

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CAUCHY UZAYLARIN TOPOLOJİK KATEGORİSİNDE
KAPALI, KOMPAKT VE BAĞLANTILI OBJELER**

**Tezi Hazırlayan
Mustafa KAYA**

**Tezi Yöneten
Doç. Dr. Muammer KULA**

**Bu çalışma; Erciyes Üniversitesi BAP birimi tarafından
Proje Kodu: FYL-2015-5779 nolu projeyle desteklenmiştir.**

Ağustos 2016

KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.


Mustafa KAYA

YÖNERGEYE UYGUNLUK

“Cauchy Uzayların Topolojik Kategorisinde Kapalı, Kompakt ve Bağlantılı Objeler” adlı yüksek lisans tezi, Erciyes Üniversitesi lisansüstü tez önerisi ve tez yazma yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Mustafa KAYA 

Danışman 
Doç. Dr. Muammer KULA


Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Mustafa KAYA** tarafından hazırlanan “**Cauchy Uzayların Topolojik Kategorisinde Kapalı, Kompakt ve Bağlantılı Objeler**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

09./08/2016

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Doç. Dr. İshak ALTUN

Üye : Doç. Dr. Muammer KULA

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 09/08/2016. tarih ve 2016/35-24 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09/08/2016

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

TEŞEKKÜR

“Cauchy Uzayların Topolojik Kategorisinde Kapalı, Kompakt ve Bağlantılı Objeler” isimli yüksek lisans tezi çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen ve yönlendiren saygı değer hocam Sayın Doç. Dr. Muammer KULA’ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmasına maddi destek veren **Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi’ne (BAP) (Proje Kodu: FYL–2015–5779)** yaptıkları katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

CAUCHY UZAYLARIN TOPOLOJİK KATEGORİSİNDE KAPALI, KOMPAKT VE BAĞLANTILI OBJELER

Mustafa KAYA

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2016
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Bu tezin amacı, Cauchy Uzayların Topolojik Kategorisinde Kapalı, Kompakt ve Bağlantılı Objelerin karakterizasyonunu vermektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde kısaca Cauchy Uzayların tarihçesi üzerinde durulmuş olup literatür taraması mahiyetindedir.

İkinci bölümde, amaca yönelik temel kategorik ve topolojik tanımlara ve bunlarla ilgili temel teoremlere, örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Cauchy Uzayların Topolojik Kategorisinde, lokal (yerel) olarak değişik T_0 ve T_1 Cauchy uzayları karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde, genelde çeşitli T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları Cauchy uzayların Topolojik Kategorisinde karakterize edilmiş ve birbirleriyle ve p noktasında ki çeşitli T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Cauchy uzaylar kategorisinde bir objenin (kuvvetli) kapalı, (kuvvetli) açık objeleri karakterize edilmiş ve Cauchy uzayların Topolojik Kategorisinde verilen kompakt, bağlantılı objeler karakterize edilmiş ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Altıncı bölüm, sonuç ve değerlendirmeden oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Kategori, Cauchy Uzayı, Cauchy Dönüşümü, Ayırma Aksiyomları, Bağlantılılık, Kompaktlık.

CLOSED, COMPACT AND CONNECTED OBJECTS IN THE CATEGORY OF CAUCHY SPACES

Mustafa KAYA

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, August 2016

Thesis Supervisor: Associate Prof. Dr. Muammer KULA

ABSTRACT

In this thesis, we give the characterization of closed, compact and connected objects in the topological category of Cauchy spaces.

This thesis is consisted of six chapters.

The first chapter has focused on the history of the Cauchy space is simply scanning of the literature.

In the second chapter, the basic definitions, theorems and examples such as a category, functor, topological functor, discrete and indiscrete objects, filters and topological category were given.

In the third chapter, an explicit characterization of each of the separation properties

T_i , $i = 0, 1$ at a point p is given in the topological category of Cauchy spaces.

The fourth chapter, an explicit characterization of generalized the separation properties T_i , $i = 0, 1$ is given in the topological category of Cauchy spaces. Moreover, specific relationships that arise among the various T_i , $i = 0, 1$ structures at p are examined in this category. Finally, we investigate the relationships between generalized separation properties and separation properties at a point p in this category.

In the fifth chapter, various notions of (strongly) closed subobject, (strongly) open subobject, connected and compact objects in the topological category of Cauchy spaces were introduced and compared.

In the last chapter consists of the results and evaluation.

Keywords: Topological Category, Cauchy Space, Cauchy Map, Separation, Connectedness, Compactness.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
KISALTMALAR VE SİMGELER	ix

1. BÖLÜM

GİRİŞ	1
-------------	---

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar	5
2.2. Süzgeçler	11
2.3. Süzgeç Tabanları.....	16
2.4. Cauchy Uzayları.....	22
2.5. Topolojik Kategori.....	26

3. BÖLÜM

p NOKTASINDA T_0 VE T_1 CAUCHY UZAYLAR

3.1. p Noktasında T_0 Cauchy Uzaylar	32
3.2. p noktasında T_1 Cauchy Uzaylar	37
3.3. p noktasında T_0 ve T_1 Cauchy Uzaylar Arasındaki İlişkiler	39

4. BÖLÜM

T_0 VE T_1 CAUCHY UZAYLAR

4.1. T_0 Cauchy Uzaylar	40
4.2. T_1 Cauchy Uzaylar	44
4.3. T_0 , $\overline{T_0}$, T_1 ve T_2 Cauchy Uzaylar Arasındaki İlişkiler	45

5.BÖLÜM

CAUCHY UZAYLARINDA KAPALILIK, KUVVETLİ KAPALILIK VE BAĞLANTILILIK

5.1. Cauchy Uzayların Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeleri.....	48
5.2. Cauchy Uzayında Bağlantılı, Kompakt Objeler	55

6.BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

6.1. Sonuç ve Değerlendirme.....	59
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	64

KISALTMALAR VE SİMGELER

Set	Cümleler Kategorisi
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
CHY	Cauchy Uzaylar Kategorisi
$\alpha, \beta, \mathcal{F}, \mathcal{G}$	Süzgeçler
$F(X)$	X üzerindeki tüm süzgeçlerin cümlesi
$[x]$	Tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen süzgeç

GİRİŞ

Kategori çalışmamızın nedeni, yeni bir dil üreterek düşünce ve ifade bakımından ekonomik olduğu kadar farklı branşlarda çalışanlar arasında bağ kurması; birbirinden bağımsız yapılar kullanılarak eski problemlerin çözümlerine ışık tutmasıdır. Fizik, malzeme, jeoloji, bilgisayar, klimatoloji gibi bilim alanlarında birçok uygulaması olan kategori teorisi, özellikle moleküler biyolojide DNA ve RNA kodları konusunda, astronomide uzay gözlemlerinde, coğrafi bilgi sistemlerinde, bir metro hattı modelleme gibi ulaşım haritaları oluşturmada kullanılmaktadır. Bu uygulamalar ve kategori teorisinin diğer birçok önemli uygulamaları [1] de mevcuttur.

Kategori kavramı ilk olarak 1945'te Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından ortaya atılmıştır [2]. Topolojideki özelliklerde cebirsel topolojideki çalışmalarının bir parçası olarak kategori, fanktorlar ve doğal dönüşüm kavramlarını literatüre kazandırmışlardır. İkili daha sonra yaptıkları açıklamalarda amaçlarının doğal dönüşümleri anlamak olduğunu bunun içinde kategori kavramına ihtiyaç duyan fanktorların tanımlanması gerektiğini belirtmişlerdir.

Kategori teorisi birbirinden oldukça farklı görünen iki saha olan topoloji ve cebir arasında bir köprü kurmak için geliştirilmiştir. İlk önceleri kategori teorisi zor matematiksel konuların (ideas) varlığını açıklığa kavuşturan derin bir dilden daha uzaktı. Bununla beraber 1957'de Alexander Grothendieck kategori teorisini cebirsel denklemlerin çözümünde emsalsiz bir görüş sağlayan yeni bir matematiksel makine (new chomology theory) oluşturmakta kullandı. Kategoriler özel olarak, matematiksel konuların belli özelliklerini göstermek ve onları başka yerde basitçe elde edilemeyecek bir acuity (keskinlik) seviyesiyle çalışmak için oluşturulmuştur.

Bill Lawvere, kategori teorisini tüm matematiksel düşünceler için yeni bir temel olarak görmüştür. Matematikçiler tarafından 19. yüzyılda temeller (foundations) için

araştırmalar yapılmış ve cümle teorisi onlar için mantıklı ve tatmin edici olmuştur. Fakat Lawvere cümlelerin kategorisinin belli özellikleri sağlayan, matematiksel evrenin merkezi olması gerekmeyen basit bir kategori olduğunu göstermiş, ayrıca tüm cebirsel teorilerin nasıl tek bir sistemin örnekleri olarak görülebileceğini açıklamıştır.

1980’de Joachim Lambek, bilgisayar biliminde kullanılan karakter (types) ve programların özel bir çeşit kategori oluşturduğunu göstermiştir. Bu; insanların diğer programların yapılması için programların nasıl birleştirildiğini ve oluşturulduğunu araştırmasına olanak sağlayan, programlar hakkında konuşmasını kolaylaştıran yeni bir dil (semantics) ortaya çıkarmıştır.

Kategori teorisi, matematik içindeki farklı saha ve alt sahalar arasındaki düşüncelerin etkili iletişimi için geliştirilmiştir. Böylece Matematiğin farklı dalları kategoriler içinde şekillendirilebilmiştir. Bu kategoriler fanktorlar tarafından bağlanılabilir olup, bir kategoride ispatlanan teoremler ve gerçeşler, bağlantıyı sağlayan fanktor sayesinde bir diğer kategoriye taşınabilmiştir.

Matematik bilim dalının farklı branşlarındaki ayrışma (farklılaşma) ve uzmanlaşmanın (specialization) artması matematikçileri, bu çok sayıdaki farklı branşların ortak bir alan üzerinde düşünmelerini zorunlu kılmıştır. İşte kategori teorisi bu ortak alanlardan bir tanesidir ki, farklı alanlardaki araştırmacıların daha kolay bir iletişim kurmaları için ortak bir dil sağlamaktadır. Genel topoloji matematiğinin cebir, analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, lattice teorisi gibi pek çok teoride uygulamalara sahip olduğundan, topologlar topolojik fikirleri (ideas) kategori diline çevirmeyi tercih ederler.

Eğer genel topolojide ki teoremleri topolojik kategorilerde daha genel yapılarda formüle etmek ve ispatlamak istenirse, öncelikle başlangıç kaldırması, bitiş kaldırması ve diskre yapılar gibi belli temel kavramları herhangi bir Topolojik Kategori için tekrardan formüle etmek gerekmektedir.

E ve B iki kategori olmak üzere $\mathcal{U} : E \rightarrow B$ fanktoru verilsin. $\mathcal{U}$ fanktoru belirli, küçük demetlere sahip ve $\mathcal{U}$ – kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahipse $\mathcal{U}$ ’ ya topolojik fanktor veya E ’ye B üzerinde topolojik kategori denir [3]. Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine

olarak Herrlich [4], Kent [5], Wyler [6], Schwartz [7] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [4] de belli bir kaynaktan başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriye tanımlamıştır. Wyler [6] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki funktora dayandırarak tanımlamıştır. Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemelerin çoğu kapanış operatörleri kullanılarak yapılmıştır. Baran [8] de ayırma aksiyomlarını, [9] de kapalılık kavramını ve [10] de kompaktlık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Bu genişlemeleri yapmanın bir amacı, Tietze genişleme teoremi, Urysohn lemması, Urysohn metrikleşme teoremi, Tychonoff teoremi gibi teoremlerin ifadelerinde yer almalarıdır. Diğer bir amacı da kapalılık kavramı ile karakterize edilebilen kompaktlık ve bağlantılılık kavramlarını topolojik kategoriye genişletmektir.

Baran, [8] de kümeler üzerinde tanımlanmış keyfi bir topolojik kategori için bir p noktasında, yani lokal olarak ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır [12, 11, 13, 14]. Ardından bunu topos teorideki üreteç eleman (the generic element) metodunu [15, s.39] kullanarak noktadan bağımsız olan tanımlara genelleştirmiştir. Topostaki objeler noktalara sahip olmayabilir. Fakat bu objelerin her zaman bir üreteç noktası (generic point) mevcuttur. Bu genelleştirmeyi yapmasının bir nedeni budur. Diğer bir nedeni de keyfi topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarının bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmış olmasıdır [8, s.335]. Baran [8, 9, 16, 17] küme tabanlı topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [19] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [13, 18, 14]. Ayrıca bu kavramları kullanarak topolojide iyi bilinen yukarıdaki kompaktlık [10], Hausdorffluk [20] ve bağlantılılık [17] kavramlarını topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Tam (Complete) ve Cocomplete kategorileri için kapanış operatörlerinin tanımlarını Dikranjan ve Giuli [19] de vermiştir. Bu kapanış operatörleri kullanılarak, Hausdorff uzayı, kompaktlık ve bağlantılılık kavramları karakterize edilmiştir. Yine aynı kapanış operatörleri, verilen her bir ε kategorisinin dolgun bir alt kategorisi

λ nın epimorfizmlerini karakterize etmek için de kullanılmıştır. Brummer [21], Hoffman [22], Marny [23] ve Baran [24], T_0 -aksiyomunu değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmesini yaptılar. Hang [25], Schwartz [7] ve Baran [14] de bu genişlemeler arasında ki ilişkileri incelediler. Baran [11] da ayrılma aksiyomlarını $(T_0, T_1, T_0, T_{3\frac{1}{2}}, T_4, T_5)$, [15] de kapalılık kavramını ve [16] de de kompaktlık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir.

Sözü edilen bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Genel olarak, ayrılma aksiyomları farklı noktaları ve ayrık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları ve diskre obje ile açıklayabilmek gerekmektedir.

“Cauchy” terimi Fransız matematikçi Augustin Cauchy’in isminden ortaya çıkmasına karşın, yaygın olarak küçük harfle başlayan şekliyle kullanıla gelmiştir. Cauchy isim olarak, reel analizdeki Cauchy dizileri kavramına dayanmaktadır. Süzgeçlerin varolması ve düzgün uzayların ortaya çıkması neticesinde, Cauchy süzgeçleri topolojik teoride Cauchy dizilerine genelleştirilmiştir. Yakınsak teoride ise, Cauchy yakınsaklık anlamında kullanılmıştır. Weil [26] şu ifadeyi ispatladı: Düzgün uzay içerisindeki bir süzgeç “Cauchy” dir ancak ve ancak düzgün uzay tamlaması içerisinde bir nokta mevcuttur öyle ki süzgeç bu noktaya yakınsaktır. Kowalsky [27] Cauchy süzgeci kavramını temel kavram olarak kullanarak nerdeyse aynı neticeye ulaşmıştır. Cook ve Fischer [28] ün düzgün yakınsak uzayları ortaya koyması ve böyle uzaylar içerisinde Cauchy uzayının tanımını vermesi Cauchy uzaylarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ancak Cauchy uzaylarının aksiyomatik tanımı 1968 tarihinde Keller [29] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Cauchy uzayları çeşitli uzayların tamlamalarını oluşturmada yaygın olarak kullanılan bir araç olmuştur. Reed [30] Cauchy uzayları tamlamalarının bir tam sınıfını geliştirmiştir. Cauchy uzayları düzgün uzaylar gibi kompatifikasyon ve tamlama için kullanılmıştır. Bu arada tamlık ve düzgün süreklilik gibi kavramlar tanımlanmıştır ki, bunlar topolojik ve yakınsak uzaylarda mümkün değildi.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kategorik ve topolojik terimlerden bahsedilmiştir. Ayrıca Cauchy uzay, topolojik kategori kavramları verilmiş ve daha sonra objeleri Cauchy uzaylar, morfizmleri Cauchy dönüşüm olan **CHY** un topolojik kategori olduğu gösterilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

1940'ların başında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Clane kategori teorisini ortaya çıkardılar. Kategori teorisi birbirinden oldukça farklı görünen iki saha olan topoloji ve cebir arasında bir köprü kurmak için geliştirilmiştir. Kategori teorisi yeni bir dil üreterek farklı alanlarda çalışanlar arasındaki iletişimi kolaylaştırır; birbirinden bağımsız çeşitli teorem ve yapıları yüzeye çıkararak eski problemlere yeni bir anlam kazandırır. Kategori teorisinin özellikle coğrafi bilgi sistemlerinde, astronomide uzay gözlemlerinde, moleküler biyolojide DNA ve RNA kodları konusunda, bir metro hattı modelleme gibi ulaşım haritaları oluşturmada uygulamaları olduğu gibi kategori; bilgisayar, fizik, malzeme, jeoloji, klimatoloji vb. birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Kategoriyi gerçek dünyaya aktaran bu ve benzeri birçok önemli uygulamalar [1] de verilmiştir.

