan ve bütün matematikçilerin en büyüklerinden biri olarak kabul edilen Leonhard Euler'in de diferansiyel denklem araştırmasının ilerlemesinde önemli bir payı olmuştur [1].

Son 300 yıl içinde çalışmaların çoğu, yapılan geniş kapsamlı uygulamalar tarafından doğrulanan adi diferansiyel denklemler üzerine yoğunlaşmıştır. Bu denklemlerin çözümlerinin nitel özelliklerinin analizi, büyük bir öneme sahip olmuştur. Bu da bazı problemler için farklı bir denklem sistemini gerekli kılmıştır. Böylece impulsive (ani darbeleri) diferansiyel denklemler adına ilk çalışmalar başlamıştır [2].

Ani darbeleri etkileri içeren diferansiyel denklemler anlamına gelen impulsive diferansiyel denklemler, aşılama, birleşik zararlı organizma denetimi, hastalığın kemoterapi tedavisi gibi

alanları kapsayan popölasyon dinamiği, fizik, kimyasal teknoloji, ekonomi, mühendislik, biyolojik ve ekolojik sistemler, biyo-teknoloji, endüstriyel robot, optimal kontrol gibi bir takım gerçek dünya problemlerinin gözlemlenen gelişimlerinin doğal bir tanımı olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca impulsive diferansiyel denklemler üzerine birçok iyi monografiler yazılmıştır. Uygulamalı bilimlerde incelenen çoğu süreçler, diferansiyel denklemler tarafından temsil edilir. Bununla birlikte, darbe etkilerine maruz kalan mekanik sistemlerde veya kalp atışı, kan akışı, popölasyon dinamiği, radyofizik, farmakokinetik ve biyoteknoloji problemlerinde ani değişikliği açıklama gereksinimi duyulmaktadır. Bu tür süreçlerin uygun matematiksel modelleri darbe etkilerine maruz kalan diferansiyel denklem sistemleri ile temsil edilir [3-5].

Kısa zamanlı pertürbasyon ile gerçek süreçlerin gelişimini matematiksel olarak açıklamak için bazen pertürbasyon sürelerini ihmal etmek ve ani olan bu pertürbasyonları göz önüne almak uygun olandır. Bunun için süreksiz yörüngeli dinamik sistemler veya impulsive diferansiyel denklemler uygulanmalıdır.

Bir türün popölasyon dinamiği dikkate alındığında, bu popölasyonların zamanın bazı anlarında ani değişikliğe uğradığı görölmektedir. Belirli bir müdahale veya çevre olaylarına bağlı olarak popölasyonda meydana gelen bu değişiklikler belirli zaman aralıklarındaki darbeler veya belirli olmayan zaman aralıklarında darbeler olarak görölmektedir. Bu etkenlerin ihmal edilip incelenen popölasyon modelleri gerçek biyolojik süreci açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu süreçleri açıklamak için impulsive diferansiyel denklemler şeklindeki modellemeler daha uygun düşmektedir.

İmpulsive diferansiyel denklemler çoğu fiziksel olayın matematiksel modellemesini sağladığından dolayı son yıllarda bilim ve mühendislikte büyük ilgi görmüştür. Popölasyon gelişim modellerini ve uzay aracı manevralarını içeren örnekler incelenen konularda görölmektedir. İmpulsive diferansiyel denklemler teorisine dayanan impulsive kontrol, kaotik sistemleri kontrol ederek yeni bir önem kazanmıştır. İmpulsive otomatik kontrol sistemler ve impulsive hesaplama sistemler, fonksiyonel amaçlarından kaynaklanan yapılarındaki farklılık ve teknik problemlerdeki uygulama alanlarındaki geniş kapsamından dolayı son yıllarda süreksiz yörüngeli dinamik sistemlere ilgi artmıştır [6].

İmpulsive diferansiyel denklemler teorisi diferansiyel denklemlerin yeni ve önemli bir alanıdır. Son yıllarda bu teoride büyük gelişmeler görölmüştür. Bu teorinin önemine rağmen teorinin gelişimi, impulsive diferansiyel denklemlerin belli özellikleri sağlaması gerektiğinden dolayı oldukça yavaş ilerlemektedir.

Bir impulsive diferansiyel denklem üç bileşenden oluşur. Bunlar;

1-) Darbeler arasındaki sistemin durumunu kontrol eden sürekli-zamanlı bir diferansiyel denklem.

2-) Darbenin meydana geldiği andaki sıçrama fonksiyonu olarak tanımlanan bir darbe sıçramasını modelleyen impulsive denklemi.

3-) Darbe denkleminin aktif olduğu sıçrama hareketlerinin bir dizisi olarak tanımlanan bir sıçrama oluşumu.

Matematiksel olarak bu denklem,

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq \tau_k, \quad t \in J \quad (1.1.a)$$

$$\Delta x(\tau_k) = I_k(x(\tau_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.1.b)$$

formunu alır. İmpulsive diferansiyel denklemler, sıçrama anlarının belirlenmesi ile değişim anlarındaki biçimine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

(a) Darbe etkisinin sabit zamanlı olduğu impulsive diferansiyel denklemler (sıçrama anları sabit)

(b) Darbe etkisinin sabit zamanlı olmadığı impulsive diferansiyel denklemler (sıçrama anları belirli mekan-zaman ilişkisinin sağlandığı anlarda oluşu)[7].

İmpulsive delay diferansiyel denklemler teorisi henüz tam bir gelişme gösterememiştir. Bu teorinin gelişimine bakıldığında bir takım zorlukların var olduğu görülebilir. Örneğin; delay diferansiyel denklemlerin klasik teorisinde, R^n de $x(t)$ fonksiyonunun sürekliliğinin R^n 'de x_t fonksiyonelinin sürekliliği anlamına gelmesi, bu denklemin çözümlerinin varlığını belirlemede önemli bir rol oynar. Ayrıca, eğer $x(t)$ fonksiyonu impulsive diferansiyel denklemlerin çözümlerine özgü bir özellik olan parçalı süreklilik özelliğini sağlıyorsa, x_t fonksiyonelinin parçalı sürekli olmak zorunda değildir. Bu nedenle $f(t, \psi)$ fonksiyonu iki değişkende de sürekli olsa bile, $x(t)$ nin parçalı sürekli olduğu anda $f(t, x_t)$ bileşim fonksiyonu hakkında herhangi bir şey söylenemez.

1992 yılında Gopalsamy [5] bir türün logaritmik modelini

$$\frac{dx}{dt} = x(t)[\lambda(t) - a_1(t)\ln x(t) - a_2(t)\ln x(t - \tau(t))] \quad (1.2)$$

şeklinde tasarlamış ve bu denklemin periyodik çözümlerinin varlığını incelemiştir. Burada $\lambda(t), a_1(t), a_2(t), \tau(t) \in C([0, \infty), [0, \infty))$ pozitif ω – periyodik fonksiyonlar ve $\omega > 0$ dır. Fakat yukarıda anılan çevre olaylarından kaynaklanan anlık darbeler göz önüne alındığında popülasyon gibi bir biyolojik olayı açıklamak için (1) diferansiyel denkleme impulsive koşulların ilave edilmesi ile elde edilen (2) denklemi daha gerçekçi sonuçlar verecektir:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)[\lambda(t) - a_1(t)\ln x(t) - a_2(t)\ln x(t - \tau(t))], & t \neq t_k \\ x(t_k^+) = e^{1+b_k}x(t_k), & k \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases} \quad (1.3)$$

[14]'deki çalışmada, (2) denklemin global çekici periyodik çözümlere sahip olduğu görülmüştür. Global çekicilik için elde edilen koşullar, popülasyonda yok olma gibi bir dinamik sürecin var olmadığını göstermektedir.

S.H. Saker ve J.O. Alzabut [9], lineer olmayan bir delay (gecikmeli) impulsive diferansiyel denklem göz önüne almışlardır. Dikkate alınan model bir hücre popülasyonuna karşılık gelmektedir ve daha önceleri Nazarenko [13] tarafından bir diferansiyel denklem modeli olarak tasarlanmış ve incelenmişti. Bu çalışmada Saker ve Alzabut impulsive diferansiyel denklemin periyodik çözümlerin varlığı, global çekiciliği ve salınımlılığı ile ilgili koşullar elde edilmiştir. Daha sonra S.H. Saker ve J.O. Alzabut [10], lineer olmayan gecikmeli impulsive diferansiyel denklem şeklinde periyodik katsayılı bir konak-makroparazit modeli incelemişlerdir. Bu çalışmada, pozitif periyodik çözümlerin varlığı için yeter koşullar elde edilmiştir.

J. O. Alzabut ve T. Abdeljawad [14], referans [5]'deki çalışmaya daha genel bir bakış açısı sunmak amacıyla bir impulsive gecikmeli logaritmik popülasyon modeli oluşturmuşlardır.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t)[\lambda(t) - a_1(t)\ln x(t) - a_2(t)\ln x(t - \tau(t))], & t \neq t_k \\ x(t_k^+) = e^{1+b_k}x(t_k), & k \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Bu denklemde $x(t) = e^{y(t)}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -a_1(t)y(t) - a_2(t)y(t - \tau(t)) + \lambda(t), & t \neq t_k \\ y(t_k^+) = (1 + b_k) y(t_k), & k \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases} \quad (1.5)$$

denklemini elde edilir. Yapılan çalışmada (3) denklemin periyodik çözümlerin varlığı ve asimptotik çekiciliği için koşullar elde edilmiştir. Bu sonuçlar aynı zamanda (2) denklemini için koşulları vermektedir.

(2) ve (3) denklemleri için söz konusu incelemeleri yapmak amacıyla aşağıdaki koşulların mevcut olması gerekmektedir. Bunlar;

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ olacak şekilde $0 < t_1 < t_2 < \dots$ sabit impulsive noktalarıdır.
- (ii) $a_1(t), a_2(t), \tau(t), \lambda(t) \in C([0, \infty), [0, \infty))$ pozitif fonksiyonlardır
- (iii) $b_k > -1, k \in \mathbb{N}$ olacak şekilde $\{b_k\}$ bir reel dizidir.
- (iv) $a_1(t), a_2(t), \tau(t), \lambda(t)$ ve $\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)$, ω - periyodik fonksiyonlardır. Burada $\omega > 0$ dir.
- (v) $\phi(t) \in C([-\tau, 0], [0, \infty))$ dir.