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki özellikleri ihtiva eden $E = (Ob(E), Mor(E), \circ, 1)$ sistemine bir kategori denir. Nesnelerin (objelerin) sınıfı $Ob(E)$ her bir $A, B \in Ob(E)$ nesne çifti için A dan B ye tüm dönüşümlerin (morfizmlerin) sınıfı $E(A, B)$ olmak üzere,

$$Mor(E) = \{ E(A, B) : A, B \in Ob(E) \}$$

ve her $A, B, C \in Ob(E)$ için,

$$\circ : E(B, C) \times E(A, B) \rightarrow E(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto gf$$

dönüşümlerin bileşkesi olmak üzere aşağıdaki iki şart sağlanır.

1. Eğer $f \in E(A, B)$, $g \in E(B, C)$ ve $h \in E(C, D)$ ise $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dır.
2. Her bir $A \in Ob(E)$ için $f \in E(A, -)$ ve $g \in E(-, A)$ olmak üzere $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in E(A, A)$ birim dönüşümü vardır.

Örnek 2.1.2: Tüm cümlelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri cümleler ve dönüşümleri cümleler arasındaki fonksiyonlardır. A, B cümle çifti için $E(A, B)$, A dan B ye tüm fonksiyonların cümlesidir. Buradaki işlem ise fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanır. Her bir A cümlesi için birim morfizm $1_A : A \rightarrow A$ birim fonksiyonudur. Kategori için gerekli 1. ve 2. şartları sağlanır. Bu kategori cümlelerin kategorisi olarak adlandırılır ve **Set** ile gösterilir.

Örnek 2.1.3: Topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri topolojik uzaylar, dönüşümleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve işlem ise fonksiyonların bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de süreklidir. Kategori için gerekli 1. ve 2. şartları sağlanır. Bu kategori topolojik uzayların kategorisi olarak adlandırılır ve **Top** ile gösterilir.

Örnek 2.1.4: Metrik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri metrik uzaylar, dönüşümleri metrik uzaylar arasındaki büzülme fonksiyonları (contraction) ve işlem ise fonksiyonların bileşkesidir. İki büzülme fonksiyonunun bileşkesi de büzülme fonksiyonudur. Kategori için gerekli 1. ve 2. şartları sağlanır. Bu kategori metrik uzayların kategorisi olarak adlandırılır ve **Met** ile gösterilir.

İki metrik uzay arasındaki $f : (B, d) \rightarrow (B', d')$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in B$ için $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ ise f e büzülme fonksiyonu (contraction) denir.

Tanım 2.1.5: E ve B iki kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise B kategorisine E nin bir *alt kategorisi* denir [3, s. 39].

1. $Ob(B) \subset Ob(E)$
2. Her bir $A, B \in Ob(B)$ için $B(A, B) \subseteq E(A, B)$
3. B kategorisindeki dönüşümlerin bileşke işlemi, E kategorisindeki dönüşümlerin bileşke işlemi ile aynıdır.
4. Her bir $A \in Ob(B)$ için B deki 1_A birim morfizmi, E deki birim morfizm ile aynıdır.

Eğer her $A, B \in Ob(B)$ nesne çifti için $B(A, B) = E(A, B)$ ise B ye *dolgun (full) alt kategori*, eğer $Ob(B) = Ob(E)$ ise B ye *geniş alt kategori* denir.

Tanım 2.1.6: E bir kategori ve $f : A \rightarrow B$ de bu kategoride bir morfizm olsun.

1. Eğer $g \circ f = 1_A$ ve $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow A$ morfizmi mevcutsa f morfizmine bir *izomorfizm* denir. A ve B nesneleri arasında bir izomorfizm varsa A ve B ye birbirine *izomorftur* denir ve $A \cong B$ ile gösterilir [3, s. 19].
2. Eğer herhangi bir $g, h : C \rightarrow A$ dönüşüm çifti için $f \circ g = f \circ h$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa, yani f morfizmi soldan sadeleşiyorsa f e bir *monomorfizm* denir [3, s. 98].
3. Eğer herhangi bir $g, h : B \rightarrow C$ dönüşüm çifti için $g \circ f = h \circ f$ olması $g = h$ olmasını gerektiriyorsa f morfizmi sağdan sadeleşiyorsa f e bir *epimorfizm* denir [3, s. 100].
4. Eğer f morfizmi hem monomorfizm hem de epimorfizm ise f morfizmine bir *bimorfizm* denir [3, s. 102].

Tanım 2.1.7: E ve B iki kategori olmak üzere E nin her bir A nesnesini B nin bir $U(A)$ nesnesine, E nin her bir $f : A \rightarrow B$ morfizmini ise B deki bir

$\mathcal{U}(f): \mathcal{U}(A) \rightarrow \mathcal{U}(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{U}$ dönüşümüne $\mathbf{E}$ den $\mathbf{B}$ ye bir *fanktor* denir ve $\mathcal{U}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ile gösterilir [3, s. 12].

1. $\mathbf{E}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $\mathcal{U}(g \circ f) = \mathcal{U}(g) \circ \mathcal{U}(f)$ dır.
2. Her $A \in \text{Ob}(\mathbf{E})$ için $\mathcal{U}(1_A) = 1_{\mathcal{U}(A)}$ dır.

Tanım 2.1.8: $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ iki kategori ve $\mathcal{U}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ bir fanktor olsun.

1. $\mathbf{E}$ nin her A, B nesnesi ve her $f: \mathcal{U}(A) \rightarrow \mathcal{U}(B)$ dönüşümü için $\mathcal{U}(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g: A \rightarrow B$ dönüşümü varsa $\mathcal{U}$ ya *dolgun (full) fanktor* denir [3, s. 25].
2. $\mathbf{E}$ nin her A, B nesnesi ve her $f, g: A \rightarrow B$ dönüşümleri için $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olduğunda $f = g$ oluyor ise $\mathcal{U}$ ya *düzenli (faithfull) fanktor* denir [3, s. 25].
3. Eğer $\mathbf{E}$ deki her $f: A \rightarrow A$ dönüşümü için $\mathcal{U}(f) = I_{\mathcal{U}(A)}$ ve f izomorfizm olduğunda $f = I_A$ oluyorsa $\mathcal{U}$ ya *amnestik fanktor* denir.
4. $\mathcal{U}$ hem düzenli hem de amnestik ise $\mathcal{U}$ ya *belirli (concrete) fanktor* denir.
5. $\mathbf{B}$ kategorisinin her B nesnesi için $\mathcal{U}^{-1}(B) = \{ A \in \text{Ob}(\mathbf{E}) \mid \mathcal{U}(A) = B \}$ bir cümle ise $\mathcal{U}$ ya *küçük demetlere sahip fanktor* denir.
6. Eğer $\mathbf{E}$ nin her A, B nesnesi ve her $f: A \rightarrow B$ dönüşümü için ve $1_E(A \xrightarrow{f} B) = 1_E(A) \xrightarrow{1_E(f)} 1_E(B) = A \xrightarrow{f} B$ oluyorsa yani $1_E(A) = A$ $1_E(B) = B$ ve $1_E(f) = f$ ise $1_E: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ ye *birim fanktor* denir [3, s. 21].
7. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ nin alt kategorisi olmak üzere, $\mathbf{E}$ nin her A nesnesi ve her f dönüşümü için $\mathcal{U}(A) = A$ ve $\mathcal{U}(f) = f$ ise $\mathcal{U}$ ya *alt (inclusion) fanktor* denir [3, s. 47].

8. Eğer $G \circ \mathcal{U} = 1_E$ ve $\mathcal{U} \circ G = 1_B$ olacak şekilde bir $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$ fanktoru varsa $\mathcal{U}$ ya bir *izomorfizm* denir. Eğer $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ kategorileri arasında bir izomorfizm varsa $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ ye *izomorfik kategoriler* denir ve $\mathbf{E} \cong \mathbf{B}$ ile gösterilir [3, s. 24].

Tanım 2.1.9: $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ iki kategori olsun.

1. Eğer bir $\mathcal{U} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ düzenli (faithfull) fanktoru mevcutsa $(\mathbf{E}, \mathcal{U})$ (kısaca $\mathbf{E}$ ye) ikilisine $\mathbf{B}$ üzerinde bir *concrete kategori* denir [3, s. 53].
2. Set üzerindeki bir concrete kategoriye *construct denir* [3, s. 53].

Tanım 2.1.10: $\mathbf{B}$ kategorisi üzerinde $(\mathbf{E}, \mathcal{U})$ ve $(\mathbf{K}, \mathcal{V})$ concrete kategorileri ve

$\mathcal{F} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{K}$ fanktoru verilsin.

1. Eğer $\mathcal{U} = \mathcal{V} \circ \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}$ e $(\mathbf{E}, \mathcal{U})$ dan $(\mathbf{K}, \mathcal{V})$ ye *concrete fanktor* denir. Böyle bir fanktor $\mathcal{F} : (\mathbf{E}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbf{K}, \mathcal{V})$ ile veya kısaca $\mathcal{F} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{K}$ ile gösterilir [3, s. 56].
2. İki concrete kategori arasındaki izomorfizm olan bir concrete fanktora *concrete izomorfizm* denir. Eğer iki kategori arasında bir concrete izomorfizm varsa bu iki kategoriye concretely izomorfik kategoriler denir [3, s. 70].

Tanım 2.1.11: $\mathbf{E}$ bir kategori ve $\mathbf{B}$ de $\mathbf{E}$ nin bir alt kategorisi olsun.

1. Eğer $\mathbf{E}$ nin her A nesnesi için aşağıdaki şartı sağlayan $\mathbf{B}$ nin bir A' nesnesi ve $\mathbf{E}$ nin bir $f : A' \rightarrow A$ dönüşümü mevcutsa $\mathbf{B}$ ye $\mathbf{E}$ de *coreflective* dir denir [31, s. 58].
Şart: $\mathbf{B}$ nin her B nesnesi ve $\mathbf{E}$ nin her $g : B \rightarrow A$ dönüşümü için $f \circ \bar{g} = g$ olacak şekilde bir tek $\bar{g} : B \rightarrow A'$ dönüşümü mevcuttur.
2. Eğer $\mathbf{B}, \mathbf{E}$ de *coreflective* ve $\mathbf{E}$ nin her A nesnesi için $\mathbf{E}$ nin $f : A' \rightarrow A$ dönüşümü bimorfizm ise $\mathbf{B}$ ye $\mathbf{E}$ de *bicoreflective* dir denir [31, s. 58].

Tanım 2.1.12: $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ birer kategori ve $F, G : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ iki fanktor olsun. $\mathbf{E}$ nin her A nesnesini $\mathbf{B}$ nin bir $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmine dönüştüren bir $\eta : Ob(\mathbf{E}) \rightarrow Mor(\mathbf{B})$ dönüşümü verilsin. Eğer $\mathbf{E}$ deki her bir $f : A \rightarrow B$ dönüşümü için $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$ oluyorsa η ya bir *doğal dönüşüm* denir ve $\eta : F \rightarrow G$ ile gösterilir [3, s. 74].

Örnek 2.1.13: $\mathcal{U} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathcal{U}(A, \tau) = A$ ve $f : (A, \tau) \rightarrow (B, \sigma)$ için $\mathcal{U}(f) = f : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlı *unutkan fanktor* ve $\mathcal{D} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$, $\mathcal{D}(A) = (A, P(A))$ ve $f : A \rightarrow B$ için $\mathcal{D}(f) = f : (A, P(A)) \rightarrow (B, P(B))$ şeklinde tanımlı diskre fanktor olsun. $\alpha : 1_{\mathbf{Set}} \rightarrow \mathcal{U} \circ \mathcal{D}$ ve $\beta : \mathcal{D} \circ \mathcal{U} \rightarrow 1_{\mathbf{Top}}$ doğal dönüşümdür ($1_E : E \rightarrow E$, $A \mapsto 1_E(A) = A$ ve $f : A \rightarrow B$ için $1_E(f) = f$ şeklinde tanımlı birim fanktordur).

Tanım 2.1.14: E ve B birer kategori, R ve L de $E \xrightarrow{R} B$, $B \xrightarrow{L} E$ şeklinde iki fanktor olmak üzere; aşağıdaki şartlar sağlanırsa L ye R nin *sol adjointi* veya R ye L nin *sağ adjointi* denir [3, s. 295].

1. $\eta : I \rightarrow \text{RoL}$ ve $\varepsilon : \text{LoR} \rightarrow I$ doğal dönüşümler olmalıdır.
2. $L \xrightarrow{L\eta} \text{LRL} \xrightarrow{\varepsilon L} L$ de $(\varepsilon L) \circ (L\eta) = I$ ve $R \xrightarrow{\eta R} \text{RLR} \xrightarrow{R\varepsilon} R$ de $(R\varepsilon) \circ (\eta R) = I$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Örnek 2.1.15: $\mathcal{U} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktor ve $\mathcal{D} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ diskre fanktorlar için $\mathcal{U} \mathcal{D}$ nin sağ adjointidir.

Tanım 2.1.16: E bir kategori, I bir indis cümlesi, $i \in I$ olmak üzere B ve $B_i \in \text{Ob}(E)$ olsun. $f_i : B \rightarrow B_i$ dönüşümler ailesine *kaynak* denir. B ye kaynağın tanım bölgesi (domain), $(B_i)_{i \in I}$ ailesine de kaynağın değer bölgesi (codomain) denir [3, s. 155].

Tanım 2.1.17: $f_i : B \rightarrow B_i$, E kategorisinde bir kaynak olsun. Eğer herhangi bir $B' \xrightarrow{r,s} B$ dönüşüm çifti ve her $i \in I$ için $f_i \circ r = f_i \circ s$ olması $r = s$ olmasını gerektiriyorsa yani, f_i dönüşümleri soldan sadeleşebiliyorsa $f_i : B \rightarrow B_i$ kaynağına *mono-kaynak* denir [3, s. 156].

Tanım 2.1.18: E ve B iki kategori ve $\mathcal{U} : E \rightarrow B$ bir fanktor olsun.

1. $\{A_i : i \in I\}$, E nin nesneleri, $B_i \in \text{Ob}(B)$ ve $f_i : B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)$, B de $\mathcal{U}$ -kaynağı olsun. $\{f_i : B \rightarrow B_i = \mathcal{U}(A_i)\}$ ailesinin bir *başlangıç kaldırması (initial lift)* $A \in \text{Ob}(E)$ nesnesi ve $\mathcal{U}(\bar{f}_i) = f_i$ ve $\mathcal{U}(A) = B$ olacak şekildeki $\bar{f}_i : A \rightarrow A_i$ E de dönüşümler ailesi aşağıdaki şartı sağlamalıdır [3, s. 165]:

Eğer her $Y \in Ob(\mathbf{E})$ ve her $\bar{g}_i : Y \rightarrow A_i$, $\mathbf{E}$ deki dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $f_i \circ h = g_i = \mathcal{U}(\bar{g}_i)$ olacak şekilde bir $h : \mathcal{U}(Y) \rightarrow B$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $\bar{f}_i \circ \bar{h} = \bar{g}_i$ olacak şekilde en az bir $\bar{h} : Y \rightarrow A$ dönüşümü vardır ve $\mathcal{U}(\bar{h}) = h$ dır.

Eğer $\bar{f}_i : A \rightarrow A_i$ bir başlangıç kaldırma ise A daki yapıya, $\bar{f}_i$ ler tarafından A_i lerden elde edilen yapı denir.

2. $\{A_i : i \in I\}$, $\mathbf{E}$ nin nesneleri, $B_i \in Ob(\mathbf{B})$ ve $f_i : \mathcal{U}(A_i) = B_i \rightarrow B$, $\mathbf{B}$ de $\mathcal{U}$ -kavşağı olsun. $\{f_i : \mathcal{U}(A_i) = B_i \rightarrow B\}$ ailesinin bir *bitiş kaldırması (final lift)* $\mathcal{U}(f_i) = f_i$ ve $\mathcal{U}(A) = B$ olacak şekildeki $\bar{f}_i : A_i \rightarrow A$ $\mathbf{E}$ de dönüşümler ailesi aşağıdaki şartı sağlamalıdır [3, s. 170]:

Eğer her $Y \in Ob(\mathbf{E})$ ve her $\bar{g}_i : A_i \rightarrow Y$, $\mathbf{E}$ deki dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $h \circ f_i = g_i = \mathcal{U}(\bar{g}_i)$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow \mathcal{U}(Y)$ dönüşümü varsa her $i \in I$ için $\bar{h} \circ \bar{f}_i = \bar{g}_i$ olacak şekilde en az bir $\bar{h} : A \rightarrow Y$ dönüşümü vardır ve $\mathcal{U}(\bar{h}) = h$ dır.

Eğer $\bar{f}_i : A_i \rightarrow A$ bir *bitiş kaldırma* ise A daki yapıya, $\bar{f}_i$ ler tarafından A_i lerden elde edilen yapı denir.

Tanım 2.1.19: $\mathbf{E}$ bir kategori ve T de $\mathbf{E}$ nin bir nesnesi olsun. Eğer $\mathbf{E}$ nin her A nesnesi için $E(A, T) = \{f : f : A \rightarrow T \text{ dönüşüm}\}$ tek elemanlı ise T ye $\mathbf{E}$ nin *son (terminal)* nesnesi denir. Terminal nesnenin alt nesnelerine *sabit nesne* denir [3, s.92].

2.2. Süzgeçler

Tanım 2.2.1: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

1. Bir $U \subset X$ alt cümlesi x noktasının bir komşuluğudur ancak ve ancak $x \in G \subset U$ olacak şekilde en az bir $G \in \tau$ vardır.

x noktasının τ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan ailesi $U_\tau(x)$ veya topolojinin belirtmenin gerekmediği yerlerde kısaca $U(x)$ ile göstereceğiz ve buna “ x in komşuluklar sistemi” diyeceğiz.

2. $M \subset X$ alt cümlesi için bir $U \subset X$ alt cümlesinin M nin bir komşuluğu olması için gerek ve yeter şart $M \subset G \subset U$ olacak şekilde en az bir $G \in \tau$ mevcut olmasıdır [32].

Tanım 2.2.2: X boş olmayan bir cümle ve $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$, X 'in kuvvet cümlesini gösterebilir. $\mathcal{F}$, $P(X)$ in bir alt sınıfı aşağıdaki 3 koşulu sağlıyorsa X üzerinde bir süzgeçtir.

- 1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dır,
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dır,
- 3) $\forall A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in \mathcal{F}$ dır [9].

(1) ve (2) aksiyomundan $\mathcal{F}$ süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve (3) aksiyomundan $\mathcal{F}$ süzgecine ait her sayıda kümelerin birleşiminin $\mathcal{F}$ süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca (1) aksiyomundan $P(X)$ kümesinin kendisi bir süzgeç değildir. (3) aksiyomu ise süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir.

X kümesi üzerinde bir $\mathcal{F}$ süzgeci var ise bu küme üzerinde bir yapı tanımlanmış demektir ve X kümesi de $\mathcal{F}$ ile süzölmüş kümedir.

Örnek 2.2.3: X herhangi bir küme ve X in boş olmayan bir alt kümesi Y olsun. X 'in alt kümesi olan Y 'yi kapsayan kümelerin sınıfı olan

$$\mathcal{F} = \{A \mid Y \subset A \subset X\}$$

kümesi X üzerinde bir süzgeçtir. Gerçekten,

1) $Y \neq \emptyset$ ve $Y \subset A$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dır. O halde $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir.

2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow Y \subset A \subset X$ ve $Y \subset B \subset X$

$$\Rightarrow Y \subset A \cap B \subset X$$

$$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

3) $A \in \mathcal{F}$ ise $Y \subset A \subset X$ ve $A \subset B$ ise $Y \subset A \subset B \subset X$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{F}$$

Bu tür süzgeçlere temel süzgeç denir.

Teorem 2.2.4: Hiçbir sonlu arakesiti boş olmayan $A \subset P(X)$ 'in sonlu arakesitlerinden oluşan M sınıfının yani

$$M = \left\{ G = \bigcap_{A \in L} A \mid L \subset A \text{ sonlu} \right\}$$

sınıfının kümelerini kapsayan tüm altkümelerinin oluşturduğu

$$\mathcal{F} = \{ F \mid F \supset G, G \in M \}$$

sınıfı X üzerinde A 'yı içeren bir süzgeçtir.

İspat:

$A \subset \mathcal{F}$ olduğu aşikardır. Şimdi $\mathcal{F}$ 'nin X üzerinde bir süzgeç olduğunu gösterelim.

(1) $\emptyset \notin M$ olduğundan $\forall F \in \mathcal{F}$ için $F \neq \emptyset$ yani $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(2) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ dir. Gerçekten $F_1 \in \mathcal{F}$ olduğundan $\exists G_1 \in M$ vardır ki $F_1 \supset G_1$ dir. Benzer şekilde $F_2 \in \mathcal{F}$ olduğundan $\exists G_2 \in M$ vardır ki $F_2 \supset G_2$ dir. O halde $F_1 \cap F_2 \supset G_1 \cap G_2$ den $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ elde edilir.

(3) $\forall F \in \mathcal{F}$ ve $F \subset K$ ise $K \in \mathcal{F}$

$\exists G \in M$ vardır ki $F \supset G$ dir. Bu durumda $K \supset G$ olacağından $K \in \mathcal{F}$ dir.

Süzgeçler artan bir yapıda olduğundan $P(X)$ kümesinin $\subset$ bağıntısına göre kısmî sıralanmış bir küme olmasından aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Örnek 2.2.5: (Frechet Süzgeci)

$\mathcal{F} = \{ A^c \mid A \subset \mathbb{N} \text{ sonlu} \}$ küme sınıfı $\mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeçtir. Bu süzgece Frechet süzgeci denir.

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dır.

(2) $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim.

$A \in \mathcal{F}$ ise A^c sonludur.

$B \in \mathcal{F}$ ise B^c sonlu $\Rightarrow A^c \cup B^c$ sonlu

$$\Rightarrow (A \cap B)^c \text{ sonlu}$$

$$\Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{F} \text{ dır.}$$

(3) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

$A \in \mathcal{F}$ ise A^c sonlu

$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$ sonlu

$$\Rightarrow (B^c)^c \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{F} \text{ dır.}$$

Tanım 2.2.6: X üzerindeki tüm süzgeçlerin sınıfı $\mathcal{F}(X)$ ile gösterilir. Eğer F ve G iki süzgeç ve $F \subseteq G$ ise, G 'ye F 'den daha incedir veya F 'ye : G 'den daha kabadır denir, $F \leq G$ veya $G \geq F$ şeklinde gösterilir.

F süzgeci için $G \geq F$ olduğunda $F = G$ oluyorsa F 'e ultrasüzgeç denir. Bu da F den daha ince süzgecin var olmadığı anlamına gelir. X üzerinde ultrasüzgeçlerin sınıfı $\mathcal{U}(X)$ ile gösterilir.

$\mathcal{F}$ süzgeç ve $\cap \{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$ ise $\mathcal{F}$ 'e sabit süzgeç denir. Ayrıca $\cap \{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$ ise $\mathcal{F}$ 'e free süzgeç denir.

Tanım 2.2.7: Teorem 2.2.4'de belirttiğimiz $\mathcal{F}$ süzgecine A 'nın doğurduğu süzgeç ve A ya bu süzgecin alt tabanı (bazı) denir M de biraz sonra göreceğimiz ki süzgeç tabanıdır

(bazıdır). Buradan $A \subset M \subset \mathcal{F}$ olduğu aşıkardır. Teorem 2.2.4 de A nın doğurduğu $\mathcal{F}$ süzgeci A yı içeren süzgeçlerin en kabası olan $\mathcal{F}(A)$ 'ya eşittir.

İspat: A 'yı içeren tüm süzgeçler $\{F_i\}_{i \in I}$ olduğuna göre

$$\mathcal{F}(A) = \bigcap_{i \in I} F_i \text{ dir.}$$

Buradan $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}$ olduğu bellidir. Şimdi $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(A)$ olduğunu gösterelim.

$\forall F \in \mathcal{F}$ olduğu için $\mathcal{F}$ 'in tanımından $\exists A \in \mathcal{A}$ vardır ki, $F \supset A$ dır. Diğer taraftan $A \subset \mathcal{F}(A)$ olduğuna göre $A \in \mathcal{F}(A)$ dır. $\mathcal{F}(A)$ süzgeç olduğundan (f3) aksiyomu gereğince $A \in \mathcal{F}(A)$ ve $F \supset A$ olduğundan $F \in \mathcal{F}(A)$ olur.

Bundan sonra $A \subset P(X)$ in doğurduğu süzgeci $\mathcal{F}(A)$ ile göstereceğiz.

Tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen sabit süzgeç $\dot{x}$ ile ya da $[x]$ gösterilir. Bu ise tek nokta $\{x\}$ cümlesi tarafından üretilen sabit süzgecin ultrasüzgeç olduğunu doğrular. Gerçekten her bir sabit ultra süzgeç tek nokta cümle tarafından üretilmiştir. Süzgeç tanımı (f3) aksiyomu X üzerindeki bütün süzgeçlerin X 'i içerdiğini gerektirir. Böylece X üzerindeki en kaba süzgeç $\dot{x}$ dir. Bu da $\forall \mathcal{F} \in F(X)$ için $\mathcal{F} \geq X$ (F daha incedir).

Tanım 2.2.8: (X, τ) topolojik uzayının keyfi bir x noktasının tüm komşuluklarının cümlesi bir süzgeçtir ve bu süzgece x noktasının komşulukları süzgeci denir. Bu süzgeç $V_\tau(x)$ ile gösterilir ve

$$\dot{x} \geq V_\tau(x) \text{ dir.}$$

Tanım2.2.9: (x_n) : x 'in elemanlarından oluşan bir dizisi olsun. (x_n) dizisi ile birleştirilmiş temel süzgeç; (x_n) dizisinin sonsuz terimini içeren x 'in tüm altcümlelerinin sınıfıdır. (x_n) dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci olan F süzgeci $F \rightarrow (x_n)$ notasyonu ile gösterilir.

Eğer (x_n) dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci $\mathcal{F}$ ve (x_n) dizisinin bir alt dizisinin birleştirilmiş temel süzgeci G ise $G \geq \mathcal{F}$ dir. Çünkü (x_n) dizisinin sonsuz terimini içeren bir cümle aynı zamanda o dizinin keyfi bir alt dizisinin sonsuz terimini de ihtiva eder.

2.3 Süzgeç Tabanları

Tanım 2.3.1: X ' in kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{B}$ küme sınıfı aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa $\mathcal{B}$ 'ye X üzerinde bir süzgeç tabanı denir.

$$1) \mathcal{B} \neq \emptyset \text{ ve } \emptyset \notin \mathcal{B}$$

$$2) \forall A, B \in \mathcal{B} \text{ iken } C \subset A \cap B \text{ olacak şekilde } \exists C \in \mathcal{B} \text{ vardır.}$$

Örnek 2.3.2: X kümesinin boştan farklı A alt kümesi sadece X üzerinde bir süzgeç tabanı oluşturur, yani süzgeci üretir. $\mathcal{B} = \{A\}$ bir süzgeç tabanıdır ve Örnek 2.2.3 deki süzgeci üretir.

Sonuç 2.3.3: Her süzgeç aynı zamanda bir süzgeç tabanıdır fakat tersi doğru değildir.

(f1) ve (f2) süzgeç tabanı aksiyomlarını sağladığından her süzgeç aynı zamanda bir süzgeç tabanıdır.

Örnek 2.3.4: (X, τ) topolojik uzayının herhangi bir x noktasının $E(x)$ komşuluk tabanı bir süzgeç tabanıdır.

$$(1) \forall A \in E(X) \text{ için } x \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \emptyset \notin E(x)$$

$$(2) \forall A, B \in E(x) \text{ için } A \cap B \in V_{\tau(x)} \text{ dir. O halde } \exists C \in E(x) \text{ vardır ki } C \subset A \cap B \text{ dir.}$$

O halde $E(x)$ komşuluk tabanıdır.

Sonuç 2.3.5: X üzerindeki her $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı elemanları $\mathcal{B}$ nin kümelerinin üst kümelerinden oluşan bir $\mathcal{F}$ süzgeç belirtir.

İspat: $\mathcal{F} = \{F \mid F \supset B \in \mathcal{B}\}$ kümeler sınıfının X üzerinde bir süzgeç olduğunu, yani 3 süzgeç aksiyomunu sağladığını gösterelim.

$$(1) \phi \notin \mathcal{B} \Rightarrow \phi \notin \mathcal{F}$$

$$(2) \forall F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ni F_1 \supset B_1, F_2 \supset B_2$$

$$\Rightarrow F_1 \cap F_2 \supset B_1 \cap B_2$$

$\mathcal{B}$ süzgeç tabanının 2. aksiyomundan $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ için en az bir $B \in \mathcal{B}$ vardır ki $B \subset B_1 \cap B_2$ dir. $(B_1 \cap B_2 \supset B)$ O halde $F_1 \cap F_2 \supset B$ olur. Bu da $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterir.

(3) $\forall F_1 \in \mathcal{F}, F_1 \subset F_2$ iken $F_2 \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. $F_1 \in \mathcal{F}$ ise en az bir $B \in \mathcal{B}$ vardır öyleki $F_1 \supset B$ dir. $F_1 \subset F_2$ olduğundan $F_2 \supset B \Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$ dir.

Tanımdan anlaşıldığı gibi $\mathcal{F}$ nin her cümlesi $\mathcal{B}$ nin bir cümlesini içerir.

Buradaki $\mathcal{F}$ süzgecine $\mathcal{B}$ süzgeç tabanının ürettiği (doğurduğu) süzgeç denir ve $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ dir. Genel olarak X üzerinde başka süzgeç tabanları da vardır. Çoğu zaman bir süzgecin kendisiyle çalışmaktansa süzgeç bazıyla çalışma daha kolaydır.

Örnek 2.3.6: (X, τ) topolojik uzayının herhangi bir $x \in X$ noktasının $E(x)$ komşuluk temeli bir süzgeç tabanı idi. Bu taban $V_{\tau(x)}$ süzgecini üretir ve $E(x) \subset V_{\tau(x)}$ dir.

Örnek 2.3.7: $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ kümesini alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $S_k = \{x_n \mid n \geq k\}$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sınıfı x üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

İspat:

(1) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $S_k \neq \phi$ olduğundan $\phi \notin \mathcal{B}$ ve $\mathbb{N} \neq \phi$ olduğundan $\mathcal{B} \neq \phi$ dir.

(2) $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ için $S_{k_1}, S_{k_2} \in \mathcal{B}$ dir.

$k = \text{Mak} \{k_1, k_2\}$ olmak üzere $S_k = S_{k_1} \cap S_{k_2}$ dir ve $S_k \in \mathcal{B}$, $S_{k_1} \cap S_{k_2} \supset S_k$

$\mathcal{B}$ süzgeç tabanına $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bileşen süzgeç tabanı denir.

X 'in alt cümlelerinin bir sınıfı S ve $\mathcal{B}$ de S 'nin cümlelerinin sonlu kesişimlerini ihtiva etsin. Bu durumda S nin sonlu hiçbir altkümesinin boş kesişimleri yoksa $\mathcal{B}$ bir süzgeç bazı oluşturur. Eğer $\mathcal{B}$ bir süzgeç bazı oluşturuyorsa bu durumda $\mathcal{F}$ süzgeci $\mathcal{B}$ tarafından üretilir ve S 'yi kapsayan en kaba süzgeçtir. S 'ye $\mathcal{F}$ 'nin alt bazı denir.

Örnek 2.3.8: X ve Y iki cümle $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç ise $\{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$ görüntü kümesi bir süzgeç tabanıdır.

Çözüm: $f(F)$ görüntü kümesinin baz aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

(1) $F \neq \emptyset$ iken $f(F) \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Her $A \in \mathcal{F}$ için $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathcal{F}$ olduğundan $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$

(2) Her $A, B \in f(\mathcal{F})$ ise en az bir $C \in f(\mathcal{F})$ için $C \subset A \cap B$ olduğunu göstereceğiz, $A, B \in f(\mathcal{F})$ ise $A = f(F_1)$ ve $B = f(F_2)$ olacak şekilde $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ vardır. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}$ süzgeç olduğundan $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ olur.

$A \cap B = f(F_1) \cap f(F_2) \supset f(F_1 \cap F_2)$ olduğundan $C = f(F_1 \cap F_2) \in f(\mathcal{F})$ alınırsa $C \subset f(F_1) \cap f(F_2)$ olur.

Buradan $C \subset A \cap B$ elde edilir.

Uyarı 2.3.9: Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu örten ise $\{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$ görüntü kümesi de bir süzgeçtir.

Teorem 2.3.10: X ve Y herhangi iki küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{B}$, X üzerinde bir süzgeç tabanı ise

$$f(\mathcal{B}) = \{f(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

görüntüsü de Y üzerinde bir süzgeç tabanıdır.

İspat: $f(\mathcal{B})$ nin baz özelliklerini sağladığını gösterelim

(1) $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı olduğundan $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin \mathcal{B}$ dir. $f(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ ve $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$ olduğunu gösterelim $\forall B \in \mathcal{B}$ için $B \neq \emptyset \Rightarrow f(B) \neq \emptyset$ ve ayrıca $\emptyset \notin \mathcal{B}$ olduğundan $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$ dir.

(2) Her $f(B_1), f(B_2)$ için $f(B) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$ olacak şekilde enaz bir $f(B) \in f(\mathcal{B})$ olduğunu gösterelim $f(B_1), f(B_2) \in f(\mathcal{B})$ alalım

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı olduğundan $\exists B \in \mathcal{B}$ vardır ki $B \subset B_1 \cap B_2$ dir.

O halde, $f(B) \subset f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$ olduğundan

$f(B) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$ elde edilir.