Bu proje çalışmasında, impulsive diferansiyel denklemler ve impulsive delay diferansiyel denklemler ile ilgili bazı çalışmalar incelenecek, bunların tek tür popülasyonlara uyarlamaları analiz edilecek ve benzer denklem modelleri oluşturularak incelenecektir.

2. İMPULSİVE DİFERANSİYEL DENKLEMLİ BAKTERİ POPÜLASYONUNUN SALINIMLILIĞI VE KARARLILIK ANALİZİ

Bu kısımda, (2.1) impulsive gecikmeli lojistik denklemini inceleyeceğiz. $t \neq t_k$ ve $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} x'(t) = r(t)x(t)\{1 - \alpha(t)x(t) - \beta_0(t)x(t) - \beta_1(t)x(t - \tau(t))\} \\ x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k^-) \end{cases} \quad (2.1)$$

diferansiyel denkleminde $r(t), \alpha(t), \beta_0(t), \beta_1(t) \in C([0, \infty), [0, \infty))$ olup pozitif ω perioduna sahip çözümler ve $\omega > 0$ dır. Bu çalışmada, (2.1) lojistik popülasyon modelinin global çekici periodic çözümleri incelenilecektir. Elde edilen sonuçlar bir bakteri popülasyonunun yok oluşu ile ilgili koşulları verecektir. Ayrıca, $x^*(t)$ pozitif periodic çözümünü civarında bütün çözümlerin salınımlılığı ile ilgili koşullar elde edilecektir.

$A(t) = r(t)\alpha(t) + r(t)\beta_0(t)$ ve $B_1(t) = r(t)\beta_1(t)$ olmak üzere (2.1) denklemi $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ için

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\{r(t) - A(t)x(t) - B_1(t)x(t - \tau(t))\}, t \neq t_k, \\ x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k^-), \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) için başlangıç koşullar

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \quad (2.3)$$

olup $\tau = \max_{t \in [0, \omega]} \tau(t)$ dır. (2.2) ve (2.3)'ten aşağıdaki maddeler yazılabilir:

(A1) $0 < t_1 < t_2 < \dots$ impulsive sabit noktalardır öyle ki $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k$ dır.

(A2) $r(t), \alpha(t), \beta_0(t), \beta_1(t) \in C([0, \infty), [0, \infty))$ pozitif fonksiyonlardır.

(A3) $\{b_k\}$ bir reel dizi olup $b_k > -1, k \in \mathbb{N}$.

(A4) $r(t), \alpha(t), \beta_0(t), \beta_1(t)$ ve $\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)$, ω -periyodik fonksiyonlardır öyle ki $\omega > 0$ dır.

Tanım 2.1.[14] Bir $x \in ([-\tau, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonuna (2.2)'nin $[-\tau, \infty)$ aralığındaki çözümüdür denir eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa:

(i) $x(t)$, $(0, t_1]$ ve $(t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$ aralıklarında mutlak sürekli

(ii) Herhangi bir t_k , $k \in \mathbb{N}$ için $x(t_k^+)$ ve $x(t_k^-)$ mevcuttur. Ayrıca $x(t_k^-) = x(t_k)$ olup $x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t)$ and $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ dir.

(iii) $x(t)$, (2.2) difreansiyel denklemini $[0, \infty) - \{t_k\}$ aralığında hemen hemen her yerde sağlar ve her $t = t_k, k \in \mathbb{N}$ impulsive koşulu mevcuttur.

Yukarıdaki koşullar altında ani darbeleri olmayan gecikmeli diferansiyel denklemini inceleyelim.

$$\bar{A}(t) = \prod_{0 < t_k < t - \omega} (1 + b_k) A(t) \text{ ve } \bar{B}_1(t) = \prod_{0 < t_k < t - \omega} (1 + b_k) B(t)$$

olmak üzere başlangıç koşul

$$y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0] \quad (2.4)$$

şeklinde alınan

$$y'(t) = y(t) \left(r(t) - \bar{A}(t)y(t) - \bar{B}_1(t)y(t - \tau(t)) \right) \quad (2.5)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın.

Tanım 2.2 Kabul edelim ki $u(t)$ ve $u^*(t)$, (2.2) denkleminin $[-\tau, \infty)$ aralığındaki çözümleri olsun. $u^*(t)$ çözümüne $u(t)$ 'ye asimptotik çekicidir denir eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} [u(t) - u^*(t)] = 0$ şartı sağlanıyorsa. Ayrıca, $u^*(t)$ 'ye global çekicidir denir, eğer $u^*(t)$, (2.2)'deki bütün çözümlere asimptotik kararlı ise.

Tanım 2.3 [10] (2.2)'nin bir $u(t)$ çözümüne $u^*(t)$ civarında salınımlıdır denir eğer $(u(t) - u^*(t))$ metriği sıfır ise. Aksi taktirde $u(t)$ salınımlı değildir. Eğer $u^*(t) = 0$ ise, $u(t)$ sıfır civarında salınımlıdır.

Lemma 2.1 Kabul edelim ki (A1)-(A4) sağlansın. Bu durumda

(i) Eğer $y(t)$, $[-\tau, \infty)$ üzerinde (2.5)'in bir çözümü ise $[-\tau, \infty)$ aralığı üzerinde (2.2)'nin çözümü $x(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y(t)$ dir.

(ii) Eğer (t) , $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.2)'nin bir çözümü ise $[-\tau, \infty)$ 'de (2.59) denkleminin bir çözümü $y(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t)$ dir.

Proof.

(i) Kabul edelim ki $y(t)$, $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.5) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) = \prod_{0 < t_k < t - \omega} (1 + b_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x'(t) &= \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y'(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) \left(y(t) \left(r(t) - \bar{A}(t)y(t) - \bar{B}_1(t)y(t - \tau(t)) \right) \right) \\ &= y(t) \left(\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) r(t) - \bar{A}(t) \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y(t) - \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) \bar{B}_1(t) y(t - \tau(t)) \right) \\ &= y(t) \left(\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) r(t) - \bar{A}(t)x(t) - \bar{B}_1(t)x(t - \tau(t)) \right) \\ &= x(t) \left(r(t) - A(t)x(t) - B_1(t)x(t - \tau(t)) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $x(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y(t)$ çözümünün (2.2) denkleminin $[0, \infty) - \{t_k\}$ aralığının hemen hemen her yerde sağladığını göstermektedir. Diğer taraftan, her $t = t_k$,

$$k \in \mathbb{N} \text{ için } x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \prod_{0 < t_j < t} (1 + b_j) y(t) = \prod_{0 < t_j \leq t} (1 + b_j) y(t) \text{ ve}$$

$$x(t_k) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y(t) \text{ olup } k \in \mathbb{N} \text{ için } x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k^-) \text{ dir.}$$

(ii) Kabul edelim ki $x(t)$, $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.2) denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y'(t) &= \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x'(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t) \left(r(t) - A(t)x(t) - \right. \\ &\quad \left. B_1(t)x(t - \tau(t)) \right) \\ &= x(t) \left(\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} r(t) - \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} A(t)x(t) - \prod_{0 < t_k < t} (1 + \right. \\ &\quad \left. b_k)^{-1} B_1(t)x(t - \tau(t)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(t) \left(\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} r(t) - A(t)y(t) - B_1(t)y(t - \tau(t)) \right) \\
&= \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t) \left(r(t) - \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) A(t)y(t) - \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) B_1(t)y(t - \tau(t)) \right) \\
&= y(t) \left(r(t) - \bar{A}(t)y(t) - \bar{B}_1(t)y(t - \tau(t)) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $y(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t)$ ifadesinin $[0, \infty) - \{t_k\}$ aralığının hemen hemen her yerinde (2.5) denklemini sağladığını verir.

Lemma 2.2. Kabul edelim ki $x(t)$ ve $x^*(t)$, $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.2) denkleminin pozitif çözümleri olsun. Eğer $x^*(t)$, (2.2)'nin bütün çözümlerine global çekici ise bu taktirde y^* da (2.5)'in bütün $y(t)$ çözümlerine global çekicidir. .

İspat. $x^*(t)$, (2.2) denkleminin bütün $x(t)$ çözümlerine global çekici olsun. Tanım 2.2'den $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x^*(t)] = 0$ olacaktır. Lemma 2.1/(i)'den ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x^*(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) [y(t) - y^*(t)] = 0$$

yazılabilir. Bu ise y^* 'ın (2.5) denkleminin bütün $y(t)$ çözümleri için global çekici olduğunu verir.

Bu kısımda, (2.2) denkleminin bir tek ω -periyodik $x^*(t)$ çözümünün olduğunu ispatlayacağız. Daha sonra $x^*(t)$ 'nin global çekiciliği için yeter koşullar incelenilecektir. (2.2) denkleminin $x^*(t)$ civarında lineerleştirilmesiyle

$$\begin{cases} u'(t) = (r(t) - 2A(t)x^*(t) - B_1(t)x^*(t))u(t) - B_1(t)x^*(t)u(t - \tau(t)), t \neq t_k, \\ u(t_k^+) = (1 + b_k)u(t_k^-) + b_k x^*(t_k^-), \end{cases} \quad (2.6)$$

yazılabilir öyle ki burada $u(t) = x(t) - x^*(t)$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$,

$A(t) = r(t)\alpha(t) + r(t)\beta_0(t)$, $B_1(t) = r(t)\beta_1(t)$ ve $x^*(t) = x^*(t - \tau(t)) = x^*(t_k^-) = x^*(t_k^+)$ olsun.

Benzer şekilde (2.5) denkleminin $y^*(t)$ civarında lineerleştirilmesi ile

$$v'(t) = (r(t) - 2\bar{A}(t)y^*(t) - \bar{B}_1 y^*(t))v(t) - \bar{B}_1(t)y^*(t)v(t - \tau(t)), \quad (2.7)$$

denklemi elde edilir. Burada $v(t) = y(t) - y^*(t)$, $y^*(t) = y^*(t - \tau(t))$,

$\bar{A}(t) = \prod_{0 < t_k < t - \omega} (1 + b_k) A(t)$ ve $\bar{B}_1(t) = \prod_{0 < t_k < t - \omega} (1 + b_k) B(t)$ dir.

Lemma 2.3 Kabul edelim ki $2 \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y^*(t) = x^*(t)$ ve $x^*(t) = \frac{r(t)}{(A(t) + B_1(t))}$

mevcut olsun. Ayrıca, (A1)-(A4) şartları sağlansın.