Tanım 2.3.11: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $\mathcal{F}$ de X üzerinde bir süzgeç olsun. $\{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$ görüntü kümesini taban olarak kabul eden Y üzerindeki süzgece $\mathcal{F}$ süzgecinin f 'e göre görüntüsü denir ve $f(\mathcal{F})$ ile gösterilir. Yani,

$$f(\mathcal{F}) = \{F' \supset f(F) | F \in \mathcal{F}\} \text{ dir.}$$

Tanım 2.3.12: $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}'$ 'de Y üzerinde süzgeç olsun. Tabanı $\{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}'\}$ kümeler sınıfı olan X üzerindeki süzgece $\mathcal{F}'$ süzgecinin f fonksiyonuna göre ters görüntüsü denir ve $f^{-1}(\mathcal{F}')$ ile gösterilir. O halde;

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{A \supset f^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}'\} \text{ dir.}$$

Tanım 2.3.13: X kümesi üzerinde boş olmayan süzgeçler ailesi $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ olsun. X

üzerinde tüm $\mathcal{F}_i$ lerden kaba olan $\mathcal{F}$ süzgeci $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ dir. Bu $\mathcal{F}$ süzgeci $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$

ailesinin en büyük alt sınırıdır.

Teorem 2.3.14: $\mathcal{B}_1$ ve $\mathcal{B}_2$ ler X kümesi üzerinde iki süzgeç tabanı olsunlar. Bu taktirde aşağıdaki özellikler denktir.

(i) $\mathcal{B}_1$ 'in ürettiği $\mathcal{F}_1$ süzgeci, $\mathcal{B}_2$ nin ürettiği $\mathcal{F}_2$ süzgecinden incedir.

(ii) $\mathcal{B}_2$ 'nin herhangi bir kümesi, $\mathcal{B}_1$ in herhangi bir kümesini kapsar.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \mathcal{B}_2$ olduğundan $\forall A_2 \in \mathcal{B}_2$ kümesi $\mathcal{F}_1$ 'e aittir. Sonuç 2.3.5' ye göre $\mathcal{B}_2$ 'nin herhangi bir A_2 kümesi; $\mathcal{F}$ in $\mathcal{B}_1$ tabanına ait bir A_1 kümesini kapsar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\forall A_2 \in \mathcal{B}_2$ kümesi bir $A_1 \in \mathcal{B}_1$ kümesini kapsıyor ise $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ olduğunu gösterelim.

$\forall F_2 \in \mathcal{F}_2$ alalım. Sonuç 2.3.5 ' ye göre enaz bir $A_2 \in \mathcal{B}_2$ vardır ki $A_2 \subset F_2$ dir. $A_2 \supset A_1$ olduğundan yine Sonuç 2.3.5 gereğince $A_2 \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2$ dir.

Tanım 2.3.15: $\mathcal{F}$, (X, τ) uzayındaki bir süzgeç ve $x \in X$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasının $\mathcal{N}(x)$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise, yani $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ ise $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor denilir ve $\mathcal{F} \rightarrow x$ veya $\lim \mathcal{F} = x$ şeklinde gösterilir.

Eğer X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor ise, X üzerinde $\mathcal{F}$ den ince olan tüm süzgeçlerin de x noktasına yakınsayacağı tanımdan aşıkardır. Ayrıca X kümesi üzerinde x noktasına yakınsayan tüm süzgeçlerin arakesiti de $\mathcal{N}(x)$ komşuluklar süzgecidir.

Tanım 2.3.16: $\mathcal{B}, (X, \tau)$ topolojik uzayındaki bir süzgeç tabanı ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{B}$ nin her $\mathcal{B}$ kümesi $\mathcal{N}(x)$ nin bir N kümesi tarafından ihtiva ediliyor ise, $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı x noktasına yakınsıyor denilir. Yani $\mathcal{B}$ nin doğurduğu $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsıyor ise, $\mathcal{B}$ süzgeç tabanı x noktasına yakınsıyor denir. Bir süzgeç veya tabanı birden fazla noktaya yakınsayabilir.

Bir süzgeç veya süzgeç tabanı birden fazla noktaya yakınsayabilirken daha sonra ispatlayacağız ki eğer uzay hausdorff uzayı ise tek noktaya yakınsarlar.

Teorem 2.3.17: X uzayının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki yakınsak bir süzgecin tek bir noktaya yakınsamasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: X uzayı Hausdorff uzayı olsun. Bu uzaydaki yakınsak bir $\mathcal{F}$ süzgecinin tek bir noktaya yakınsadığını göstereceğiz. $\mathcal{F}$ süzgecinin x ve y gibi farklı iki noktaya yakınsadığını kabul edelim. X uzayı H-uzayı olduğundan $\exists N \in \mathcal{N}(x)$ ve $\exists M \in \mathcal{N}(y)$ vardır ki $N \cap M = \emptyset$ dur. Oysa $\mathcal{F}$ süzgeci x noktasına yakınsadığından $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{F}$ dir ve dolayısı ile $N \in \mathcal{F}$ dir. Benzer şekilde $M \in \mathcal{F}$ dir. (f_2) süzgeç aksiyomundan $N \cap M = \emptyset \in \mathcal{F}$ elde edilir ki, bu da (f_1) ile çelişir. O halde $x=y$ dir, yani $\mathcal{F}$ tek noktaya yakınsar.

$(\Leftarrow)$: Yakınsak bir süzgeç tek noktaya yakınsasın, X uzayının H-uzayı olmadığını kabul edelim. O halde $\exists x, y \in X$ vardır ki $\forall N \in \mathcal{N}(x), \forall M \in \mathcal{N}(y)$ için $N \cap M \neq \emptyset$ dir. Buradan $N \not\subset M^c$ elde edilir ve Teorem 2.3.14 gereğince $\forall M \in \mathcal{N}(y)$ için $M \in \mathcal{N}(x)$ dir. O halde $\mathcal{N}(y) \subset \mathcal{N}(x)$ elde edilir ki bu da hipoteze aykırıdır. Çünkü X uzayındaki $\mathcal{N}(x)$ süzgeci hem x hem de y noktasına yakınsar.

Teorem 2.3.18: X ve Y herhangi iki küme $f : X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $\mathcal{B}'$, Y üzerinde bir süzgeç tabanı olsun.

Bu taktirde

$f^{-1}(\mathcal{B}') = \{f^{-1}(B') | B' \in \mathcal{B}'\}$ kümeler sınıfının da X üzerinde bir süzgeç tabanı olması için gerek ve yeter şart $B' \in \mathcal{B}'$ için $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $f^{-1}(\mathcal{B}')$ sınıfı X üzerinde süzgeç tabanı olduğuna göre $\forall B' \in \mathcal{B}'$ için $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ dır.

$(\Leftarrow)$: $\forall B' \in \mathcal{B}'$ için $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ olduğundan 1. aksiyom sağlanır.

$\forall f^{-1}(A'), f^{-1}(B') \in f^{-1}(\mathcal{B}')$ için

$$f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cap B')$$

$A', B' \in \mathcal{B}'$ ve $\mathcal{B}'$ 'nin X üzerinde süzgeç tabanı olması nedeniyle $\exists C' \in \mathcal{B}'$ vardır ki $C' \subset A' \cap B'$ dir.

Buradan

$$f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(A' \cap B') \supset f^{-1}(C')$$

elde edilir.

2.4. Cauchy Uzaylar

“Cauchy” terimi Fransız matematikçi Augustin Cauchy’in isminden ortaya çıkmasına karşın, yaygın olarak küçük harfle başlayan şekliyle kullanıla gelmiştir. Cauchy isim olarak, reel analizdeki Cauchy dizileri kavramına dayanmaktadır. Süzgeçlerin varolması ve düzgün uzayların ortaya çıkması neticesinde, Cauchy süzgeçleri topolojik teoride Cauchy dizilerine genelleştirilmiştir. Yakınsak teoride ise, Cauchy yakınsaklık anlamında kullanılmıştır. Weil [26] şu ifadeyi ispatladı: Düzgün uzay içerisindeki bir süzgeç “Cauchy” dir ancak ve ancak düzgün uzay tamlaması içerisinde bir nokta mevcuttur öyle ki süzgeç bu noktaya yakınsaktır. Kowalsky [27] Cauchy süzgeci kavramını temel kavram olarak kullanarak nerdeyse aynı neticeye ulaşmıştır. Cook ve Fischer [28] ün düzgün yakınsak uzayları ortaya koyması ve böyle uzaylar içerisinde Cauchy uzayının tanımını vermesi Cauchy uzaylarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ancak Cauchy uzaylarının aksiyomatik tanımı 1968 tarihinde Keller [29] tarafından yapılmıştır. Daha sonra Cauchy uzayları çeşitli uzayların tamlamalarını oluşturmada yaygın olarak kullanılan bir araç olmuştur. Reed [30] Cauchy uzayları tamlamalarının bir tam sınıfını geliştirmiştir. Cauchy uzayları düzgün uzaylar gibi kompatifikasyon ve tamlama için kullanılmıştır. Bu arada tamlık ve düzgün süreklilik gibi kavramlar tanımlanmıştır ki, bunlar topolojik ve yakınsak uzaylarda mümkün değildi.

Tanım 2.4.1: Eğer α , A üzerinde en büyük öz süzgeç ise α ya *maksimum süzgeç* (*ultrafilter*) denir ve α aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

A'nın her B alt cümlesi için ya $B \in \alpha$ ya da $B^c \in \alpha$ dır.

Teorem 2.4.2: X kümesindeki $\mathcal{F}$ süzgecinin ultrasüzgeç olması için gerek ve yeter koşul $\forall A \subset X$ için ya $A \in \mathcal{F}$ veya $A^c \in \mathcal{F}$ olmasıdır [32].

Örnek 2.4.3: X herhangi bir küme ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid x \in A\}$ sınıfı X üzerinde bir ultrasüzgeçtir.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ için $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ olduğunu göstermeliyiz. $A_1 \in \mathcal{F}_1$ alalım. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ olduğuna göre $x \in A_1$ veya $x \notin A_1$ dir. $x \notin A_1$ olması mümkün değildir. Çünkü $x \in A_1^c \Rightarrow A_1^c \in \mathcal{F}_1$ den

$$\Rightarrow A_1 \cap A_1^c = \emptyset \in \mathcal{F}_1 \text{ çelişmesine varılır.}$$

O halde yani $A_1 \in \mathcal{F}$ dolayısıyla $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ bulunur.

Teorem 2.4.4: $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $\mathcal{F}$ de X üzerinde bir ultrasüzgeç olsun. Bu taktirde $\mathcal{F}$ süzgecinin f'e göre

$f(\mathcal{F}) = \{F' \supset f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ görüntü süzgeci de bir ultrasüzgeçtir [32].

Önerme 2.4.5: a) $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \wedge\}$, X üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı olsun. Süzgeçler

sınıfının infimumu $\bigcap_{\alpha \in \wedge} \mathcal{F}_\alpha = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \wedge} F_\alpha : F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \right\}$ dır.

b) $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$, X üzerindeki iki süzgeç olsun. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ nin supremumu $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ vardır $\Leftrightarrow F \in \mathcal{F}$ ve $\forall G \in \mathcal{G}$ için $F \cap G \neq \emptyset$ dır. Eğer $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ varsa bu durumda $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \{F \cap G : F \in \mathcal{F} \text{ ve } G \in \mathcal{G}\}$ dır [32].

Önerme 2.4.6: $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ X üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı olsun. $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ nin

supremumu vardır ancak ve ancak herhangi sonlu $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \wedge$ alt sınıfı ve herhangi

$F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ için $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$ dir ve $\bigvee_{\alpha \in \wedge} \mathcal{F}_\alpha$ ile gösterilir. Bundan başka

$\bigvee_{\alpha \in \wedge} \mathcal{F}_\alpha$ varsa

$$\bigvee_{\alpha \in \wedge} \mathcal{F}_\alpha = \left\{ F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \wedge, F_{\alpha_i} \in \mathcal{F}_{\alpha_i} \text{ } i = 1, 2, \dots, n \right\} \text{ dir.}$$

$\mathcal{F}$, X üzerinde bir süzgeç ve A , X in bir alt cümlesi olsun. Eğer her $F \in \mathcal{F}$ için $A \cap F \neq \emptyset$ ise bu durumda $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ süzgeç bazı oluşturur ve bu sınıf $\mathcal{F}$ den daha ince bir süzgeç üretir. Bundan başka $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ A da $\mathcal{F}_A$ ile gösterilen bir süzgeç oluşturur ve bu süzgece A üzerinde $\mathcal{F}$ in izi denir.

Genellikle ultra süzgeçlerle çalışmak daha uygundur. Aşağıdaki önerme bir ultrasüzgeci karakterize etmek için diğer iki şartı sağlar.

Önerme 2.4.7: $\mathcal{F} \in F(X)$ olsun. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

- a) $\mathcal{F}$ bir ultrasüzgeçtir.
- b) $A \cup B \in \mathcal{F}$ ise $A \in \mathcal{F}$ veya $B \in \mathcal{F}$ dir.
- c) $A \subseteq X$ ise $A \in \mathcal{F}$ veya $X - A \in \mathcal{F}$ dir [32].

Sonuç 2.4.8: $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in F(X)$ ve $\mathcal{H} \in U(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{H} \geq \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ise $\mathcal{H} \geq \mathcal{F}$ veya $\mathcal{H} \geq \mathcal{G}$ dir [32].

Önerme 2.4.9: Kabul edelim ki $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.

- (a) $\mathcal{F} \in U(X)$ ise $f(\mathcal{F}) \in U(Y)$ dir.
- (b) $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ X üzerindeki süzgeçlerin sınıfı ise bu durumda $f\left(\bigcap_{\alpha \in \wedge} \mathcal{F}_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \wedge} f(\mathcal{F}_\alpha)$ dir [32].

Cauchy yapıları ilk olarak bazı düzgün yakınsak uzayların Cauchy süzgeçlerinin bir cümlesi olarak tanımlandı. Şimdi süzgeç uzayları ve C -süzgeç uzaylarını tanımlayacağız.

Tanım 2.4.10: X cümlesi üzerindeki süzgeçlerin bir sınıfı C , aşağıdaki şartları sağlıyorsa C alt cümlesine X cümlesi üzerinde Cauchy yapısı ve (X, C) ikilisine de Cauchy Uzayı denir.

$(c_1) \forall x \in X \text{ için } [x] \in C,$

$(c_2) \mathcal{F} \in C \text{ ve } \mathcal{F} \leq \mathcal{G} \text{ ise } \mathcal{G} \in C,$

(c_3) Eğer $\mathcal{F} \in C, \mathcal{G} \in C$ ve $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ mevcut ise $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in C$ dir.

(X, C) ye Cauchy süzgeçleri denir. (c_1) ve (c_2) şartını sağlayan (X, C) ikilisine pre-Cauchy uzayı denir.

(X, C) ve (Y, D) iki Cauchy uzayı olmak üzere $f: (X, C) \rightarrow (Y, D)$ dönüşümü Cauchy süreklidir ancak ve ancak $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olacak öyle ki $\mathcal{F} \in C$ ise $f(\mathcal{F}) \in D$ sağlanmalıdır.

(X, C) süzgeç uzayı ve C aşağıdaki (c_3) şartını sağlıyorsa (X, C) nin C -süzgeç uzayı olduğu görülür.

$(c_3) \mathcal{F} \sim_c [x] \text{ ise } \mathcal{F} \cap [x] \in C \text{ dir.}$

(X, C) bir yakınsak süzgeç uzayı ise $\mathcal{F} \in C$ olduğunda $\mathcal{F}, x$ 'e q yakınsaktır denir ve $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ ile gösterilir. Bundan başka eğer her süzgeç en az bir noktaya q -yakınsaksa (X, C) 'ya hausdorff denir.

X için verilmiş herhangi iki ön yakınsak yapı p ve q olmak üzere eğer $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ olması, $\mathcal{F} \xrightarrow{p} x$ olmasını gerektiriyorsa $p \leq q$ olur.

$f: (X, q) \rightarrow (Y, p)$ iki önyakınsak uzay arasında tanımlanmış f dönüşümü $\mathcal{F} \xrightarrow{q} x$ olduğunda $f(\mathcal{F}) \xrightarrow{p} f(x)$ oluyorsa süreklidir.

Objeleri Cauchy uzayları, dönüşümleri Cauchy sürekli dönüşümler olan kategori $FIL(CHY)$ ile gösterilir. Ayrıca $FIL(CHY)$ deki tüm objeler $|FIL|(|CHY|)$ ile gösterilir.

C, D X üzerinde iki Cauchy yapısı olsun. $C \leq D$ olması için gerek ve yeter şart $D \subseteq C$ dır. Eğer $C \leq D$ ise, “ C, D ’den daha kaba” veya “ D, C ’den daha ince” diyoruz.

$(X, C), (X, D) \in |FIL|(|CHY|)$ için $C \subseteq D$ olduğunda $D \leq C$ ile tanımlanır. Buna bağlı olarak X' deki tüm süzgeç (Cauchy) yapıları complete lattice oluşturur.

Kabul edelim ki $p_c ; (X, C)$ için oluşturulmuş ön-yakınsak yapı olsun.
 $F \xrightarrow{p_c} X \Leftrightarrow F \sim \dot{x} (F \xrightarrow{q_c} x \Leftrightarrow F \cap \dot{x} \in C)$ dir.

Eğer objeler ve fixed (sabit) morfizmler için $(p(f)$ ve f , her $f \in \text{Mor}(FIL)$ için aynı fonksiyonlar olsun).

$$p : FIL \rightarrow PCONV$$

$p(X, C) = (X, p_c)$ ile tanımlanmışsa p bir fanktordur.

(X, C) süzgeç uzayı ve (X, C) için oluşturulmuş ön yakınsak p_c yapısı bir yakınsak yapı ise (X, C) ye yakınsak süzgeç uzayı veya kısaca c -süzgeç uzayı denir. Bu durumda C , c -precauchy yapısıdır.

Tüm ön yakınsak uzaylar (yakınsak uzaylar, limit uzayları) ve sürekli dönüşümler $PCONV(CONV, LIM)$ ile gösterilir.

Yani açıkça $CONV$ ve LIM , $PCONV$ ' nin bireflektif alt kategorileridir.

X bir cümle A ve B , $X \times X$ 'in birer alt kümesi ve $A^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in A\}$ ve

$A \circ B = \{(x, y) | \exists z \in X \ni (x, z) \in B \text{ ve } (z, y) \in A\}$ ile tanımlanır.

Süzgeçlerin tersi ve birleşimi de benzer şekilde tanımlanır.

2.5. Topolojik Kategori

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [4], Kent [5], Wyler [6], Schwarz [7] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, 1975'te Herrlich [4] de belli bir kaynaktan başlangıç

kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategori tanımlamıştır. Wyler [6] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır. Genel topolojide ayrılma aksiyomları, Urysohn Metrikleştirme Teoremi, Urysohn Lemması, Tietze Genişleme Teoremi gibi çok önemli teoremler karşımıza çıkmaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre uzaylar (objeler) ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Bu kısımda topolojik kategori tanımı verildi ve **CHY** nın bir topolojik kategori olduğu gösterildi. Ayrıca, initial ve final Cauchy yapılar, diskre ve indiskre Cauchy uzaylar (objeler) verildi.

Tanım 2.5.1: $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{B}$ herhangi iki kategori olsunlar. $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ fanktoru eğer belirli (düzenli ve amnestik) ise, küçük demetlere sahipse ve her $\mathcal{U}$ -kaynağı için bir başlangıç kaldırmaya sahipse veya denk olarak her $\mathcal{U}$ -kaynağı bir bitiş kaldırmaya sahipse $\mathcal{U}$ ya *topolojik fanktor* $\mathcal{E}$ ye de $\mathcal{B}$ kategorisi üzerinde topolojik kategori denir [3, s. 333, 335].

Not 2.5.2: Topolojik kategorilerde başlangıç kaldırmanın varlığı bitiş kaldırmanın varlığına denktir [33, s. 125].

Tanım 2.5.3: $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ topolojik fanktoruna sabit objeler yani alt terminal objeler tek bir yapıya sahip olduğunda $\mathcal{U}$ ya normalleştirilmiştir denir [3].

Ayrıca $X \in Ob(\mathcal{E})$ olmak üzere her $\mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{U}(Y)$ dönüşümü $\mathcal{E}$ ' de ki her Y objesi için bir $X \rightarrow Y$ dönüşümüne kaldırılabiliriyorsa X' e *diskre obje* veya her $Y \in Ob(\mathcal{E})$ için $\mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{U}(Y)$ dönüşümü $Y \rightarrow X$ dönüşümüne kaldırılabiliriyorsa X' e *indiskre obje* denir [3].

Tanım 2.5.4: $\mathcal{E}$ bir topolojik kategori ve $X \in Ob(\mathcal{E})$ olsun. $i : A \rightarrow X$ kapsama dönüşümü bir başlangıç kaldırma ise A' ya X' in *alt uzayı* denir ve $A \subset X$ ile gösterilir.

Örnek 2.5.5: **Top** kategorisi **Set** kategorisi üzerinde bir topolojik kategoridir. $\mathcal{U} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathcal{U}(A, \tau) = A$ ve $f : (A, \tau) \rightarrow (B, \sigma)$ sürekli fonksiyonu için $\mathcal{U}(f) = f : A \rightarrow B$ şeklinde tanımlanan unutkan fanktor belirlidir. Her A cümlesi için $\mathcal{U}^{-1}(A) \subset P^2(A)$ bir cümle olduğundan $\mathcal{U}$ küçük demetlere sahiptir. $\{(A_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ topolojik uzayların bir ailesi ve $f_i : A \rightarrow A_i = \mathcal{U}(A_i, \tau_i)$ kaynağı verilsin. τ^* topolojisi $\{f_i^{-1}(G_i) : G_i \in \tau_i\}$ alt bazı tarafından üretilen başlangıç topolojisi olsun. $f_i : (A, \tau^*) \rightarrow (A_i, \tau_i)$ süreklidir. $g_i : A_i = \mathcal{U}(A_i, \tau_i) \rightarrow A$ fonksiyonları verilsin. τ_* A üzerindeki g_i ler tarafından üretilen final topoloji yani, $\tau_* = \{V \subset A : g_i^{-1}(V) \in \tau_i \text{ her } i \in I\}$ olsun. $g_i : (A_i, \tau_i) \rightarrow (A, \tau_*)$ fonksiyonları süreklidir.

Örnek 2.5.6: **CHY** kategorisi **Set** kategorisi üzerinde bir topolojik kategoridir. $\mathcal{U} : \mathbf{CHY} \rightarrow \mathbf{Set}$, $\mathcal{U}((X, C)) = X$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}$ dönüşümünün bir topolojik fanktor olduğunu yani Tanım 2.5.1 in şartlarını sağladığını gösterelim.

1) $\mathcal{U}$ 'nun belirli olduğunu gösterelim;

i) $\mathcal{U}$ 'nun düzenli olduğunu göstermeliyiz. Yani her $(X, K), (Y, L) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{CHY})$ ve $f, g : (X, K) \xrightarrow{\text{cauchy-dönüşüm}} (Y, L)$ Cauchy-dönüşümleri için $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olduğunda $f = g$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$ 'nun tanımından $\mathcal{U}(f) = f$ ve $\mathcal{U}(g) = g$ olup $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olduğunda $f = g$ bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ düzenlidir.

ii) $\mathcal{U}$ 'nun amnestik olduğunu gösterelim. Bunun için,

$f : (X, K) \xrightarrow{\text{cauchy-dönüşüm}} (X, L)$, $\mathcal{U}(f) = I_X$ ve f , Cauchy-izomorfizm olsun. f nin bir birim Cauchy-dönüşüm olduğunu gösterelim. Bunun için, $K = L$ olduğunu göstermek gerekir.

Her $A \in K$ için f , Cauchy-dönüşüm olduğundan $f(A) \in L$ dir. $\mathcal{U}(f) = f = I_X$ olduğundan $f(A) = I_X(A) = A \in L$ dir. Dolayısıyla $K \subset L$ elde edilir.

f , Cauchy-izomorfizm olduğundan $f^{-1} : (X, L) \xrightarrow{\text{cauchy-dönüşüm}} (X, K)$ olur. Her $A \in L$ için f^{-1} , Cauchy-dönüşüm olduğundan $f^{-1}(A) \in K$ dir. $f^{-1} = I_X^{-1} = I_X$

olduğundan $f^{-1}(A) = I_X^{-1}(A) = A \in K$ dır. Dolayısıyla $L \subset K$ elde edilir. $K \subset L$ ve $L \subset K$ olduğundan $K = L$ bulunur.

O halde $\mathcal{U}$ amnestiktir.

(i) ve (ii)'den $\mathcal{U}$ belirli funktordur.

2) $\mathcal{U}$ 'nun küçük demetlere sahip olduğunu, yani $\mathcal{U}^{-1}(X)$ 'in her $X \in Ob(Set)$ için bir cümle olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{U}^{-1}(X) = \{(X, K) \mid \mathcal{U}(X, K) = X \quad \text{ve} \quad f : (X, K) \xrightarrow{\text{cauchy-dönüşüm}} (X, L) \quad \text{için} \\ \mathcal{U}(f) = I_X\}$$

şeklinde tanımlansın. $\Delta = \{K \mid K, X \text{ üzerinde bir Cauchy yapısı}\}$ olmak üzere, $V : \mathcal{U}^{-1}(X) \rightarrow \Delta$, $V((X, K)) = K$ şeklinde tanımlansın. V birebir ve örten olduğundan $\mathcal{U}^{-1}(X) \cong \Delta \subset P(F(X))$ olur. O halde $\mathcal{U}^{-1}(X)$ bir cümledir.

3) Her $\mathcal{U}$ – kaynağının bir başlangıç kaldırmaya sahip olduğunu gösterelim.

(X_i, K_i) , $\mathcal{U}$ nun nesneleri ve $f_i : X \longrightarrow \mathcal{U}(X_i, K_i) = X_i$ $i \in I$ **Set** de $\mathcal{U}$ - kaynağı olsun.

$K = \{F \mid f_i(F) \in K_i, i \in I\}$ şeklinde tanımlansın;

$(X, K) \in Ob(\mathbf{CHY})$ olduğunu gösterelim.

$\forall x \in X$ için $f_i[x] = [f_i(x)] \in K_i$ dır. Çünkü $(X_i, K_i) \in Ob(\mathbf{CHY})$ dır. K nın tanımından $[x] \in K$ olur. Yine $F \in K$ ve $F \subset G$ olsun. $f_i(F) \in K_i$ ve $F \subset G$ olduğundan $f_i(F) \subset f_i(G)$ dır. $(X_i, K_i) \in Ob(\mathbf{CHY})$ olduğundan $f_i(G) \in K_i$, K nın tanımından $G \in K$ dır. Eğer $F \in K$, $G \in K$ ve $F \vee G$ mevcut ise $F \cap G \in K$ olduğunu gösterelim. $F \in K$, $G \in K$ ve $F \vee G$ mevcut olsun. $f_i(F \vee G)$ mevcut ve $(X_i, K_i) \in Ob(\mathbf{CHY})$ olduğundan her $i \in I$ için $f_i(F \cap G) \in K_i$ dır. K nın tanımından $F \cap G \in K$ dır.

Buradan $(X, K) \in \text{Ob}(\mathbf{CHY})$ dir.

Şimdi $f_i : (X, K) \longrightarrow (X_i, K_i)$ nin $f_i : X \longrightarrow X_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim. $K = \{ \mathcal{F} \mid f_i(\mathcal{F}) \in K_i, i \in I \}$ şeklinde tanımlanan K nin $f_i : X \longrightarrow \mathcal{U}(X_i, K_i) = X_i$ ile verilsin.

Her $(Y, L) \in \text{Ob}(\mathbf{CHY})$, $(X_i, K_i) \in \text{Ob}(\mathbf{CHY})$ ve $\mathcal{U}$ de herhangi $h_i : (Y, L) \rightarrow (X_i, K_i)$ dönüşümlerin ailesi için en az bir $k : Y \rightarrow X$ vardır ve $\mathcal{U}(f_i) \circ k = \mathcal{U}(h_i)$ dir.

Buna göre $f_i : (X, K) \longrightarrow (X_i, K_i)$, $g_i : X \rightarrow X_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim. Her $(X_i, K_i) \in \text{Ob}(\mathbf{CHY})$ için ve $\mathbf{CHY}$ 'de

$\mathbf{CHY}$	$\mathbf{Set}$
$ \begin{array}{ccc} (X, K) & \xrightarrow{f_i} & (X_i, K_i) \\ \uparrow \scriptstyle \bar{k} & \nearrow \scriptstyle h_i & \\ (Y, L) & & \end{array} $	$ \begin{array}{ccc} \mathcal{U}((X, K)) = X & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{U}((X_i, K_i)) = X_i \\ \uparrow \scriptstyle k & \nearrow \scriptstyle h_i & \\ \mathcal{U}((Y, L)) = Y & & \end{array} $
$(f_i \circ \bar{k} = h_i)$	$(f_i \circ k = h_i)$

Şekil 2.4.1. $\mathcal{U}$ – kaynağı için başlangıç kaldırma

$h_i : (Y, L) \rightarrow (X_i, K_i)$ dönüşümler ailesi için yani $f_i \circ \bar{k} = h_i$ ve $f_i \circ k = \mathcal{U}(h_i) = h_i$ olacak şekilde $\exists \bar{k} : (Y, L) \rightarrow (X, K)$ vardır. $\bar{k}$ 'nın bir *cauchy* – dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. $\forall i \in I$ için h_i 'ler *cauchy* – dönüşüm olduğundan her $G \in L$ için $h_i(G) \in K_i$ bulunur. $f_i \circ \bar{k} = h_i$ olduğundan $(f_i \circ \bar{k})(G) \in K_i$ yazılabilir. $f_i(\bar{k}(G)) \in K_i$, $\forall i \in I$ için olup, K nin tanımından $\bar{k}(G) \in K$ dir. Bu durumda $\bar{k}$ bir *cauchy* – dönüşüm olup $\mathcal{U}$ dönüşümü bir topolojik fanktordur.

Başlangıç kaldırmaya benzer olarak bitiş kaldırmayı da gösterebiliriz.

$\mathcal{F} \in \mathcal{K}$ ancak ve ancak $\mathcal{K}$ da sonlu sayıda $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ ler mevcut olacak öyle ki tüm $i < n$ ler için $\mathcal{F}_i$ nin her elemanı ilk $\mathcal{F}_{i+1}$ in her elemanının kesişimi mevcut

olacak (yani boştan farklı olacak) ve $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ olacaktır.

3. BÖLÜM

p NOKTASINDA T_0 VE T_1 CAUCHY UZAYLAR

Bu bölümde Cauchy Uzayların Kategorisinde, p noktasında değişik T_0 ve T_1 Cauchy uzaylar karakterize edilmiştir.

3.1. p Noktasında T_0 Cauchy Uzaylar

Tanım 3.1.1: B bir cümle ve $p \in B$ olsun. $B \amalg B$, B 'nin ayrık iki kopyası olsun. B 'nin p de wedge çarpımı $B \amalg B$ nin p de çakışmasıdır ve $B \vee_p B$ şeklinde gösterilir. $B \vee_p B$ 'de ki bir x noktası birinci bileşende ise x_1 ikinci bileşende ise x_2 ile gösterilecektir. $B^2 = B \times B$, B 'nin kartezyen çarpımı olsun.

1. p 'de Temel Eksen Dönüşümü (Principle Axis Map at p): $A_p : B \vee_p B \rightarrow B^2$,

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

2. p 'de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map at p):

$$S_{p_i} : B \vee_p B \rightarrow B^2, S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

3. p 'de Katlama Dönüşümü (The Fold Map at p):

$$\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow B, i = 1, 2 \text{ için } \nabla_p(x_i) = x$$

olarak tanımlanır [8, 52].

Uyarı 3.1.2: p_1, p_2 fonksiyonlarını $1 + p, p + 1 : B \vee_p B \rightarrow B$ fonksiyonları yardımı ile tanımlarız. Burada sırasıyla $1 : B \rightarrow B$ birim fonksiyon, $f : B \rightarrow B$ p noktasındaki sabit fonksiyon ve $\pi_i : B^2 \rightarrow B$ ($i=1, 2$) izdüşüm fonksiyon olup; $\pi_1 A_p = p_1 = \pi_1 S_p$, $\pi_2 A_p = p_2$, $\pi_2 S_p = \nabla_p$ dir. A_p ve S_p nin başlangıç olduğunu göstermek için sırasıyla $(p_1 \text{ ve } p_2)$ nin ve $(p_1 \text{ ve } \nabla_p)$ nin birer başlangıç kaldırma olduğunu göstermek yeterlidir [8, 52].

Örnek 3.1.3: Eğer B yi reel sayıların cümlesi ve $p = 0$ kabul edersek, p de temel eksen dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimi, p de skewed eksen dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ile y eksenlerinin birleşimi olur.

Tanım 3.1.4: (B, τ) topolojik uzay, $p \in B$ olsun. .

1. Eğer her $x \in B$ ve $x \neq p$ için $x \notin G_p$ olacak şekilde p nin bir G_p açık komşuluğu veya $p \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya p de T_0 dır denir [8].
2. Eğer her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu veya $y \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya T_0 dır denir [8].

Teorem 3.1.5: (B, τ) topolojik uzayı ve $p \in B$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. (B, τ) p de T_0 dır.
2. τ^* , B^2 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A_p : B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ ve

$\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [8].

3. τ_* , $i_1, i_2 : B \rightarrow B \vee_p B$, $x \mapsto i_1(x) = x_1$, $i_2(x) = x_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B \vee_p B$ üzerindeki bitiş topolojisi olmak üzere $id : B \vee_p B \rightarrow (B \vee_p B, \tau_*)$ birim

fonksiyonu ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [8].