(i) eğer (t) , (2.7) denkleminin $[-\tau, \infty)$ aralığındaki bir çözümü ise, bu taktirde

$$u(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) v(t) + \prod_{0 < t_k < t} (b_k) x^*(t)$$

ifadesi de $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.6) denkleminin bir çözümüdür.

(ii) Eğer $u(t)$, $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.6) denkleminin bir çözümü ise, bu taktirde

$$v(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k)^{-1} u(t) - \prod_{0 < t_k < t} (b_k) y^*(t)$$

ifadesi de $[-\tau, \infty)$ aralığında (2.7) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. Lemma'nın ispatı uygulama olarak bırakılmıştır.

C_τ , $[-\tau, 0]$ üzerinde tanımlı sürekli $\mathbb{R}^n$ değerli fonksiyonların Banach uzayını gösterebiliriz.

Burada $\phi \in C_\tau$ olmak üzere $\|\phi\| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} |\phi(t)|$ dir. Ayrıca, görüntüsü $[-\tau, b]$, $b > 0$ ve $0 \leq t < b$ olmak üzere verilen bir z fonksiyonu $z_t(\theta) = z_t(t + \theta)$ olsun. (2.8) gecikmeli diferansiyel denklem

$$z'(t) = L(t, z_t) + f(t, z_t) \quad (2.8)$$

şartlarını sağlar:

(B1) $\|\phi\| \rightarrow \infty$ için $\frac{|f(t, \phi)|}{\|\phi\|} \rightarrow 0$, t 'de düzgündür.

(B2) Sabit bir t için $L(t, \phi), f(t, \phi) \in C([0, \infty) \times C_\tau, \mathbb{R}^n)$ ve L de ϕ 'de lineerdir.

(B3) L ve f, t 'ye göre her $(t, \phi) \in [0, \infty) \times C_\tau$ için ω ω -periyodiktir.

$\Omega(t), \phi: [g(t), t] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyona sahip ve $\|\phi\| = \sup_{s \in [g(t), t]} |\phi(s)|$ olmak üzere bir Banach uzayı olsun. Burada $g \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ azalmayan bir fonksiyon olup $t \geq 0$ için $g(t) \leq t$ ve $t \rightarrow \infty$ için $g(t) \rightarrow \infty$ dir.

Aşağıdaki koşullar altında

$$p'(t) = \beta(t)p(t) + G(t, p(\cdot)), \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın:

(C1) $\beta: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan ve parçalı sürekli bir fonksiyondur,

(C2) (t, ϕ) , her bir $t \geq 0$ için $\phi \in \Omega(t)$ 'nin bir fonksiyoneliidir öyle ki

$$-\beta(t)M(\phi) \leq G(t, \phi) \leq \beta(t)M(-\phi), \quad (2.10)$$

ve $M(\phi) = \max \{0, \sup_{s \in [g(t), t]} |\phi(s)|\}$ dir.

Teorem 2.1 [12] (C1) ve (C2) koşulları sağlansın. Eğer

$$\int_0^\infty \beta(s)ds = \infty \quad (2.11)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \beta(s)ds < \infty \quad (2.12)$$

ise, bu taktirde (2.9), $t \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Burada $p(\cdot)$, $[g(t), t]$ aralığı üzerinde p 'nin kısıtlanışıdır.

(2.7) diferansiyel denkleminin homojen kısmı göz önüne alınsın öyle ki

$$v'(t) = |\mathcal{A}(t)|v(t) + |\mathcal{B}(t)|v(t - \tau(t)), \quad (2.13)$$

ve

$$\mathcal{A}(t) = r(t) - 2\bar{A}(t)y^*(t) - \bar{B}_1 y^*(t) = \frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} > 0,$$

$$\mathcal{B}(t) = -\bar{B}_1(t)y^*(t) = -\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} < 0$$

olsun. Burada $\tau = \max_{t \in [0, \omega]} \tau(t)$ dır. Böylece,

$$|\mathcal{A}(t)| + |\mathcal{B}(t)| = \frac{r(t)B_1(t)}{(A(t)+B_1(t))} > 0 \quad (2.14)$$

ifadesinin bir aşikar çözüm olamayacağı açıktır.

Teorem 2.2 $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t), \tau(t) \in C([0, \infty), (0, \infty))$ fonksiyonları (2.14) sağlanacak şekilde ω -periyodik fonksiyonlar olsunlar. Eğer

$$\int_0^\omega |\mathcal{A}(t)| dt + \int_0^\omega |\mathcal{B}(t)| dt < 4 \quad (2.15)$$

ise, bu taktirde $[-\tau, \infty)$ üzerinde (2.13)'ün bir tek ω -periyodik çözüm aşikar olandır.

İspat. Kabul edelim ki $v(t)$, (2.13) 'ün aşikar olmayan ω -periyodik çözümü olsun. Bu taktirde, (2.13) denkleminin için

$$M = \max_{t \in [0, \omega]} v(t) > 0 \quad \text{and} \quad m = -\min_{t \in [0, \omega]} v(t) > 0,$$

yazılabilir öyle ki (2.14) koşulları sağlanıyor olsun. $t_* \in [0, \omega]$ ve $t^* \in [t_*, t_* + \omega]$ olup that $v(t_*) = m$ ve $v(t^*) = M$ dir.

(2.13) denkleminin t_* 'den t^* 'ye integrasyonunun alınmasıyla

$$\begin{aligned} M + m = v(t^*) - v(t_*) &= \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{A}(s)| v(s) ds + \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{B}(s)| v(s - \tau(s)) ds \\ &\leq M \left(\int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{A}(s)| ds + \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{B}(s)| ds \right) \end{aligned}$$

yazılabilir ki bu

$$1 + \frac{m}{M} \leq \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{A}(s)| ds + \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{B}(s)| ds \quad (2.16)$$

olduğunu verir. (2.13) denkleminin t^* 'den $t_* + \omega$ 'ya integrasyonunun alınmasıyla

$$\begin{aligned} M + m &= v(t_* + \omega) - v(t^*) = \int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{A}(s)| v(s) ds + \int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{B}(s)| v(s - \tau(s)) ds \\ &\leq m \left(\int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{A}(s)| ds + \int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{B}(s)| ds \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$\frac{M}{m} + 1 \leq \left(\int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{A}(s)| ds + \int_{t^*}^{t_* + \omega} |\mathcal{B}(s)| ds \right) \quad (2.17)$$

sonucuna ulaştırır. (2.16) ve (2.17)'den

$$4 \leq 2 + \frac{m}{M} + \frac{M}{m} \leq \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{A}(s)| ds + \int_{t_*}^{t^*} |\mathcal{B}(s)| ds$$

elde edilir ki bu sonuç hipotezimiz ile çelişir. Bu sebeple, (2.13)'ün tek ω -periyodik çözümü aşıkâr çözümdür.

$v(t) = y(t) - y^*(t)$ olduğundan

$$y(t) = v(t) + y^*(t), \quad (2.18)$$

yazılabilir öyle ki $y^*(t) \in C([0, \infty), (0, \infty))$ bir ω -periyodik pozitif fonksiyon olsun. (B1)-(B3) koşulları için Eq. (2.5) (veya Eq. (2.1)) bir tek ω -periyodik çözüme $y^*(t)$ (veya $x^*(t)$) sahiptir.

(A1)-(A4) koşulları sağlanmış olsun. Bu durumda

$$0 = \int_0^\omega \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} - \frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) dt = \int_0^\omega (\mathcal{A}(t) + \mathcal{B}(t)) dt < 4 \quad (2.19)$$

görülebilir.

Teorem 2.3. Kabul edelim ki (A1)-(A5) sağlansın. $t \geq 0$ olmak üzere eğer $\tau'(t) \leq 1$ ise, bu taktirde (2.5)'in tek ω -periyodik çözümü $y^*(t)$ global çekicidir.

İspat. $v(t) = y(t) - y^*(t)$ olmak üzere

$$\mathcal{A}(t) = r(t) - 2\bar{A}(t)y^*(t) - \bar{B}_1 y^*(t) = \frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} > 0$$

ve

$$\mathcal{B}(t) = -\bar{B}_1(t)y^*(t) = -\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} < 0$$

olup

$$v'(t) = \mathcal{A}(t)v(t) + \mathcal{B}(t)v(t - \tau(t)) \quad (2.20)$$

elde edilir. $\mathcal{A}(t) = \beta(t)$, $g(t) = t - \tau(t)$ ve $G(t, \phi) = \mathcal{B}(t)\phi(g(t))$ olsun. $\tau^{(t)} \leq 1$ koşulu altında g 'nin azalmayan bir fonksiyon olduğu görülür öyle ki $t \geq 0$ için $g(t) \leq t$ dir.

Ayrıca,

$$\int_0^\infty \beta(s) ds = \int_0^\infty \mathcal{A}(s) ds = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\omega \mathcal{A}(s) ds = \infty$$

ve

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \beta(s) ds &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau(t)}^t \mathcal{A}(s) ds = \int_{t-\tau}^t \mathcal{A}(s) ds \\ &\leq \tau \max_{s \in \mathbb{R}} \left(\frac{r(s)B_1(s)}{2(A(s)+B_1(s))} \right) < \infty. \end{aligned}$$

elde edilir. $M(\phi) = \max \{0, \sup_{s \in [t-\tau(t), t]} |\phi(s)|\}$ için

$$-\beta(t)M(\phi) = -\left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \max \{0, \sup_{s \in [t-\tau(t), t]} |\phi(s)|\}, \quad (2.21)$$

$$G(t, \phi) = - \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \phi(t - \tau(t)) \quad (2.22)$$

ve

$$\beta(t)M(-\phi) = \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \max \{0, \sup_{s \in [t-\tau(t), t]} |-\phi(s)|\} \quad (2.23)$$

yazılabilir. (2.21)-(2.23)'ten

$$\begin{aligned} -\beta(t)M(\phi) &= - \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \max \{0, \sup_{s \in [t-\tau(t), t]} |\phi(s)|\} \\ &\leq - \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \phi(t - \tau(t)) = G(t, \phi) \end{aligned} \quad (2.24)$$

ve

$$\begin{aligned} G(t, \phi) &= - \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \phi(t - \tau(t)) = \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) (-\phi(t - \tau(t))) \\ &\leq \left(\frac{r(t)B_1(t)}{2(A(t)+B_1(t))} \right) \max \{0, \sup_{s \in [t-\tau(t), t]} |-\phi(s)|\} = \beta(t)M(-\phi) \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.24) ve (2.25) birlikte dikkate alındığında, Teorem 2.2'den $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ yazılır. Bu ise $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*(t)$ sonucunu verir.