Tanım 3.1.6: $\mathcal{U} : E \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere $X \in E$ nin bir nesnesi ve $p \in B$ olsun.

1. X nesnesinin p de $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada $\mathcal{D}, \mathcal{U}$ nun sol adjointi olan diskre fanktordur [8].

2. X nesnesinin p de T'_0 olması için gerek ve yeter şart $\{id : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X \vee_p X) = B \vee_p B \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. $X \vee_p X$, E de wedge çarpımıdır, yani $i_1 : B \rightarrow B \vee_p B$, $x \mapsto i_1(x) = x_1$ ve $i_2 : B \rightarrow B \vee_p B$, $i_2(x) = x_2$ kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının bitiş kaldırmasıdır [8].

Uyarı 3.1.7: 1. (B, τ) topolojik uzayının T_0 olması için gerek ve yeter şart her $p \in B$ için (B, τ) nin p de T_0 olmasıdır [8].

2. Eğer $\mathcal{U} : E \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde p de $\bar{T}_0$, p de T'_0 nü gerektirir [12].

Teorem 3.1.8: CHY kategorisindeki $\{f_i : (A, K) \rightarrow (A_i, K_i), i \in I\}$ kaynağı, başlangıç kaldırmadır (initial lift) $\Leftrightarrow \forall i \in I$ için $f_i(\alpha) \in K_i$ iken $\alpha \in K$ dır [37, 38, 39].

Teorem 3.1.9: CHY kategorideki $f : (A, K) \rightarrow (B, L)$ epimorfizma bitiş kaldırmadır (final lift) ancak ve ancak $\alpha \in L$ ise K 'de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ şeklinde sonlu tane Cauchy süzgeçleri vardır öyleki $\forall i < n$ için α_i 'nin elemanları için α_{i+1} 'deki elemanlarla kesişir

ve $\bigcap_{i=1}^n f(\alpha_i) \subset \alpha$ olur [37, 38, 39].

Teorem 3.1.10: $B \in \mathbf{CHY}$ için Δ 'yi B^2 deki diagonal için kullanacağız. $B \in \mathbf{CHY}$ olmak üzere $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ wedge $B^2 \coprod B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2$ dönüşüme göre final lift olup Δ -de B^2 'deki iki kopyasının kesişmesidir.

$\mathbf{CHY}$ kategoride i_1, i_2 iki kanonik projeksiyonlar olmak üzere $\{i_1, i_2 : (B^2, K) \rightarrow (B^2 \vee_{\Delta} B^2, L)\}$ epi-kavşağı bitiş kaldırmasıdır (final lift) ancak ve ancak aşağıdaki şartı sağlar; $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ üzerinde herhangi α süzgeçi için (burada bazı $k=1,2$ ve $\alpha_1 \in K$ için ya $\alpha \supset i_k(\alpha_1)$ yada $\alpha \in L$ dir) $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ Cauchy süzgeçleri vardır öyleki α_1 'deki her elemanı α_2 'deki her elemanla kesişir ve $\alpha \supset i_1\alpha_1 \cap i_2\alpha_2$ dir. Bu Teorem 3.1.9 ün özel halidir [34, 40, 44].

Teorem 3.1.11: $\mathbf{CHY}$ kategorisinde, A üzerinde diskre yapı (A, K) , $K = \{[a] : a \in A\} \cup \{\emptyset\}$ şeklinde tanımlanır [37, 38].

Teorem 3.1.12: $\mathbf{CHY}$ kategorisinde A üzerinde indiskre yapısı $K = F(A)$ şeklinde tanımlanır [37, 38].

Teorem 3.1.13: [40] (A, K) Cauchy uzayı ve $p \in A$ olsun. (A, K) nın p 'de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha \in K$ ve $\alpha \neq [p]$ için; en az bir $U \in \alpha$ vardır öyle ki $p \notin U$ dir.

İspat: Kabul edelim ki (A, K) p noktasında $\overline{T_0}$ olsun. Tanım 3.1.6, Uyarı 3.1.2 ve Teorem 3.1.8'den, wedge üzerindeki herhangi σ süzgeçi için $p_1\sigma \in K$, $p_2\sigma \in K$ ve herhangi bir $x \in A$ için $\nabla_p \sigma = [x]$ veya $[\emptyset]$ dur ancak ve ancak wedge deki herhangi bir z için $\sigma = [z]$ veya $\sigma = [\emptyset]$ dur. $\alpha \neq [p]$ ve her bir $U \in \alpha$ için $p \in U$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in K$ mevcutsa, bu takdirde (A, K) Cauchy uzayı olduğundan $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeç ve $\alpha \cap [p] \in K$ dir. $\alpha \neq [p]$ ve $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeç olduğundan, $x \neq p$ olmak üzere $\alpha \cap [p] \subseteq [\{x, p\}]$ ve $[\{x, p\}] \in K$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır. $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ olsun, Uyarı 3.1.2 den $p_1\sigma = [\{x, p\}] = p_2\sigma \in K$ ve $\nabla_p \sigma = [x]$ olur. Fakat

wedge deki herhangi z noktası için $\sigma \neq [z]$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir. O halde, her $\alpha \in K$ ve $\alpha \neq [p]$ için; en az bir $U \in \alpha$ vardır öyle ki $p \notin U$ dir.

Tersine olarak, Kabul edelim ki şart doğru olsun. σ süzgeci $p_1\sigma \in K$, $p_2\sigma \in K$ ve herhangi bir $x \in A$ için $\nabla_p\sigma = [x]$ veya $\nabla_p\sigma = [\emptyset]$ şartlarını sağlarsa, Tanım 3.1.6 ve Uyarı 3.1.2 den kolayca gösterilebilir ki $\sigma = [x_1], [x_2], [\emptyset]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ dir. Göstereceğiz ki $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ şartı sağlanmaz. Gerçekten, $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise, bu takdirde Uyarı 3.1.2 den $p_1\sigma = [\{x, p\}] = p_2\sigma \in K$ olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü her bir $U \in [\{x, p\}]$ için $p \in U$ olur. Eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ ise $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ dir. Açık olarak $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ ise $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ dir. Tersine olarak, eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ve $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ ise, o zaman $U \in \sigma$ vardır öyleki $U \neq \{x_1, x_2\}$ ve $U \neq \{\emptyset\}$ dir. $\{x_1, x_2\} \in \sigma$ ve σ bir öz-süzgeç olduğundan $U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\}$ veya $\{x_2\} \in \sigma$ olur. Yani $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ dir. Dolayısıyla, $\sigma = [x_1], [x_2]$ veya $[\emptyset]$ olup (A, K) p noktada $\overline{T_0}$ dir.

Teorem 3.1.14:[40] Tüm Cauchy uzaylar p ' de T_0' dir .

İspat: (A, K) herhangi bir Cauchy uzay ve $p \in A$ olsun. Tanım 3.1.6, Uyarı 3.1.2, Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.1.11'den $A \vee_p A$ wedge çarpım üzerinde herhangi bir σ süzgeci için ya en az bir $\sigma_1 \in K$ için $\sigma \supset i_k\sigma_1$ ($k=1,2$) dir veya en az bir $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ve $\sigma_1 \cup \sigma_2$ öz süzgeç için $\sigma \supset i_1\sigma_1 \cap i_2\sigma_2$ ve herhangi bir $x \in A$ için $\nabla_p\sigma = [x]$ veya $[\emptyset]$ dur ancak ve ancak wedge deki herhangi bir z için $\sigma = [z]$ veya $\sigma = [\emptyset]$ dur. En az bir $\sigma_1 \in K$ için $\sigma \supset i_k\sigma_1$ ($k=1,2$) ve herhangi bir $x \in A$ için $\nabla_p\sigma = [x]$ veya $[\emptyset]$ ise, bu takdirde kolayca gösterilebilir ki $\sigma = [x_1], [x_2], [\emptyset]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ dir. Gerçekten, $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise, bu takdirde en az bir $\sigma_1 \in K$ için $\sigma \supset i_k\sigma_1$ ($k=1,2$) olur. Fakat bunun olması $\{x_1, x_2\}$ nin aynı eksen üzerinde olmasını gerektirir ki $x \neq p$ olduğundan bu mümkün değildir. Buradan, eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ için $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ise Teorem 3.1.13 deki ispata benzer olarak gösterilebilir ki $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ dir. Yine benzer olarak gösterilebilir ki, en az bir $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ve $\sigma_1 \cup \sigma_2$ öz

süzgeç için $\sigma \supset i_1\sigma_1 \cap i_2\sigma_2$ ve herhangi bir $x \in A$ için $\nabla_p\sigma = [x]$ veya $[\emptyset]$ ve wedge deki herhangi bir z için $\sigma = [z]$ veya $\sigma = [\emptyset]$ ise, bu takdirde $\sigma = [x_1], [x_2], [\emptyset]$ dır. Bu yüzden $\sigma = [x_1], [x_2], [\emptyset]$ olur ki buda (A, K) nın p 'de T_0 olmasıdır.

3.2. p noktasında T_1 Cauchy Uzaylar

Tanım 3.2.1: (B, τ) topolojik uzay, $p \in B$ olsun.

1. Eğer her $x \in B$ ve $x \neq p$ için $x \notin G_p$ olacak şekilde p nin bir G_p açık komşuluğu ve $p \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya p de T_1 dir denir [8].
2. Eğer her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu ve $y \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya T_1 dir denir [8].

Teorem 3.2.2: (B, τ) topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B, τ) nun p de T_1 olması için gerek ve yeter şart τ^* , B^2 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $S_p : B \vee_p B \rightarrow (B^2, \tau^*)$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır [12].

Tanım 3.2.3: $\mathcal{U} : E \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere, X E 'nin bir nesnesi ve $p \in B$ olsun. X nesnesinin p de T_1 olması için gerek ve yeter şart $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ – kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [12].

Uyarı 3.2.4: 1. Eğer $\mathcal{U} : E \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde p de T_1 , p de T_0' nü gerektirir [16].

2. p de T_1 ayırma aksiyomu herhangi bir topolojik kategoride (kuvvetli) kapalılık kavramlarının tanımlanmasında kullanılır [9, 24].

Uyarı 3.2.5: 1. Topolojik uzaylar kategorisi **Top**'un bir p noktasında $\overline{T_0}$, p de T_0' veya p de T_1 olması sırasıyla bilinen p de T_0 veya p de T_1 olmasına indirgenir. Burada X topolojik uzayı p de T_0 (p de T_1) olup $T_0(T_1)$ tanımından X deki her $x \neq p$ için x ' in p ' yi içermeyen bir komşuluğu varsa veya (ve) p ' nin x ' i içermeyen bir komşuluğu varsa X , p de $T_0(T_1)$ dir [11].

2. $\mathcal{U}: E \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik bir fanktor, X , E de bir obje ve $p \in \mathcal{U}(X)$, X 'in bir kısıtlaması (retract) olsun. Burada $\mathcal{U}$ – kaynağının $h: \bar{1} \rightarrow X$ başlangıç kaldırması, 1 **Set**'in final objesi olmak üzere $p: 1 \rightarrow \mathcal{U}(X)$ bir kısıtlamadır. Bu durumda eğer X p ' de T_0 (veya T_1) ise X p ' de T_0' dir. Fakat tersi genelde doğru değildir [12].

3. $\mathcal{U}: E \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor olsun. Her p için p ' de $\overline{T_0}$ ve p ' de T_1 olması p ' de T_0' olmasını gerektirir [12].

4. X topolojik uzayı (Yarı düzgün yakınsak uzay) $T_i (i=0,1)$ dir ancak ve ancak tüm p noktalarında $T_i (i=0,1)$ dir [68]. Eğer $\mathcal{U}: E \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, X E ' de bir obje ve $p \in \mathcal{U}(X)$, X 'in bir kısıtlaması (retract) ve X $T_0(T_1)$ ise bu takdirde X p de $T_0(T_1)$ dir. Ama tersi genelde doğru değildir [12].

Teorem 3.2.6:[41] (A, K) Cauchy uzayı ve $p \in A$ olsun. (A, K) nin p noktasında T_1 olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in K$ ve $\alpha \neq [p]$ için; $p \notin U$ olacak şekilde en az bir $U \in \alpha$ nin mevcut olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki (A, K) p noktasında T_1 olsun. Tanım 3.1.6, Uyarı 3.1.2 ve Teorem 3.1.8'den, wedge üzerindeki herhangi σ süzgeçi için $p_1\sigma \in K$ dir. Üstelik, bazı x ler için $\nabla_p \sigma = [x]$ veya $\nabla_p \sigma = [\phi] \Leftrightarrow$ wedge üzerinde bazı z ler için $\sigma = [z]$ veya $\sigma = [\phi]$ dir. $\alpha \neq [p]$ ve $\forall U \in \alpha$ için $p \in U$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in K$ mevcutsa, bu takdirde (A, K) Cauchy uzayı olduğundan $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeçtir ve $\alpha \cap [p] \in K$ dir. $\alpha \neq [p]$ ve $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeç olduğundan, $x \neq p$ için $\alpha \cap [p] \subseteq [\{x, p\}]$ ve $[\{x, p\}] \in K$ olacak şekilde A da en az bir x vardır. $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ olsun, Uyarı 3.1.2

den $p_1\sigma = [\{x, p\}] \in K$ ve $\nabla_p\sigma = [x]$ olur. Fakat bu da wedge deki herhangi z noktası için $\sigma \neq [z]$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir. O halde, $p \notin U$ olacak şekilde en az bir $U \in \sigma$ mevcuttur.

Tersine olarak, kabul edelim ki şart sağlansın. Eğer σ , $p_1\sigma \in K$ ve bazı x ler için $\nabla_p\sigma = [x]$ veya $\nabla_p\sigma = [\emptyset]$ şartlarını sağlarsa, $\sigma = [x_1], [x_2], [\emptyset]$ veya $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ olduğu açıkça görülür. Biz son kısmın sağlanmadığını göstereceğiz. Eğer $\sigma = [\{x_1, x_2\}]$ ise, Uyarı 3.1.2 den $p_1\sigma = [\{x, p\}] \in K$ olup bu bir çelişkidir. Çünkü $\forall U \in [\{x, p\}]$ için $p \in U$ olur. Eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ ise $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ancak ve ancak $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ dir. Açık olarak $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ ise $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ dir. Tersine olarak, eğer $\sigma \supset [\{x_1, x_2\}]$ ve $[\emptyset] \neq \sigma \neq [\{x_1, x_2\}]$ ise, o zaman en az bir $U \in \sigma$ vardır öyleki $U \neq \{x_1, x_2\}$ ve $U \neq \{\emptyset\}$ dir. $\{x_1, x_2\} \in \sigma$ ve σ öz-süzgeç olduğundan $U \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\}$ veya $\{x_2\} \in \sigma$ olur. Yani $\sigma = [x_1]$ veya $[x_2]$ dir. Dolayısıyla, $\sigma = [x_1], [x_2]$ veya $[\emptyset]$ olup (A, K) p noktasında T_1 dir.

3.3. p noktasında T_0 ve T_1 Cauchy Uzaylar Arasındaki İlişkiler

Uyarı 3.3.1: Eğer (A, K) Cauchy uzayı p -de $\bar{T}_0$ veya T_1 ise (A, K) p -de T'_0 dir. Ama tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $A = \{1, 2\}$, $p = 1$ ve $K = \{[1], [2], [\{1, 2\}], [\emptyset]\}$ ise $\forall U \in [\{1, 2\}]$ için $p = 1 \in U$ olduğundan (A, K) p -de T'_0 dir. Fakat p -de ne $\bar{T}_0$ ne de T_1 olur.

4. BÖLÜM

T_0 VE T_1 CAUCHY UZAYLAR

Bu bölümde, farklı T_0 , $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 ayırma aksiyomları Cauchy uzayların Kategorisinde karakterize edilmiş ve birbirleriyle ve p noktasında ki T_0 , $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 ayırma aksiyomları arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

4.1. T_0 Cauchy Uzaylar

Tanım 4.1.1: [8] B boştan farklı bir cümle ve $B^2 = B \times B$ olsun. B^2 nin iki ayrı kopyasının diyagonalı boyunca çakıştırılması $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ ile gösterilir. $B^2 \vee_{\Delta} B^2$ de bir (x, y) noktası birinci bileşende ise $(x, y)_1$ ile, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. Açık olarak $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x = y$ dir .

1. **Temel Eksen Dönüşümü (Principle Axis Map):** $A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^3$

$$A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

2. **Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map):** $S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^3$

$$S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

3. **Katlama Dönüşümü (The Fold Map):** $\nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B^2$, $i = 1, 2$ için

$$\nabla((x, y)_i) = (x, y)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\pi_k : B^3 \rightarrow B$, k . izdüşüm ve $i, j \in \{1, 2\}$ için $\pi_{ij} = \pi_i + \pi_j : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow B$ olmak üzere $\pi_1 S = \pi_{11} = \pi_1 A$, $\pi_2 S = \pi_{21} = \pi_2 A$, $\pi_3 A = \pi_{12}$ ve $\pi_3 S = \pi_{22}$ dir .