Lemma 2.4 (A1)-(A4) şartları mevcut olsun. Bu durumda (2.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır ancak ve ancak (2.3)'ün bütün çözümler salınımlıdır.

İspat. Kabul edelim ki (t) , $[-\tau, \infty)$ aralığında salınımlı olan bir çözüm olsun. Lemma 2.1.'den $x(t) = \prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) y(t)$ yazılabilir. Bu ise $x(t)$ 'nin (2.1) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. $\prod_{0 < t_k < t} (1 + b_k) > 0$ olduğundan $x(t)$ salınımlıdır ancak ve ancak $y(t)$ salınımlıdır.

Teorem 2.4 (A1)-(A4) şartları mevcut olsun. Ayrıca, Kabul edelim ki

$$V'(t) + \left(e^{(1-\varepsilon) \int_{t-\tau(t)}^t \bar{A}(s) y^*(s) ds} \right) \bar{B}_1(t) y^*(t) (1 - \varepsilon) V(t - \tau(t)) = 0 \quad (2.26)$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlı olsun. Bu durumda, (2.5)'in bütün $y^*(t)$ civarında salınımlıdır.

İspat. Çelişkiye düşmek için Kabul edelim ki (2.5) denkleminin bir $y(t)$ çözümü $y^*(t)$ civarında salınımlı olmasın. Bu durumda, $y(t) > y^*(t)$ ve $\varphi(t) > 0$ olduğu Kabul edilebilir, öyle ki

$$y(t) = y^*(t)e^{\varphi(t)} \quad (2.27)$$

dir. Yani, $y(t)$ 'nin $y^*(t)$ civarındaki salınımı $\varphi(t)$ 'nin sıfır civarındaki salınımı anlamına gelmektedir.

(2.27)'den $\bar{A}(t) = \prod_{0 < t_k < t-\omega} (1 + b_k) A(t)$ ve $\bar{B}_1(t) = \prod_{0 < t_k < t-\omega} (1 + b_k) B(t)$ olmak üzere

$$\varphi'(t) + \bar{A}(t)y^*(t)(e^{\varphi(t)} - 1) + \bar{B}_1(t)y^*(t)(e^{\varphi(t-\tau(t))} - 1) = 0, \quad (2.28)$$

dir . Dikkat edelim ki

$$\varphi(e^\varphi - 1) > 0 \text{ (} \neq 0 \text{ için)} \text{ ve } \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{e^\varphi - 1}{\varphi} = 1 \quad (2.29)$$

dir. (2.29)'dan, herhangi keyfi bir ε için $\delta > 0$ vardır öyle ki her $0 < \varphi < \delta$ için

$$(e^\varphi - 1) \geq (1 - \varepsilon)\varphi$$

yazılabilir. Öncelikle $t \rightarrow \infty$ için $\varphi(t) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. (2.28)'den

$$\varphi'(t) = -\bar{A}(t)y^*(t)(e^{\varphi(t)} - 1) - \bar{B}_1(t)y^*(t)(e^{\varphi(t-\tau(t))} - 1) < 0 \quad (2.30)$$

olduğu görülebilir. Böylece, $\varphi(t)$ azalan bir fonksiyondur ve böylece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \eta \in [0, \infty)$$

dir. Şimdi de $\eta = 0$ olduğunu ispatlayacağız. Eğer $\eta > 0$ ise, bu taktirde bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $t \geq T_\varepsilon$ için $\eta - \varepsilon < \varphi(t) < \eta + \varepsilon$ yazılabilir. Tekrar (2.30) incelendiğinde,

$$\varphi'(t) + \bar{A}(t)y^*(t)(e^{\eta-\varepsilon} - 1) + \bar{B}_1(t)y^*(t)(e^{\eta-\varepsilon} - 1) \leq 0 \quad (2.31)$$

elde edilir. $\bar{A}(t), \bar{B}_1(t)$ ve $y^*(t)$ fonksiyonları ω periyoduna sahip fonksiyonlar olduklarından $P(t) = \bar{A}(t)y^*(t)$ ve $Q(t) = \bar{B}_1(t)y^*(t)$ fonksiyonları da ω periyoduna sahip fonksiyonlar dır öyle ki

$$P_* = \min_{t \in [0, \omega]} P(t) \leq P(t) \leq \max_{t \in [0, \omega]} P(t) = P^*$$

ve

$$Q_* = \min_{t \in [0, \omega]} Q(t) \leq Q(t) \leq \max_{t \in [0, \omega]} Q(t) = Q^*$$

dir. Böylece,

$$\varphi'(t) \leq -P_*(e^{\eta-\varepsilon} - 1) - Q_*(e^{\eta-\varepsilon} - 1) \quad (2.32)$$

elde edilir. (2.32)'nin T_ε 'den t' ye integrasyonu $t \rightarrow \infty$ için $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, $\eta = 0$ dir ve $t \rightarrow \infty$ için $\varphi(t)$ sifıra yakınsar. (2.28)'deki sonuçtan $\varphi(t)$ 'nin

$$\varphi'(t) + \bar{A}(t)y^*(t)(1 - \varepsilon)\varphi(t) + \bar{B}_1(t)y^*(t)(1 - \varepsilon)\varphi(t - \tau(t)) \leq 0 \quad (2.33)$$

diferansiyel denkleminin bir pozitif çözümü olduğu söylenebilir.

$$\varphi(t) = e^{-(1-\varepsilon) \int_0^t \bar{A}(s)y^*(s)ds} W(t) \quad (2.34)$$

dönüşümünden faydalananarak $W(t)$ 'de

$$W'(t) + \left(e^{(1-\varepsilon) \int_{t-\tau(t)}^t \bar{A}(s)y^*(s)ds} \right) \bar{B}_1(t)y^*(t)(1 - \varepsilon)W(t - \tau(t)) \leq 0. \quad (2.35)$$

diferansiyel denklemin bir pozitif çözümü olur. [19]'daki Sonuç 3.2.2'den

$$V'(t) + \left(e^{(1-\varepsilon) \int_{t-\tau(t)}^t \bar{A}(s)y^*(s)ds} \right) \bar{B}_1(t)y^*(t)(1-\varepsilon)V(t-\tau(t)) = 0, \quad (2.36)$$

diferansiyel denkleminin öyle bir pozitif çözümü vardır ki $V(t) \geq W(t)$ şartını sağlar. Bu ise (2.26)'nın bütün pozitif çözümlerinin salınımlı olduğu iddiası ile çelişir. Böylece, (2.5) denkleminin her pozitif çözümü $y^*(t)$ civarında salınımlıdır. Diğer bir deyişle Lemma 2.4.'den (2.1)'in bütün pozitif çözümleri $x^*(t)$ civarında salınımlıdır.

3. GBM BEYİN TÜMÖRÜNÜN MATEMATİKSEL MODELİ VE KARARLILIK ANALİZİ

Glioblastoma multiforme (GBM), beyin tümörleri içerisinde ölümlere neden olan en tehlikeli kanser türüdür. GBM tedavisi için tipik bir yaklaşım, cerrahi müdahaleden sonra kemoterapi ve radyoterapiye baş vurulmasıdır [1]. Başta monoklonal kökenli bir tümör olarak tespit edilen GBM, zaman içerisinde farklı büyüme oranına ve ilaca karşı dirençli popülasyonlar üretmektedir. Bu durum ise tedavi süreci için müthiş bir engel teşkil etmektedir [2-5]. Matematiksel modelleme yaklaşımları, tümörlerin tedavi sürecinde laboratuvar çalışmalarını destekleyici farklı bakış açıları sunması nedeniyle büyük önem arz etmiş ve birçok araştırmada yer almıştır [6-16]. Bu düşünce doğrultusunda, model oluşturma çalışmaları incelendiğinde, tümör yoğunluğundaki (veya yoğunluklarındaki) artış ile ilaç etkisi gibi problemlerde diferansiyel denklemin (veya diferansiyel denklem sistemlerin) dikkate alındığı görülmüştür. Fakat, 1982 yılında Busenberg ve Cooke, sürekli ve ayrık zaman göz önüne alınacak şekilde hibrit denklemlere (veya sistemlere) odaklanılmasını sağlamışlardır [17]. Bu düşünceye göre, örtüşen jenerasyonlar (overlapping generation) için süreklilik (diferansiyel denklem) arz eden bir durum mevcut iken çevresel olayların etkinliği sürekli olmayabilir. Bu yaklaşımı GBM tümörü için uyarladığımızda, hassas tümör hücreleri belirli bir yoğunluğa ulaştıktan sonra dirençli tümör hücreleri üretmekte ve böylece model oluştururken tümörün evreleri dikkate alınmalıdır. Bununla birlikte, ilaç tedavisi de belirli zaman aralıklarında uygulanmaktadır ve böylece ilacın tümöre etkinliği de süreklilik arz etmemektedir. Bu ve benzeri faktörler, parçalı sürekli argümanlar gibi hibrit sistemlere odaklanılmasına yol açmıştır [18-20].

Bu çalışmada duyarlı ve dirençli popülasyonlara sahip GBM tümörünün global kararlılığı incelenmiştir. (3.1) parçalı argümanlı ve zamana göre gecikmeli diferansiyel denklem sistemi tasarlanmıştır:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = px(t) + r_1x(t)(R_1 - \alpha_1x(t) - \alpha_2x(\lfloor t - 1 \rfloor)) - \gamma_1x(t)y(\lfloor t - 1 \rfloor) - d_1x(t)x(\lfloor t \rfloor) \\ \frac{dy}{dt} = r_2y(t)(R_2 - \beta_1y(t) - \beta_2y(\lfloor t - 1 \rfloor)) + \gamma_1x(\lfloor t \rfloor)y(t) - d_2y(t)y(\lfloor t \rfloor) \end{cases} \quad (3.1)$$

olmak üzere $t \geq 0$, parametreler $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, p, d_1, d_2, R_1, R_2, r_1$ ve r_2 pozitif reel sayılar ve $\lfloor t \rfloor$ 'de $t \in [0, \infty)$ için tam değeri ifade etmektedir. p , dönüşüm parametresidir. R_1 ve R_2

sırasıyla duyarlı ve dirençli tümör popülasyonunun taşıma kapasitesini göstermektedir. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 lojistik denklemi oluşturan parametreler iken γ_1 , duyarlı hücreden dirençli hücreye dönüşüm katayısıdır. d_1 ve d_2 , ilacın etkisi ile tumor hücrelerine verilen zarara karşılık gelmektedir.