Tanım 4.1.2: [8] (B, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in B$ ve $x \neq y$ için $x \notin G_y$ olacak şekilde y nin bir G_y açık komşuluğu veya $y \notin G_x$ olacak şekilde x in bir G_x açık komşuluğu mevcutsa (B, τ) ya T_0 topolojik uzay denir .

Teorem 4.1.3: (B, τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) (B, τ) T_0 dır.
- (2) τ^* , B^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [42].
- (3) τ_* , $i_1, i_2 : B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi olmak üzere $id : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2 \vee_{\Delta} B^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla : B^2 \vee_p B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [42].
- (4) (B, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez [36].
- (5) Tanım cümlesi (B, τ) olan her başlangıç kaynağı mono-kaynaktır [22].
- (6) İki elemanlı bir indiskre topolojik uzaydan (B, τ) topolojik uzayına tanımlı her morfizm sabittir [23].
- (7) Tanım cümlesi (B, τ) olan her başlangıç morfizmi bir monomorfizmdir [21].
- (8) Tanım cümlesi (B, τ) topolojik uzayı olan her başlangıç epimorfizmi bir homeomorfizmdir [43].

1971’de Brümmer [21] (7) yi kullanarak T_0 objeyi kategoride tanımladı. 1973’te Marny [23] (4) ve (6) yı, 1974’te Hoffman [22] (5) i ve 1977’de Harvey [43] (8) i kullanarak

T_0 objeyi topolojik kategoride tanımladılar. 1991'de Weck-Schwarz [36] topolojik kategorilerde (4), (5), (6), (7) ve (8) genelleştirilmeleri arasındaki ilişkiyi inceledi. 1990'da Baran [24] (2) ve (3) ü kullanarak T_0 objeyi topolojik kategoriye genişletti (sırasıyla $\bar{T}_0$ ve T'_0 ile gösterdi) ve 1995'te [44] tüm bu farklı genelleştirmelerinin karşılaştırmasını inceledi. Baran [20] çalışmalarında (2) ve (3) deki T_0 objelerini kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımladı.

Tanım 4.1.4: $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olacak şekilde X $\mathcal{E}$ nin bir nesnesi (objesi) olsun.

(1) X nesnesinin $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart $\{A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ $\mathcal{U}$ - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada $\mathcal{D}, \mathcal{U}$ nun sol adjointi olan diskre fanktordur [8].

(2) X nesnesinin T'_0 olması için gerek ve yeter şart $\{id : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(B^2 \vee_{\Delta} B^2)' = X^2 \vee_{\Delta} X^2 \text{ ve } \nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ ile tanımlanan $\mathcal{U}$ - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada $(B^2 \vee_{\Delta} B^2)'$, $\{i_1, i_2 : \mathcal{U}(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2\}$ $\mathcal{U}$ - kavşağının bitiş kaldırması, i_1, i_2 kanonik dönüşümler ve $\mathcal{D}(B^2)$, B^2 üzerinde diskre yapıdır [46, 20].

(3) X nesnesinin T_0 olması için gerek ve yeter şart X in en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmemesidir [36, 23].

(4) X T_1 dir ancak ve ancak $\mathcal{U}$ -kaynağın $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2\}$ başlangıç kaldırması diskredir [41].

Uyarı 4.1.5:

1. Topolojik uzaylar kategorisi **Top** ta $\bar{T}_0$, T'_0 , T_0 ayırma aksiyomları T_0 topolojik uzay kavramına indirgenir [8, 36, 23].

2. Herhangi bir topolojik kategori için $\bar{T}_0$, T'_0 nü gerektirir fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir ve genelde T_0 ile $\bar{T}_0$ veya T'_0 arasında bir ilişki yoktur [44].

3. $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $p \in \mathcal{U}(X)$, X in bir kısıtlaması olsun (1, $\mathbf{Set}$ 'in terminal objesi; $p : 1 \rightarrow \mathcal{U}(X)$ $\mathcal{U}$ -kaynağının $h : 1 \rightarrow X$ başlangıç kaldırması bir kısıtlamadır). Eğer $X, \bar{T}_0$ ise $X p$ de $\bar{T}_0$ dir. Fakat tersi genelde doğru değildir [12, Teorem 2.6].

4. Eğer $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde $\bar{T}_0$ olması p de $\bar{T}_0$ olmasını gerektirir [12, Sonuç 2.9].

Teorem 4.1.6: [41] (A, K) Cauchy uzayı $\bar{T}_0$ veya T_0 dır ancak ve ancak A -da herhangi iki farklı x, y noktaları için $[x] \cap [y] \notin K$ dır.

İspat: Herhangi iki noktalı Cauchy uzay $(\{x, y\}, K)$ indiskredir ancak ve ancak $[x] \cap [y] \in K$ olduğundan T_0 için ispatı açıktır. Kabul edelim ki $(A, K) \bar{T}_0(T_0)$ olsun. Eğer bazı $x \neq y$ için $[x] \cap [y] \in K$ ise, o zaman özel olarak $\sigma = [(x, y)_1 \cap (x, y)_2]$ olarak alalım ve $\pi_{11}\sigma = [x] \in K, \pi_{12}\sigma = [\{x, y\}] = \pi_{21}\sigma \in K, (\pi_{22}\sigma = [y] \in K)$ ve $\nabla\sigma = [(x, y)]$ olur. $(A, K) \bar{T}_0(T_0)$ olduğundan wedge deki bazı z için $\sigma = [z]$ olup bu da $x \neq y$ olması ile çelişir. O halde $\forall x \neq y$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dır.

Tersine olarak kabul edelim ki şart sağlansın ve wedge deki herhangi σ süzgeçi için $\pi_{11}\sigma, \pi_{12}\sigma, \pi_{21}\sigma, (\pi_{22}\sigma) \in K$, ve bazı $(x, y) \in A^2$ için $\nabla\sigma = [(x, y)]$ veya $[\phi]$ olsun. Eğer $x = y$ ise, $\nabla^{-1}(x, x) = (x, x)$ olduğundan $\sigma = [(x, x)]$ veya $[\phi]$ olduğu aşikardır. Eğer $x \neq y$, o zaman $\sigma = [(x, y)_1], [(x, y)_2], [\phi]$ veya $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ olma ihtimalleri vardır. Biz $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ ihtimalinin mevcut olmadığını göstereceğiz. Eğer $\sigma = [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ ise, o zaman $\pi_{21}\sigma = [\{x, y\}] \in K$ olur ki buda kabulümüzle çelişir. Eğer $[\phi] \neq \sigma \neq [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ ise, o zaman $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ dır ancak ve ancak $\sigma = [(x, y)_1]$ veya $[(x, y)_2]$ dır. Bunu görmek

için eğer $\sigma = [(x, y)_1]$ veya $[(x, y)_2]$ ise $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ olduğu aşıkardır. Eğer $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ ve $[\phi] \neq \sigma \neq [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ ise, o zaman $V = \{(x, y)_1, (x, y)_2\} \not\subseteq U$ olacak şekilde $U \in \sigma$ vardır. σ süzgeç olduğundan $V \in \sigma$ ve sonuç olarak $V \cap U = \{(x, y)_1\}$ veya $\{(x, y)_2\} \in \sigma$ dır. O halde $\sigma = [(x, y)_1]$ veya $[(x, y)_2]$ olur. Bu da (A, K) 'nin $\overline{T}_0(T_0)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.7: [41] **CHY** kategorisinde bütün (A, K) objeleri T'_0 dır.

İspat: Eğer bazı $\sigma_1 \in K^2$ için (burada K^2 , A^2 üzerindeki çarpım yapısıdır) $\sigma \supset i_k \sigma_1, k=1,2$ ve bazı $(x, y) \in A^2$ için $\nabla \sigma = [(x, y)]$ veya $[\phi]$ ise, biz wedge deki bazı σ süzgeçleri için $\sigma = [z]$ veya $[\phi]$ olduğunu göstermeliyiz. Yine de eğer $\nabla \sigma = [(x, y)]$ veya $[\phi]$ ise, o zaman $\sigma = [(x, y)_1], [(x, y)_2], [\phi]$ veya $\sigma \supset [(x, y)_1 \cup (x, y)_2]$ olmaya ihtimaller vardır ve Teorem 4.1.6 'nın ispatından son ihtimal mevcut olmayıp istediğimiz sonuç elde edilir. O halde, Tanım 4.1.4 gereği $(A, K) T'_0$ dır.

Uyarı 4.1.8: [41] Eğer (A, K) Cauchy uzay $\overline{T}_0$ veya T_0 ise $(A, K) T'_0$ dır. Ama tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $A = \{x, y\}$ ve $K = \{[x], [y], [\{x, y\}], [\phi]\}$ ise, $[\{x, y\}] \in K$ olduğundan $(A, K) T'_0$ dır ama ne $\overline{T}_0$ ne de T_0 dır.

4.2. T_1 Cauchy Uzaylar

Teorem 4.2.1: (B, τ) topolojik uzay olsun. (B, τ) nun T_1 olması için gerek ve yeter şart τ^* , B^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskre olmasıdır [42].

Tanım 4.2.2: $\mathcal{U} : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere, X E 'nin bir nesnesi olsun. X nesnesinin T_1 olması için gerek ve yeter şart

$\left\{ S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{U}(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow \mathcal{UD}(B^2) = B^2 \right\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [8].

Uyarı 4.2.3:

1. Eğer $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde T_1 , p de T_1 olmasını gerektirir [12].
2. Topolojik uzaylar kategorisi **Top** ta T_1 ayırma aksiyomları T_1 topolojik uzay kavramına indirgenir [8, 36, 23].
3. $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X, \mathcal{E}$ nin bir objesi ve $p \in \mathcal{U}(X)$, X in bir kısıtlaması olsun (1, $\mathbf{Set}$ 'in terminal objesi; $p : 1 \rightarrow \mathcal{U}(X)$ $\mathcal{U}$ -kaynağının $h : \bar{1} \rightarrow X$ başlangıç kaldırması bir kısıtlamadır). Eğer X, T_1 ise $X p$ de T_1 dir. Fakat tersi genelde doğru değildir [12, Teorem 2.6].
4. Eğer $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş bir topolojik fanktor ise bu takdirde T_1 olması p de T_1 olmasını gerektirir [12, Sonuç 2.9].

Teorem 4.2.4: [41] (A, K) Cauchy uzayı T_1 dir ancak ve ancak A -da herhangi iki farklı x, y noktaları için $[x] \cap [y] \notin K$ dir.

İspat: Teorem 4.1.6 dakine benzer olarak ispatlanır.

Teorem 4.2.5: [41] (A, K) Cauchy uzayı T_2 dir ancak ve ancak A -da herhangi iki farklı x, y noktaları için $\dot{x} \cap \dot{y} \in K$ olmasıdır .

4.3. $T_0, \overline{T_0}, T_1$ ve T_2 Cauchy Uzaylar Arasındaki İlişkiler

$T_0, \overline{T_0}, T_1$ ve T_2 Cauchy Uzaylar Arasındaki İlişkiler uyarı şeklinde aşağıda verilmiştir.

Uyarı 4.3.1: (A, K) Cauchy uzayı olsun.

- i) Teorem 4.1.6, Teorem 4.2.4 ten (A, K) T_0 dir ancak ve ancak (A, K) $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak (A, K) T_1 dir ancak ve ancak X deki her farklı x ve y için $[x] \cap [y] \notin K$ dir.
- ii) Teorem 4.1.6, Teorem 4.1.7, Teorem 4.2.4 ten (A, K) T_0 , $\overline{T_0}$ veya T_1 ise T_0' dir. Ancak tersi genelde doğru değildir. Örneğin $A = \{x, y\}$ ve $K = \{[x], [y], [\{x, y\}], [\emptyset]\}$ ise, $[\{x, y\}] \in K$ olduğundan (A, K) T_0' dir ama ne $\overline{T_0}$ ne de $T_0(T_1)$ dir.
- iii) Teorem 3.1.13, Teorem 3.2.6, Teorem 4.1.6, Teorem 4.2.4 den (A, K) T_1 dir ancak ve ancak $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak X deki tüm p noktaları için p de T_1 dir ancak ve ancak A daki tüm p noktaları için p de $\overline{T_0}$ dir.
- iv) Teorem 4.1.6, Teorem 4.1.7, Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 ten (A, K) T_0 dir ancak ve ancak (A, K) $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak (A, K) T_1 dir ancak ve ancak (A, K) T_2 ancak ve ancak A deki her farklı x ve y için $[x] \cap [y] \notin K$ dir.
- v) Teorem 4.1.7, Teorem 4.2.5 ten (A, K) T_2 ise T_0' dir. Ancak tersi genelde doğru değildir. Örneğin $A = \{x, y\}$ ve $K = \{[x], [y], [\{x, y\}], [\emptyset]\}$ ise, $[\{x, y\}] \in K$ olduğundan (A, K) T_0' dir ama T_2 değildir.

Buradan aşağıdaki sonucu elde edebiliriz. Yani genelleştirilmiş ayırma aksiyomları T_0 , $\overline{T_0}$, T_1 ve T_0' ile p noktasında ayırma aksiyomları T_0 , $\overline{T_0}$, T_1 ve T_0' arasındaki ilişkileri verelim.

Uyarı 4.3.2: (A, K) Cauchy uzayı ve $p \in A$ olsun. Boş cümlesi ve tek nokta üzerinde bir tek yapı var olduğundan $U: \mathbf{CHY} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktördür. Buradan,

1. Teorem 3.1.13, Teorem 3.2.6, Teorem 4.1.6, Teorem 4.2.4 den (A, K) T_1 dir ancak ve ancak (A, K) $\overline{T_0}(T_0)$ dir ancak ve ancak A daki tüm p noktaları için p de T_1 dir ancak ve ancak A daki tüm p noktaları için p de $\overline{T_0}(T_0)$ dir.

2. Teorem 3.1.13, Teorem 3.2.6, Teorem 4.1.6, Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 gereği, $(A, K) \bar{T}_0$ veya $\mathbf{T}_2$ veya T_1 veya T_0 ise (A, K) p -de T_0 , $\bar{T}_0$ veya T_1 dir.
3. Teorem 3.1.14, Teorem 4.1.7 gereği her $p \in A$ için (A, K) p -de T'_0 ancak ve ancak $(A, K) T'_0$ dir.
4. Teorem 3.1.14, Teorem 4.1.6, Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 gereği, (A, K) p -de T'_0 ise $(A, K) \mathbf{T}_2$ veya $\bar{T}_0$ veya T_1 veya T_0 dir.

5. BÖLÜM

CAUCHY UZAYLARINDA KAPALILIK, KUVVETLİ KAPALILIK, KOMPAKTLIK VE BAĞLANTILILIK

Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Örneğin, 1990'da Dikranjan ve Giuli [19] (süzgeç yakınsak uzayların çeşitli tipleri için) ve 1996'da Clementino, Giuli ve Tholen [48] (abstract kategoriler için) bu kavramları topolojik kategoriye Dikranjan ve Giuli anlamında [19] kapanış operatörleri kullanılarak genişletilmiştir. Baran 1990'da [24] başlangıç ve bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeler kullanarak, topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını direkt olarak tanımladı ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [19] kapanış operatörü oluşturduğunu gösterdi [18].

Bu bölümde Cauchy uzaylar kategorisinde bir objenin (kuvvetli) kapalı, (kuvvetli) açık objeleri karakterize edilmiş ve Cauchy uzayların kategorisinde verilen bağlantılı objeler, kompakt objeler karakterize edilmiş ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

5.1. Cauchy Uzayların Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeleri

Tanım 5.1.1: (B, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset B$ olsun. Eğer $B \setminus F$ açıksa yani $B \setminus F \in \tau$ ise F ye kapalı cümle denir.

Uyarı 5.1.2: [45] B bir cümle ve $p \in B$ olsun. $V_p^\infty B$ sonsuz wedge çarpımı B nin sayılabilir adetteki ayırık kopyalarını alınması ve bunların p noktasında çakıştırılması ile elde edilir. $B^\infty = B \times B \times \dots$, B nin sayılabilir kartezyen çarpımı olsun. $A_p^\infty: V_p^\infty B \rightarrow$

B^∞ dönüşümü $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, x, p, \dots)$ ve $\nabla_p^\infty : V_p^\infty B \rightarrow B$ dönüşümü $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ şeklinde tanımlanır [43]. Burada her $i \in I$ için x_i sonsuz wedge'in i -inci bileşeninde ve $x, (p, p, \dots, p, x, p, \dots)$ ifadesinde i -inci yerdedir. Ayrıca $A_p^\infty, p : 1 \rightarrow B$ nin çoklu itme (pushout) diyagramından elde edilen tek dönüşüm olup j . bileşende id birim dönüşümü olmak üzere $A_p^\infty i_j = (p, p, \dots, id, p, \dots) : B \rightarrow B^\infty$ dir .