$t \in [n, n + 1)$ aralığında $t \rightarrow n + 1$ olmak üzere (3.1) denklem sistemi

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n) \cdot \{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - d_1 x(n)\}}{\{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - (\alpha_1 r_1 + d_1) x(n)\} \cdot \exp(-\{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - d_1 x(n)\}) + \alpha_1 r_1 x(n)} \\ y(n+1) = \frac{y(n) \cdot \{r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - d_2 y(n)\}}{\{r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - (\beta_1 r_2 + d_2) y(n)\} \cdot \exp(-\{r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - d_2 y(n)\}) + \beta_1 r_2 y(n)}, \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bundan sonra

$$\begin{cases} p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - d_1 x(n) \neq 0 \\ r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - d_2 y(n) \neq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

olduğu kabul edilecektir. (3.1) denkleminin çözümlerinin global davranışını incelemek için, bunun alt aralıklardaki çözümü olan (3.2) fark denklem sistemi dikkate alınacaktır. Hesaplamalar sonucunda, (3.2)'nin pozitif denge noktası

$$\mu = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{(p + r_1 R_1)(d_2 + \beta_1 r_2 + \beta_2 r_2) - r_2 R_2 \gamma_1}{(d_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_1 r_1)(d_2 + \beta_2 r_2 + \beta_1 r_2) + \gamma_1^2}, \frac{r_2 R_2 (d_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_1 r_1) + (p + r_1 R_1) \gamma_1}{(d_1 + \alpha_2 r_1 + \alpha_1 r_1)(d_2 + \beta_2 r_2 + \beta_1 r_2) + \gamma_1^2} \right), \quad (3.4)$$

şeklinde bulunur. Burada $\gamma_1 < \frac{(p + r_1 R_1)(d_2 + \beta_1 r_2 + \beta_2 r_2)}{r_2 R_2}$ olup

$$\begin{cases} A = p + r_1 R_1 - (\alpha_2 r_1 + d_1) \bar{x} - \gamma_1 \bar{y} > 0 \\ B = r_2 R_2 - (\beta_2 r_2 + d_2) \bar{y} + \gamma_1 \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

yazılsın. μ denge noktasının (3.2) civarında lineerleştirilmesi ile

$$\begin{cases} u_1 = \frac{(d_1 + \alpha_1 r_1) \exp(-A) - d_1}{\alpha_1 r_1} \\ u_2 = \frac{\alpha_2 (\exp(-A) - 1)}{\alpha_1} \\ u_4 = \frac{\gamma_1 (\exp(-A) - 1)}{\alpha_1 r_1} \end{cases} \text{ and } \begin{cases} v_1 = \frac{\gamma_1 (1 - \exp(-B))}{\beta_1 r_2} \\ v_3 = \frac{(\beta_1 r_2 + d_2) \exp(-B) - d_2}{\beta_1 r_2} \\ v_4 = \frac{\beta_2 (\exp(-B) - 1)}{\beta_1} \end{cases} \quad (3.6)$$

yazılabilir ki buradan (3.2)'nin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 - (u_1 + v_3)\lambda^3 + (u_1 v_3 - v_4 - u_2)\lambda^2 + (u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_4 v_1)\lambda + u_2 v_4 = 0. \quad (3.7)$$

elde edilir.

Teorem 3.1. $(\bar{x}, \bar{y})$, (3.2) denkleminin pozitif denge noktası olsun ve kabul edelim ki

$$\frac{\alpha_2 \beta_2 d_1 - \alpha_1 \beta_1}{\alpha_2^2 \beta_2 + \alpha_1^2 \beta_1} < r_1 < \frac{d_1}{\alpha_2 + \alpha_1}, \quad r_2 > \frac{d_2}{\beta_2 + \beta_1} \text{ and } \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} < d_1 < \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \beta_1}{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1} \quad (3.8)$$

şartları $\alpha_2 > \alpha_1$ ve $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\beta_1}{\beta_2}$ için sağlanmış olsun. Eğer

$$\ln\left(\frac{\alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 \beta_2 r_1 r_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_1 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + d_1 d_2}\right) < B < \ln\left(\frac{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2}{\alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + d_1 d_2}\right), \quad (3.9)$$

ise, bu taktirde pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. Jury Koşulundan (veya Schur-Cohn kriteri'nden [15]) pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlı olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

- (a) $p(1) = 1 - (u_1 + v_3) + (u_1 v_3 - v_4 - u_2) + (u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_4 v_1) + u_2 v_4 > 0$
- (b) $(-1)^4 p(-1) = 1 + (u_1 + v_3) + (u_1 v_3 - v_4 - u_2) - (u_1 v_4 + u_2 v_3 - u_4 v_1) + u_2 v_4 > 0$
- (c) $|u_2 v_4| < 1$

(a) ve (b)'den

$$1 + u_1 v_3 + u_2 v_4 > v_4 + u_2. \quad (3.10)$$

yazılabilir. (3.6) ve (3.10)'dan

$$1 + \left(\frac{(d_1 + \alpha_1 r_1) e^{-A} - d_1}{\alpha_1 r_1} \right) \left(\frac{(\beta_1 r_2 + d_2) e^{-B} - d_2}{\beta_1 r_2} \right) + \left(\frac{\alpha_2 (e^{-A} - 1)}{\alpha_1} \right) \left(\frac{\beta_2 (e^{-B} - 1)}{\beta_1} \right) > \frac{\beta_2 (e^{-B} - 1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_2 (e^{-A} - 1)}{\alpha_1} \quad (3.11)$$

dır. (3.11)'in düzenlenmesi ile $r_1 < \frac{d_1}{\alpha_2 + \alpha_1} < \frac{d_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, $r_2 > \frac{d_2}{\beta_2 + \beta_1}$ ve $\alpha_2 > \alpha_1$ olmak üzere

$$\ln \left(\frac{\alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 \beta_2 r_1 r_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_1 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + d_1 d_2} \right) < B < \ln \left(\frac{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2}{\alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + d_1 d_2} \right), \quad (3.12)$$

elde edilir. (c)'den

$$\frac{\alpha_2 (1 - e^{-A})}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2 (1 - e^{-B})}{\beta_1} < 1. \quad (3.13)$$

şeklinde olup $A > 0$ ve $B > 0$ dir. (3.129)'den

$$\frac{\beta_1 r_2 (d_1 - (\alpha_2 + \alpha_1) r_1)}{\alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 \beta_2 r_1 r_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2} < 1 - e^{-B} < \frac{\beta_1 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2}. \quad (3.14)$$

yazılır. (3.14) ve (3.13)'den

$$\frac{\alpha_2 \beta_2 (1 - e^{-A})(1 - e^{-B})}{\alpha_1 \beta_1} < \frac{\alpha_2 \beta_2 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1)(1 - e^{-A})}{\alpha_1 (\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2)} < 1 \quad (3.15)$$

elde edilir ki bu bizi

$$\frac{\alpha_2 \beta_2 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1)}{\alpha_1 (\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2)} - 1 < \frac{\alpha_2 \beta_2 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1)}{\alpha_1 (\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2)} e^{-A}$$

sonucuna ulaştırır. Yukarıdaki eşitsizliği incelediğimizde

$$\alpha_2 \beta_2 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1) - \alpha_1 (\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2 + \alpha_2 \beta_2 r_1 r_2 + \alpha_1 r_1 d_2 + \beta_1 r_2 d_1 + d_1 d_2) < \alpha_2 \beta_2 r_2 (d_1 - (\alpha_2 - \alpha_1) r_1) e^{-A} \quad (3.17)$$

elde edilir. $\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2} < d_1 < \frac{(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1}{\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_1}$ ve $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\beta_1}{\beta_2}$ olduğundan $\frac{\alpha_2\beta_2d_1-\alpha_1\beta_1}{\alpha_2^2\beta_2+\alpha_1^2\beta_1} < r_1 < \frac{d_1}{\alpha_2+\alpha_1}$ olmak üzere eşitsizliğin sol tarafı negatif elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2 $\{(x(n), y(n))\}_{n=0}^{\infty}$, (3.2) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Kabul edelim ki $n=0,1,\dots$ için

$$\begin{cases} \alpha_1 r_1 x(n) < p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - d_1 x(n) \\ \beta_1 r_2 y(n) < r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - d_2 y(n) \end{cases} \quad (3.18)$$

şartı mevcut olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar doğrudur.

i) (3.2) denklemin bütün pozitif çözümleri

$$x(n) \in \left(0, \frac{p+r_1 R_1}{\alpha_1 r_1}\right) \quad \text{ve} \quad y(n) \in \left(0, \frac{\alpha_1 R_2 r_1 r_2 + \gamma_1 (p+r_1 R_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2}\right) \quad (3.19)$$

aralığındadır.

ii) (3.2) denklem sisteminin çözümleri monoton artandır.

İspat. İspat okuyucuya bırakılmıştır.

Teorem 3.3. (3.2) denklem sistemi

$$F(x(n), y(n), x(n-1), y(n-1)) = \begin{cases} x(n+1) = f(x(n), y(n), x(n-1), y(n-1)) \\ y(n+1) = g(x(n), y(n), x(n-1), y(n-1)) \end{cases} \quad (3.20)$$

şeklinde yazılmış olsun. f ve g fonksiyonlarının x ve y 'ye göre birinci mertebeden kısmi türevleri $I \subset \mathbb{R}^+$ ve $f, g: V \subset (\mathbb{R}^4)^+ \rightarrow I \subset \mathbb{R}^+$ olmak üzere sürekli olsun. Üstelik Kabul edelim ki

$$\alpha_1 r_1 x(n) < p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(n-1) - \gamma_1 y(n-1) - d_1 x(n) \quad (3.20)$$

ve

$$\beta_1 r_2 y(n) < r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(n-1) + \gamma_1 x(n) - d_2 y(n), \quad (3.21)$$

sağlansın öyle ki $2\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_1, 2\beta_1 > \beta_2 > \beta_1$ ve $\gamma_1 < d_1$ dir. Eğer $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_1}, r_2 > \frac{d_2}{\beta_1}$,
 $x(n) < \frac{1}{\alpha_2 r_1}$ ve $y(n) < \frac{1}{\beta_1 r_2}$ olmak üzere

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \alpha_2 r_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\alpha_2 r_1 A x(n)} \right), \quad (3.22)$$

ve

$$\frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - \beta_2 r_2 y(n)} < B < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2 r_2 B y(n)} \right) \quad (3.23)$$

ise, bu taktirde (3.20) denklem sisteminin I’da 2’li devri yoktur.

İspat. Başlangıç koşullar

$$\begin{cases} s(2) = (x(1), y(1), x(0), y(0)), s(3) = (x(2), y(2), x(1), y(1)) \\ r(2) = (x(1), y(1), x(0), y(0)), r(3) = (x(2), y(2), x(1), y(1)), \end{cases} \quad (3.24)$$

olmak üzere bir 2’li devir

$$\begin{cases} s(2) = f(s(3)) = f(f(x(1), y(1), x(0), y(0))) \\ r(2) = g(r(3)) = g(g(x(1), y(1), x(0), y(0))) \end{cases} \quad (3.25)$$

şartını sağlamalıdır. Bu durumda $e \int_{s(2)}^{s(3)} (1 + \frac{\partial f}{\partial x}) dx \neq 0, \int_{s(2)}^{s(3)} (1 + \frac{\partial f}{\partial y}) dy \neq 0, \int_{r(2)}^{r(3)} (1 + \frac{\partial g}{\partial x}) dx \neq 0$ ve $\int_{r(2)}^{r(3)} (1 + \frac{\partial g}{\partial y}) dy \neq 0$ olmalıdır. Bu düşünce doğrultusunda aşağıdaki durumlar incelenmiştir:

I. $f(x(n), y(n), x(n-1), y(n-1))$ fonksiyonunun $x(n), x(n-1), y(n)$ ve $y(n-1)$ ’e göre kısmi türevleri alındığında, f ’in $x(n)$ ’e göre kısmi türevinden

$$1 + \frac{\partial f}{\partial x(n)} = \frac{1}{((A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A} + \alpha_1 r_1 x(n))^2} \\ \times \{(A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A} x(n)(2\alpha_1 r_1 - d_1) + (A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A}$$

$$\begin{aligned} & \left((A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A} - d_1 A x(n) \right) + \alpha_1 r_1 (x(n))^2 (\alpha_1 r_1 - d_1) \\ & + (A - \alpha_1 r_1 x(n))Ae^{-A} + (\alpha_1 r_1 + d_1)A x(n)e^{-A} \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_1}$ olduğundan, eğer

$$(A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A} - d_1 A x(n) > 0 \quad (3.27)$$

ise, bu taktirde $1 + \frac{\partial f}{\partial x(n)} > 0$ dir. (3.27) koşulundan $x(n) < \frac{1}{d_1}$ olmak üzere

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - d_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{d_1 A x(n)} \right), \quad (3.28)$$

elde edilir. F'in $x(n-1)$ 'e göre kısmi türevinden $1 + \frac{\partial f}{\partial x(n-1)} > 0$ vardır, eğer $2\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_1$ ve $x(n) < \frac{1}{\alpha_2 r_1}$ olmak üzere

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2} < A < \ln \left(\frac{\alpha_2 A}{\alpha_1 r_1 x(n)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right) \quad (3.29)$$

ve

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \alpha_2 r_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\alpha_2 r_1 A x(n)} \right) \quad (3.30)$$

koşulları mevcut ise. (3.29) ve (3.30) birlikte dikkate alındığında, $\alpha_2 > \alpha_1$ olmak üzere

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2} < \frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \alpha_2 r_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\alpha_2 r_1 A x(n)} \right) < \ln \left(\frac{\alpha_2 A}{\alpha_1 r_1 x(n)(\alpha_2 - \alpha_1)} \right) \quad (3.31)$$

sonucuna varılır. F'nin $y(n)$ 'ye göre kısmi türevinden $1 + \frac{\partial f}{\partial y(n)} = 1 > 0$ elde edilir. Son olarak f'nin $y(n-1)$ 'e göre kısmi türevi alındığında

$$1 + \frac{\partial f}{\partial y(n-1)} = \frac{1}{\left((A - \alpha_1 r_1 x(n))e^{-A} + \alpha_1 r_1 x(n) \right)^2}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ (A - \alpha_1 r_1 x(n)) e^{-A} \left((A - \alpha_1 r_1 x(n)) e^{-A} - \gamma_1 A x(n) \right) + \alpha_1 r_1 (x(n))^2 (\alpha_1 r_1 - \gamma_1) \right. \\ & \left. + (A - \alpha_1 r_1 x(n)) e^{-A} x(n) (2\alpha_1 r_1 - \gamma_1) + \gamma_1 A x(n) e^{-A} \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

yazılabilir. $x(n) < \frac{1}{\gamma_1}$ ve $r_1 > \frac{\gamma_1}{2\alpha_1}$ olduğundan, eğer

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \gamma_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\gamma_1 A x(n)} \right), \quad (3.33)$$

ise, bu taktirde $1 + \frac{\partial f}{\partial y(n-1)} > 0$ dir. (3.28), (3.31) ve (3.33)'ten $\gamma_1 < d_1$, $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_2} > \frac{\gamma_1}{\alpha_2}$ ve $x(n) < \frac{1}{\alpha_2 r_1} < \frac{1}{d_1} < \frac{1}{\gamma_1}$ koşulları için

$$\frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \gamma_1 x(n)} < \frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - d_1 x(n)} < \frac{\alpha_1 r_1 x(n)}{1 - \alpha_2 r_1 x(n)} < A < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\alpha_2 r_1 A x(n)} \right) < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{d_1 A x(n)} \right) < \ln \left(\frac{A - \alpha_1 r_1 x(n)}{\gamma_1 A x(n)} \right) \quad (3.34)$$

elde edilir.

II. $g(x(n), y(n), x(n-1), y(n-1))$ fonksiyonunun $x(n)$, $x(n-1)$, $y(n)$ ve $y(n-1)$ 'e göre kısmi türevlerinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\partial g}{\partial y(n)} &= \beta_1 r_2 (y(n))^2 (\beta_1 r_2 - d_2) + (B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} y(n) (2\beta_1 r_2 - d_2) \\ &+ (B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} \left((B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} - d_2 B y(n) \right) + (\beta_1 r_2 + d_2) e^{-B} B y(n) \\ &+ B (B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B}, \end{aligned}$$

için, eğer $r_2 > \frac{d_2}{\beta_1}$ ve $y(n) < \frac{1}{d_2}$ ise, bu taktirde

$$\frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - d_2 y(n)} < B < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{d_2 B y(n)} \right) \quad (3.35)$$

olmak üzere $1 + \frac{\partial g}{\partial y(n)} > 0$ elde edilir.

g 'nin $y(n-1)$ 'e göre kısmi türevi

$$1 + \frac{\partial g}{\partial y(n-1)} = (B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} \left((B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} - \beta_2 r_2 B y(n) \right) \\ + \beta_1 r_2^2 y(n)^2 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2 r_2 e^{-B} B y(n) + (B - \beta_1 r_2 y(n)) e^{-B} y(n) r_2 (2\beta_1 - \beta_2),$$

olmak üzere $\beta_1 > \beta_2 > \beta_1$ ve $y(n) < \frac{1}{\beta_1 r_2}$ olduğundan, eğer

$$\frac{(\beta_2 - \beta_1) \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2} < B < \ln \left(\frac{\beta_2 B}{(\beta_2 - \beta_1) \beta_1 r_2 y(n)} \right) \quad (3.36)$$

ve

$$\frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - \beta_2 r_2 y(n)} < B < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2 r_2 B y(n)} \right), \quad (3.37)$$

ise, bu taktirde $1 + \frac{\partial g}{\partial y(n-1)} > 0$ dir. (3.36) ve (3.37)'den $\beta_2 > \beta_1$ olduğundan

$$\frac{(\beta_2 - \beta_1) \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2} < \frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - \beta_2 r_2 y(n)} < B < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2 r_2 B y(n)} \right) < \ln \left(\frac{\beta_2 B}{(\beta_2 - \beta_1) \beta_1 r_2 y(n)} \right). \quad (3.38)$$

bulunur. Ben zer şekilde $1 + \frac{\partial g}{\partial x(n)}$ ve $1 + \frac{\partial g}{\partial x(n-1)}$ için kısmi türevler incelenebilir. Son olarak (3.35) ve (3.38)'den $r_2 > \frac{d_2}{\beta_1} > \frac{d_2}{\beta_2}$ ve $y(n) < \frac{1}{\beta_1 r_2} < \frac{1}{d_2}$ olmak üzere

$$\frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - d_2 y(n)} < \frac{\beta_1 r_2 y(n)}{1 - \beta_2 r_2 y(n)} < B < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{\beta_2 r_2 B y(n)} \right) < \ln \left(\frac{B - \beta_1 r_2 y(n)}{d_2 B y(n)} \right),$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

$(\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı için (3.19) kabulüne ilave olarak aşağıdaki ek şartlara ihtiyaç duyulmaktadır.

i) f ve g , sırasıyla $\left(0, \frac{p+r_1 R_1}{\alpha_1 r_1}\right)$ ve $\left(0, \frac{\alpha_1 R_2 r_1 r_2 + \gamma_1 (p+r_1 R_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2}\right)$ aralığında tanımlı olsun.

ii) $f: \left(0, \frac{p+r_1 R_1}{\alpha_1 r_1}\right) \times \left(0, \frac{\alpha_1 R_2 r_1 r_2 + \gamma_1 (p+r_1 R_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2}\right) \rightarrow \left(0, \frac{p+r_1 R_1}{\alpha_1 r_1}\right)$ sürekli bir fonksiyondur.

iii) $g: \left(0, \frac{p+r_1 R_1}{\alpha_1 r_1}\right) \times \left(0, \frac{\alpha_1 R_2 r_1 r_2 + \gamma_1 (p+r_1 R_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2}\right) \rightarrow \left(0, \frac{\alpha_1 R_2 r_1 r_2 + \gamma_1 (p+r_1 R_1)}{\alpha_1 \beta_1 r_1 r_2}\right)$ sürekli bir fonksiyondur.

Sonuç 3.1. $(\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktası Teorem 3.1-Teorem 3.3 sağlıyor olsun. Bu durumda (3.2) sisteminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.4. (2.2) sisteminin bir pozitif çözümü $\{(x(n), y(n))\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. Kabul edelim ki $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_2}$ ve $r_2 > \frac{d_2}{\beta_2}$ olmak üzere

$$\alpha_1 r_1 x(2n) < p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - d_1 x(2n) < \ln \left(\frac{x(2n-1)}{x(2n)} \right) \quad (3.39)$$

ve

$$\beta_1 r_2 y(2n) < r_2 R_2 - \beta_2 r_2 y(2n-1) + \gamma_1 x(2n) - d_2 y(2n) < \ln \left(\frac{y(n-1)}{y(n)} \right) \quad (3.40)$$

şartları sağlansın. Eğer

$$x(2n) < \bar{x} < x(2n-1) \quad \text{ve} \quad y(2n) < \bar{y} < y(2n-1) \quad (3.41)$$

ise, bu taktirde (3.2) denklem sisteminin çözümleri sönümlü salınımlıdır.

İspat. (3.2) denklem sisteminden

$$\begin{aligned} & x(2n+1) - x(2n) \\ &= \frac{x(2n) \cdot \{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - (\alpha_1 r_1 + d_1)x(2n)\} \left(1 - e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - d_1 x(2n)\}}\right)}{\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - (\alpha_1 r_1 + d_1)x(2n)\} e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - d_1 x(2n)\}} + \alpha_1 r_1 x(2n)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

yazılabilir. (3.39)'dan $x(2n+1) > x(2n)$ ve $x(2n+1) < x(2n-1)$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$x(2n+3) > x(2n+2), x(2n+5) > x(2n+4), \dots$$

ve

$$\dots < x(2n+5) < x(2n+3) < x(2n+1) < x(2n-1)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi, $x(2n+2) - x(2n) = \frac{C_2}{D_2}$ yazılsın öyle ki

$$\begin{aligned} C_2 &= \{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\} \\ &\quad (x(2n+1) - x(2n)) \cdot e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}} \\ &\quad - \alpha_1 r_1 x(2n+1)x(2n) \left(1 - e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_2 &= \{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\} \cdot e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}} \\ &\quad + \alpha_1 r_1 x(2n+1) \left(1 - e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}}\right) \end{aligned}$$

dir.

Aşağıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} &p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1) \\ &> \square + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n-1) - \gamma_1 y(2n-1) - d_1 x(2n), \end{aligned} \quad (3.43)$$

düzenlemeler yapıldığında $x(2n-1) > x(2n)$, $y(2n-1) > y(2n)$ elde edilir.

$x(2n-1) > x(2n+1)$ olduğundan (3.43) eşitsizliğinden $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_2}$

$$\begin{aligned} &\alpha_2 r_1 (x(2n-1) - x(2n)) + \gamma_1 (y(2n-1) - y(2n)) - d_1 (x(2n+1) - x(2n)) \\ &> (\alpha_2 r_1 - d_1)(x(2n-1) - x(2n)) + \gamma_1 (y(2n-1) - y(2n)) \end{aligned} \quad (3.44)$$

dir. $C_2 > 0$ olduğunu göstermek için aşağıdaki eşitsizlik incelenmelidir:

$$\begin{aligned} &\{p + r_1 R_1 - (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_1)x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}x(2n+1) \\ &> x(2n)e^{-\{p+r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n+1)\}} \{p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) \\ &\quad - (d_1 + \alpha_1 r_1)x(2n+1)\}. \end{aligned}$$

Burada, $x(2n + 1) > x(2n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & p + r_1 R_1 - (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_1)x(2n) - \gamma_1 y(2n) - d_1 x(2n + 1) \\ & > p + r_1 R_1 - \alpha_2 r_1 x(2n) - \gamma_1 y(2n) - (d_1 + \alpha_1 r_1)x(2n + 1) \end{aligned}$$

ve

$$x(2n + 1) > \square(2n)e^{-\{p+r_1R_1-\alpha_2r_1x(2n)-\gamma_1y(2n)-d_1x(2n+1)\}}$$

dir. Böylece, $r_1 > \frac{d_1}{\alpha_2}$ olmak üzere $x(2n + 2) > x(2n)$ bulunur. Benzer şekilde $r_2 > \frac{d_2}{\beta_2}$ için

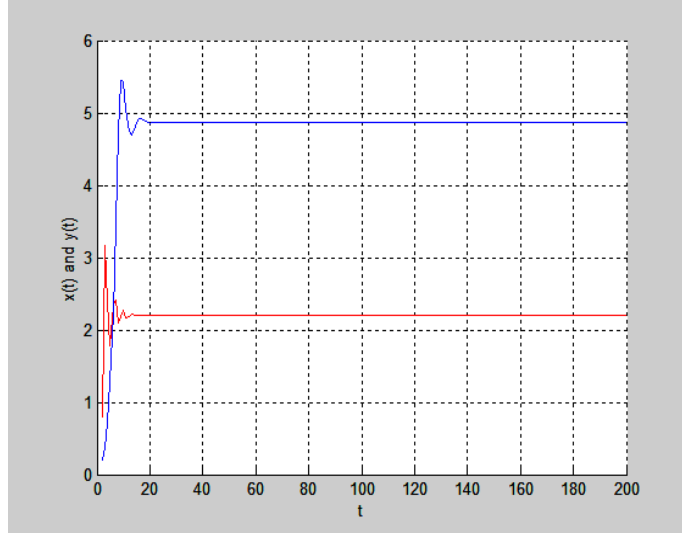
$$x(2n) < x(2n + 2) < x(2n + 4) < \dots < \square < \dots < x(2n + 3) < x(2n + 1) < x(2n - 1),$$

sonucuna ulaşılır.

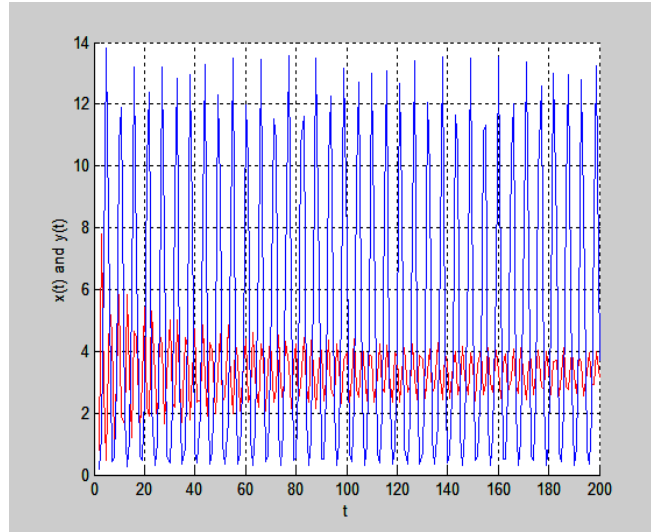
Örnek (3.2) denklem sisteminin parametre değerleri [38]'deki çalışmalar dikkate alınarak seçilmiştir. Burada $p=0.192$, $R_1 = 0.42 * 38^{2/3} = 4.704$, $R_2 = 0.11 * 38^{2/3} = 1.232$ dir. Duyarlı tümör hücresinden dirençli tümör hücresine değişim aralığı $[10^{-5}, 10^{-2}]$ dir. [38]'deki parametreler $\beta_1 = 0.05$ ve $\beta_2 = 0.2$ dir. $\alpha_1 = 0.51$ ve $\alpha_2 = 0.555$ alınmıştır. İlacın tümör hücrelerine etkisi $d_1 = 0.6$ ve $d_2 = 0.006$ olarak alınmıştır. Her iki tümör popülasyonu farklı büyüme oranlarına sahiptir. Burada $r = r_1$ ve $(1.05) * r = r_2$ olarak alınmıştır. Şekil 1 ve Şekil 2 duyarlı ve dirençli tümör popülasyonlarının Teorem 3.1 koşulu altındaki davranışını göstermektedir. Burada değişim oranı $\gamma_1 = 0.01$ olarak alınmıştır.

Theorem 3.3'teki koşullar altında $\beta_1 = 0.15$ ve $r = r_1 = 0.08$ olarak alınmıştır. Pozitif denge noktası civarındaki global asimptotik kararlılık Şekil 3'te görülmektedir.

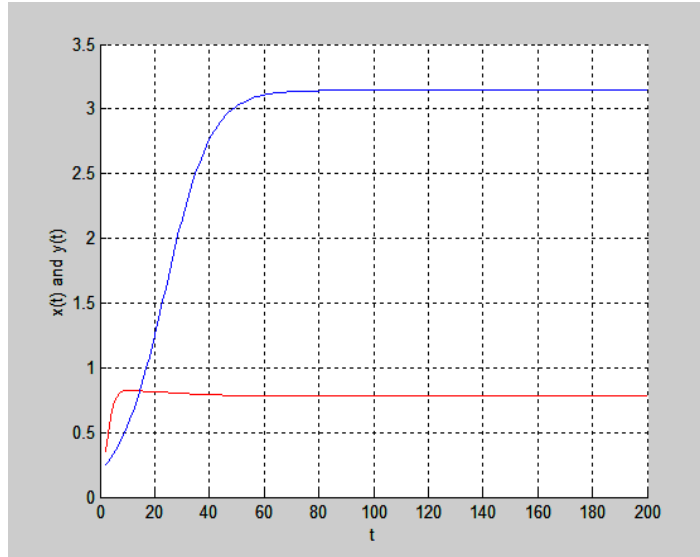
Theorem 3.4 için $r = r_1 = 1.09$ ve $\beta_1 = 0.05$ olup sönülü davranış Şekil 4'te görülmektedir. Son olarak Şekil 5 ve Şekil 6 da duyarlı ve dirençli tümör popülasyonlarının bifurcation diagramı verilmektedir. Burada kırmızı duyarlı tümör popülasyonunu ve mavi de dirençli tümör popülasyonunu göstermektedir.



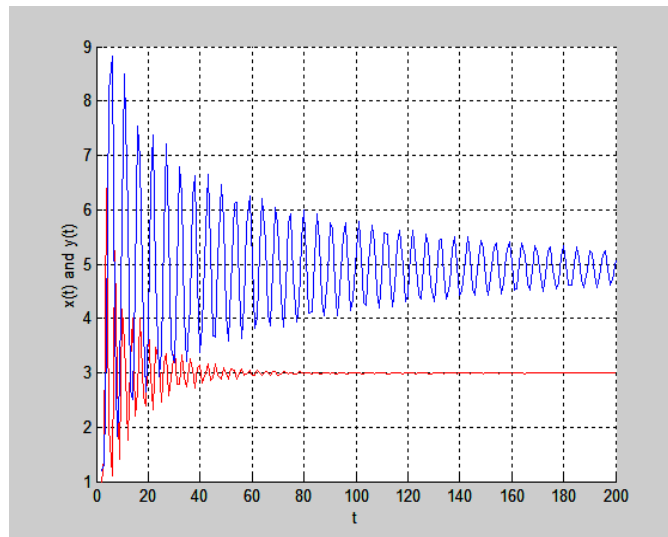
Şekil 1



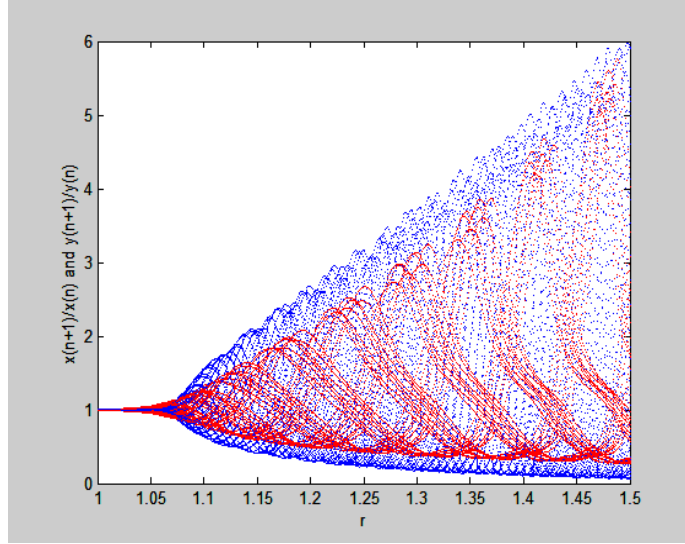
Şekil 2



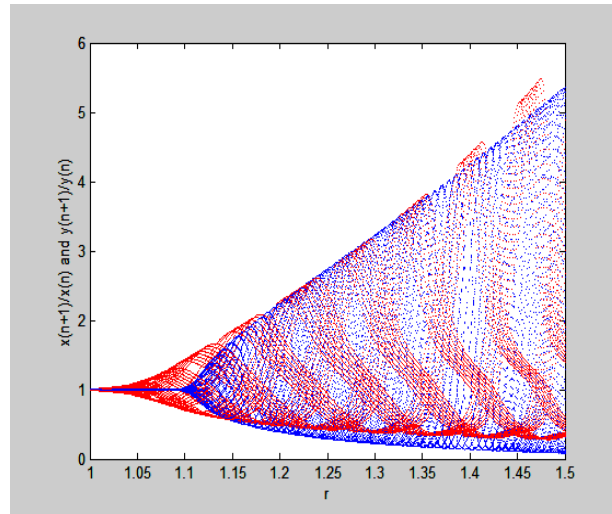
Şekil 3



Şekil 4



Şekil 5



Şekil 6

4.KAYNAKLAR

- [1]M.U. Akhmet, J. Alzabut, A.Zafer, Perron's theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay, J.Comput.Appl.Math.193(1) (2006) 204-218
- [2]G. Ballinger, X.Liu, Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 5 (1999) 579-591
- [3]R.E. Fennell, Periodic solution of functional differential equations, J. Math. Anal. Appl.39 (1972) 198-201
- [4]K. Gopalsamy, B.G.Z. hang. On the delay differential equations with impulses, J. Math. Anal. Appl. 139 (1989) 110 - 122
- [5]K. Gopalsamy, Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1992
- [6]G. Kiriinger, Permanence in Lotka – Volterra equations:linked Prey-Predator systems,Math. Biosci.82 (1986) 165 - 191
- [7]X.Liu, G.Ballinger, Uniform asymptotic stability of impulsive delay differential equations,Comput. Math.Appl. 41 (2001) 903 - 915
- [8]J.W.Li.S.S.Cheng, Globally attractive periodic solution of a perturbed functional differential equation,J.Comput.Appl.Math.193 (2) (2006) 652-657
- [9]S.H.Saker,J.O.Alzabut, Existence of periodic solutions global attractivity and oscillation of impulsive delay population model, Nonlinear Anal.:Real World Appl., 8(2007),, 1029-1039.
- [10]S.H.Saker,J.O.Alzabut, Periodic solutions, global attractivity and oscillation of impulsive delay host-macroparasite model,Math.Comput.Model.45(5-6) (2007) 531-543
- [11]J.H.Shen,Global existence and uniqueness oscillation and nonoscillation of impulsive delay differential equations, Acta.Math.Sin.40 (1997) 53 - 59
- [12]X.H.Tang, Asymptotic behavior of delay differenrial equations with instantaneously terms , J.Math.Anal.Appl.302 (2005) 342-359
- [13]V.G. Nazarenko, Influence of delay on auto oscillation in cell population, Biofisika, 21 (1976), 352-356.
- [14] J.O. Alzabut, T. Abdeljawad, On existence of a globally attractive periodic solution of impulsive delay logarithmic population model, Applied Mathematics and Computation, 198 (2008), 463-469.
- [15]L.J.S. Allen An Introduction to Mathematical Biology, *Pearson Prentice Hall*, NJ, (2007).
- [16] R.J. Beyers, H.T. Odum,. Ecological Microcosm. *Springer Verlag*, New York, (1993).

- [17] R.J. Beyers, The metabolism of 12 aquatic laboratory microecosystems, *Ecol.Monogr.*, 33(1963), 281-306.
- [18] F.Gurcan, F. Bozkurt, Global stability in a population model with piecewise constant arguments, *J. of Math. Anal. and Appl.*, 360(1) (2009), 334-342.
- [19] I. Gyori, G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, *Clarendon Press*, Oxford, (1991).
- [20] F.C. Hoppensteadt, Cambridge Studies in Mathematical Biology: Mathematical methods of population biology, *Cambridge University Press*, Cambridge, (2004).
- [21] Y. Kurihara, Studies of the interaction in a microcosm, *Sci. Rep. Tohoku Univ. Ser. IV*, 37(1978) , 161-177.
- [22] X. Liu, G. Ballinger, Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models, *Nonlinear Analysis*, 53(2003), 1041-1062.
- [23] R.M. May, Biological populations obeying difference equations: Stable points, stable cycles and chaos, *J. Theoret. Biol.*, 51(1975), 511-524.
- [24] R.M. May, G.F. Oster, Bifurcations and dynamics complexity in simple ecological models, *Amer. Nat.*, 110 (1976), 573-599.
- [25] I. Ozturk, F. Bozkurt, F. Gurcan, Stability analysis of a mathematical model in a microcosm with piecewise constant arguments, *Mathematical Biosciences*, 240 (2) (2012), 85-91.
- [26] S.I. Rubinow, Introduction to Mathematical Biology, *Dover Publication*, NY, (2002).
- [27] K. Sugiura, The use of an aquatic microcosm for pollution effects assessment, *Water Res.*, 30(1996), 1801-1812.
- [28] K. Sugiura, et al. A mathematical model for microcosms: formation of the colonies and coupled oscillation in population densities of bacteria, *Ecol. Model.*, 168(2003), 173-201.
- [29] J. Yan, et al. Existence and global attractivity of periodic solution for an impulsive delay differential equation with Allee effect, *J. Math. Anal. Appl.*, 309(2005), 489-504.
- [30] W. Zhang, M. Fan, Periodicity in a Generalized Ecological Competition System Governed by Impulsive Differential Equations with Delay, *Mathematical and Computer Modeling*, 39(2004), 479-493.
- [31] E.C. Holland, Glioblastoma multiforme: The Terminator, *Proc. of the Nat. Acad. of Sci.* , 97 (2000), 6242-6244.
- [32] Y.A. Yung, J.R. Shapiro and W.R. Shapiro, Heterogeneous chemosensitivities of subpopulations of human glioma cells in culture, *Cancer Res.*, 42 (1982), 992-998.

- [33]W. Paulus and J. Peiffer, Intratumoral histologic heterogeneity of gliomas, A quantitative study, *Cancer*, 64(1989), 442-447.
- [34] R.A. Berkman et al., Clonal composition of glioblastoma multiforme, *J. of Neurosurgery*, 77 (1992), 432-437.
- [35]S.W. Coons and P.C. Johnson, Regional heterogeneity in the DNA content of human gliomas, *Cancer*, 72(1993), 3052-3060.
- [36]A.J. Coldman and J.H. Goldie, A mathematical model for relating the drug sensitivity of tumors to their spontaneous mutation rate, *Cancer Treat. Rep.*, 63(1979), 1727-1731.
- [37]J.C. Panetta, A mathematical model of drug resistance: Heterogeneous tumors, *Math. Biosci.*, 147(1998), 41-61.
- [38]B. G. Birkhead et al., A mathematical model of the development of drug resistance to cancer chemotherapy, *Europ. J. of Cancer and Clinical Oncology*, 23(1987), 1421-1427.
- [39]J. E. Schmitz, A.R. Kansal and S. Torquato, A cellular Automaton of Brain Tumor Treatment and Resistance, *J. of Theoret. Med.*, 4(4)(2002), 223-239.
- [40]H.P. de Vladar and J.A. Gonzalez, Dynamic response of cancer under the influence of immunological activity and therapy, *J. of Theoret. Biol.*, 227(2004), 335-348.
- [41]J.L. Gevertz and S. Toquato, Modelig the effects of vasculature evolution on early brain tumor growth, *J. of Theoret. Biol.*, 243(2006), 517-531.
- [42]Y. Mansury, M. Diggory and T.S. Deisboeck, Evolutionary game theory in an agent-based brain tumor model: Exploring the ‘Genotype-Phenotype’ link, *J. of Theoret. Biol.*, 238(2006), 146-156.
- [43] A.M.A. El-Sayed, A.E.M. El-Mesiry, H.A.A. El Saka, On the fractional order logistic equation, *Applied Mathematics Letters*, 20(2007), 817-823.
- [44] K. Gopalsamy and P. Liu, Persistence and Global Stability in a population model, *J. of Math. Anal.Appl.*, 224 (1998), 59-80.
- [45] P. Liu and K. Gopalsamy, Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments, *Appl. Math. and Comp.*, 101(1999), 63- 88.
- [46] K.L. Cooke and W. Huang, in: A.M. Fink et al. (Eds.), *A Theorem of George Seifert and an equation with State-Dependent Delay*, *Delay and Differential Equations*, World Sci. , Ames Iowa, 1991.
- [47]F. Gurcan and F. Bozkurt, Global stability in a population model with piecewise constant arguments, *J. of Math. Anal. Appl.*, 360(1)(2009), 334-342.

[48]I. Ozturk and F. Bozkurt, Stability analysis of a population model with piecewise constant arguments, Non. Anal.: RWA, 12(3) (2011), 1532-1545.