Tanım 5.1.3: [41] A bir cümle ve $F(A)$ da A üzerinde süzgeçlerin cümlesi ve $K \subset F(A)$ olsun. K aşağıdaki aksiyomları sağlarsa,

1. $\forall x \in A$ için $[x] = [\{x\}] \in K$ ve $[x] = \{B \subset A; x \in B\}$ dir.
2. $\alpha \in K$ ve $\beta \geq \alpha \Rightarrow \beta \in K$ (yani $\beta \supset \alpha \in K \Rightarrow A$ üzerindeki β süzgeçi için $\beta \in K$) dir.
3. $\alpha, \beta \in K$ ve $\alpha \vee \beta$ mevcut ise $\alpha \cap \beta \in K$ dir.

K 'ya Cauchy yapı, (A, K) ya Cauchy uzay ve K 'deki elemanlarına da Cauchy Süzgeç adı verilir. $(A, K), (B, L)$ Cauchy uzaylar olmak üzere $f : (A, K) \rightarrow (B, L)$ Cauchy uzaylar arasındaki morfizme Cauchy Sürekli fonksiyon (Cauchy Dönüşüm) denir $\Leftrightarrow f : A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall \alpha \in K$ için $f(\alpha) \in L$ dir.

Objeleri Cauchy uzaylar, morfizmaları Cauchy sürekli fonksiyonlar ve işlem olarak da fonksiyonlardaki bileşke işlemi olan kategoriye Cauchy uzayların kategorisi denir ve

CHY ile gösterilir.

Tanım 5.1.4: **CHY** kategorideki $\{f_i : (A, K) \rightarrow (A_i, K_i), i \in I\}$ kaynağı, başlangıç kaldırmadır (initial lift) $\Leftrightarrow \forall i \in I$ için $f_i(\alpha) \in K_i$ iken $\alpha \in K$ dır [37, 38, 39].

Tanım 5.1.5: **CHY** kategorideki $f : (A, K) \rightarrow (B, L)$ epimorfizma bitiş kaldırmadır (final lift) ancak ve ancak her $\alpha \in L$ için K 'de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ şeklinde sonlu tane Cauchy süzgeçleri vardır öyleki $\forall i < n$ için α_i 'nin elemanları için α_{i+1} 'deki elemanlarla kesişir

ve $\bigcap_{i=1}^n f(\alpha_i) \subset \alpha$ olur [37, 38, 39].

Teorem 5.1.6: [41] (B, τ) topolojik uzayı ve $p \in B$ ve F de B 'nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. q , B/F üzerinde birim ve F yi $*$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q: (B, \tau) \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ fonksiyonunun ürettiği final topoloji $(B/F, \tau_*)$ ile gösterilsin.

(1) τ^* , B^∞ üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere, $\{p\}$ nin B de *kapalı* olması için gerek ve yeter şart $\{A_p^\infty: V_p^\infty B \rightarrow (B^\infty, \tau^*)$ ve $\nabla_p^\infty: V_p^\infty B \rightarrow (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır.

(2) $F \subset B$ nin *kapalı* olması için gerek ve yeter şart $\{*\}$ ın $(B/F, \tau_*)$ de *kapalı* olmasıdır.

(3) $F \subset B$ in *kuvvetli kapalı* olması için gerek ve yeter şart $(B/F, \tau_*)$ in $*$ de T_1 olmasıdır.

Tanım 5.1.7: [41] $\mathcal{U}: E \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik bir fanktor, $\mathcal{U}(X) = B$ olmak üzere X E 'nin bir nesnesi ve $p \in B$ ve F , B nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. q , B/F üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere,

$q: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B \setminus F) \cup \{*\}$ epi $\mathcal{U}$ - kaynağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir. p , B 'de bir nokta olsun. Bu durumda;

1. X, p -de T_1 dır ancak ve ancak U - kavşağının $\{S_p: B \vee_\Delta B \rightarrow \mathcal{U}(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p: B \vee_\Delta B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ başlangıç kaldırması diskredir; Burada D Diskre fanktördür ve U 'nın sol adjointidir.

2. p nin *kapalı* olması için gerek ve yeter şart $\{A_p^\infty: \vee_p^\infty B \rightarrow \mathcal{U}(X^\infty) = B^\infty$ ve $\nabla_p^\infty: \vee_p^\infty B \rightarrow \mathcal{UD}(B) = B\}$ $\mathcal{U}$ -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [46].

3. $F \subset X$ in *kapalı* olması için gerek ve yeter şart F nin $\{*\}$ görüntüsünün X/F de *kapalı* veya $F = \emptyset$ olmasıdır [46].

4. $F \subset X$ in kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart $X/F, \{*\}$ 'da T_1 veya $F = \emptyset$ olmasıdır [46].
5. $B = F = \emptyset$ ise bu durumda F hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır [46].

Uyarı 5.1.8:

1. (B, τ) bir topolojik uzay ve $F \subset B$ olmak üzere F in kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart F in kapalı olması ve her $x \notin F$ için F in x i ihtiva etmeyen bir komşuluğunun mevcut olmasıdır [8]. Eğer topolojik uzay T_1 ise bu takdirde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları çakışır [8].
2. Genelde herhangi bir topolojik kategori için, kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları birbirinden bağımsızdır [9, 17]. Hatta topolojik kategorinin nesnesi T_1 olsa bile bu iki kavram birbirinden bağımsızdır [9, 17].

Baran [24, 9] de kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde karakterize etmiş ve bu kavramların Dikranjan ve Giuli anlamında [19] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [18]. Ayrıca, bu kavramları kullanarak, 1996'da Hausdorffluk [20], 1997'de kompaktlık [10], 1998'de normallik ve regülerlik [46], 2002'de öz fonksiyon [18], 2006'da bağlantılılık [17] kavramlarını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletti.

Tanım 5.1.9: $\mathfrak{F}$ B 'nin alt kümelerinin boştan farklı sonlu birleşimleri altında kapalı ve B 'nin tüm sonlu boştan farklı alt kümelerini içeren bir sınıf olmak üzere $(B, \mathfrak{F})$ çifti prebornolojik bir uzaydır. $(B, \mathfrak{F}) \rightarrow (B_1, \mathfrak{F}_1)$ morfizmleri $C \in \mathfrak{F}$ ise $f(C) \in \mathfrak{F}_1$ olacak şekilde tanımlanan $f : B \rightarrow B_1$ fonksiyonlarından oluşan kategori **PBorn** denir. Bu kategori **Set** üzerine topolojik kategoridir [16].

Tanım 5.1.10: B bir cümle, R B üzerinde tanımlı yansıma ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntı olmak üzere (B, R) ye *kısmi sıralı uzay* denir; objeleri (B, R) lerden oluşan; $(B, R) \rightarrow (B_1, R_1)$ morfizmleri tüm $a, b \in B$ için aRb ise $f(a)R_1f(b)$ olacak

şekilde tanımlanan fonksiyonlardan oluşan kategoriye ise **Prord** kategorisi denir. Bu kategori **Set** üzerine topolojik kategoridir [14].

Önerme 5.1.11: (B, R) kısmi sıralı bir uzay ve $\phi \neq F \subset B$ olsun. O halde

- i) F , B 'nin kapalı bir alt kümesi olması için gerek ve yeter şart herhangi $x \in B$ için xRa veya bRx olacak şekilde $a, b \in F$ mevcutsa $x \in F$ dir [14].
- ii) F , B 'nin kuvvetli kapalı bir alt kümesi olması için için gerek ve yeter şart her $x \in B$ için xRa veya aRx olacak şekilde $a \in F$ mevcutsa $x \in F$ dir [14].

Önerme 5.1.12: $(B, \mathfrak{F})$ prebornolojik bir uzay olsun. Bu durumda

- i) $F \subset B$ kapalıdır ancak ve ancak $B = F$ veya $F = \phi$ dir.
- ii) B nin tüm alt kümeleri kuvvetli kapalıdır [9].

Uyarı 5.1.13:

1. **Top** kategorisinde kapalılık kavramı bilinen kavramla aynı olup, F kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak F kapalıdır ve her $x \notin F$ için F' in x ' i ihtiva etmeyen bir komşuluğu vardır [11].
2. Genelde keyfi bir topolojik kategoride kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları birbirinden bağımsızdırlar. Örneğin $B = \{-1, 1\}$, $R = \{(-1, 1), (-1, -1), (1, 1)\}$ ve $F = \{1\}$ olsun. Bu durumda (B, R) kısmi sıralı bir uzay ve Önerme 5.1.11' den F kapalıdır. Fakat kuvvetli kapalı değildir. Diğer taraftan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ olmak üzere $B = \mathbb{R}$, $\mathfrak{F} = P(\mathbb{R}) - \{\phi\}$ olsun. Bu durumda $(B, \mathfrak{F})$ prebornolojik bir uzay ve Önerme 5.1.12' den rasyonel sayılar kümesi kuvvetli kapalıdır fakat kapalı değildir [16].

Teorem 5.1.14: [41] (A, K) Cauchy uzay olsun. $\{p\}$ A de kapalıdır $\Leftrightarrow \forall \alpha \in K$ ve $\alpha \neq [p]$ için; $\exists U \in \alpha$ vardır öyle ki $p \notin U$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $\{p\}$ kapalı olsun. Tanım 5.1.7 ve Uyarı 5.1.2 dan, $V_p^\infty A$ wedge üzerindeki herhangi σ süzgeçi ve $V_p^\infty A$ wedge üzerindeki herhangi z noktası için, $\forall i \in I$ için $\pi_i : B^\infty \rightarrow B$ iz-düşüm fonksiyonlar olmak üzere, $p_i \sigma = \pi_i A_p^\infty \sigma \in K$ ve $\nabla_p^\infty \sigma = [\nabla_p^\infty z]$ veya $\nabla_p^\infty \sigma = [\emptyset]$ dır. Eğer $\forall U \in \alpha, p \in U$ için $\alpha \neq [p]$ olacak şekilde $\alpha \in K$ varsa (A, K) Cauchy uzay olduğundan $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeçtir ve $\alpha \cap [p] \in K$ dır. $\alpha \neq [p]$ ve $\alpha \cup [p]$ öz-süzgeç olduğundan, $x \neq p$ olacak şekilde A -de bir x öyle ki $\alpha \cap [p] \subseteq [\{x, p\}]$ ve $[\{x, p\}] \in K$. Kabul edelim ki $\sigma = [(x, p, p, \dots)]$ ve $z = (p, x, p, p, \dots)$ olsun. Açık olarak $p_1 \sigma = [x] \in K$, $p_2 \sigma = [p] \in K \forall i \geq 3$ için $p_i \sigma = [p] \in K$ ve $\nabla_p^\infty z = x$ olmak üzere $\nabla_p^\infty \sigma = [\nabla_p^\infty z]$ olur. $\{p\}$ kapalı ve $x \neq p$ olduğundan, $\sigma = [z]$ olması bir çelişkidir.

Tersine olarak, kabul edelim ki şartı sağlasın ve $x \neq p$ ve x i -nci olmak üzere $x_i = (p, p, \dots, x, p, \dots)$ wedge de herhangi bir nokta olsun. Eğer σ süzgeçi $\forall n \neq i$ için $p_i \sigma \in K$, $p_n \sigma \in K$ ve $\nabla_p^\infty x_i = [x]$ olmak üzere $\nabla_p^\infty \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p^\infty \sigma = [\nabla_p^\infty x_i]$ şartı sağlarsa $\nabla_p^\infty \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p^\infty \sigma = [x]$ olduğundan $\sigma = [\emptyset]$ ve bazı j için $\sigma = [x_j]$ veya $\sigma \supset \bigcap_{k=1}^n [x_{i_k}]$ olur. Burada x_{i_k} sonsuz wedge çarpımının i_k -nci bileşenidir. Bazı j için $\sigma = [\emptyset]$ veya $\sigma = [x_j]$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer bazı $i \neq j$ için $\sigma = [x_j]$ ise (A, K) Cauchy uzay olduğundan $p_i [x_j] = [p] \in K$ ve $p_j [x_j] = [x] \in K$ olur. Eğer $[\emptyset] \neq \sigma \neq \bigcap_{k=1}^n [x_{i_k}]$ ve $\sigma \supset \bigcap_{k=1}^n [x_{i_k}]$ ise, ispatı bazı $1 \leq m \leq n$ için $\sigma = \bigcap_{k=1}^m [x_{i_k}]$ olduğundan açıktır (Teorem 3.2.6). Eğer $\sigma = \bigcap_{k=1}^m [x_{i_k}]$ olsaydı Uyarı 5.1.2 dan $p_i \sigma = [x] \cap [p] \in K$ ve kabulümüzden $p_i \sigma \in K$ olur ki bu bir çelişkidir. Benzer Şekilde eğer $i = i_k$ ve $i \neq i_k$ için $p_i \sigma = [x] \cap [p] \in K$ olsaydı $p_j \sigma = [x] \cap [p]$ ve kabulümüzden $p_i \sigma \in K$ olur bur da bir çelişkidir. Eğer $i \neq j = i_k$ ve sonuç olarak $[x] \cap [p] \in K$ olup bir çelişkidir. O halde $\sigma = [\emptyset]$ veya bazı j için $\sigma = [x_j]$ olur. Eğer $\forall i$ için $p_i \sigma \in K$ ve $\nabla_p^\infty \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p^\infty \sigma = [p]$ ise $(\nabla_p^\infty)^{-1}(p) = (p, p, \dots)$ olduğundan $\sigma = [\emptyset]$ veya $\sigma = [(p, p, \dots)]$. Eğer $\sigma = [\emptyset]$ veya $\sigma = [x_i]$ ise, o zaman $p_i \sigma = [\emptyset]$ veya $p_i \sigma = [x]$ olur

ve ikisi de K dadır ve benzer şekilde $p_n \sigma = [\phi]$ veya $p_n \sigma = [p]$ olup ikisi K dadır. $\forall n \neq i$ için $\nabla_p^\infty \sigma = [\phi]$ veya $[\nabla_p^\infty x_i]$ dir, burada $\nabla_p^\infty x_i = x$ dir. O halde $\{p\}$ kapalıdır.

Lemma 5.1.15. ([9], Lemma 3.3) $\phi \neq F \subset B$ alt cümlesi için q , B/F üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere,

$q: \mathcal{U}(X) = B \rightarrow B/F = (B/F) \cup \{*\}$ epi $\mathcal{U}$ – kaynağının bitiş kaldırması X/F ile gösterilir. σ B üzerinde bir süzgeç ve $a \notin F$ olacak şekilde B 'de bir nokta olsun. Bu durumda; $[a] \cap [*] = q([a] \cap [F]) \supset q\sigma$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma \cup [F]$ öz süzgeç (proper) ve $\sigma \subset [a]$ olmasıdır.

Teorem 5.1.16: [41] $(A, K) \in ob(\mathbf{CHY})$ olsun. $\phi \neq F \subset A$ kapalıdır $\Leftrightarrow \forall a \in A, a \notin F$ ve $\forall \alpha \in K$ için, $\alpha \cup [F]$ öz-olmayan süzgeçtir veya $\alpha \not\subset [a]$ dir.

İspat: F kapalıdır ancak ve ancak Tanım 5.1.7 gereği $* \in A/F$ da kapalıdır ancak ve ancak Teorem 5.1.14 gereği her $\alpha \in K'$ (Burada K' A/F deki K 'nın bölüm Cauchy yapısıdır) için $\alpha \neq [*]$, $* \notin U$ olacak şekilde $U \in \alpha$ vardır ancak ve ancak A/F deki her $a \neq *$ için, $\{a, *\} \notin K'$ dir ancak ve ancak Lemma 5.1.15 gereği $a \notin F$ ve $\alpha \in K$ için $\alpha \cup [F]$ öz-olmayan süzgeçtir veya $\alpha \not\subset [a]$ dir.

Teorem 5.1.17: [41] $(A, K) \in ob(\mathbf{CHY})$ olsun. $\phi \neq F \subset A$ kuvvetli kapalıdır

$\Leftrightarrow \forall a \in A, a \notin F$ ve $\forall \alpha \in K$ için, $\alpha \cup [F]$ öz-olmayan süzgeçtir veya $\alpha \not\subset [a]$ dir.

İspat: F kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak Tanım 5.1.7 gereği X/F * de T_1 dir ancak ve ancak Teorem 3.2.6 gereği her $\alpha \in K'$ (Burada K' A/F deki K 'nın bölüm Cauchy yapısıdır) için $\alpha \neq [*]$, $* \notin U$ olacak şekilde $U \in \alpha$ vardır ancak ve ancak A/F deki her $a \neq *$ için, $[a] \cap [*] \notin K'$ dir ancak ve ancak $\forall \alpha \in K$ için $[a] \cap [*] = q([a] \cap [F]) \not\supset q\alpha$ dir ancak ve ancak Lemma 5.1.15 gereği, $[a] \not\subset \alpha$ veya $\alpha \cup [F]$ öz-olmayan süzgeçtir.

Tanım 5.1.18: $\mathcal{E}$, Set topolojik kategori, $X, \mathcal{E}$ 'de bir obje ve F , X in boştan farklı bir alt kümesi olsun.

1. $F \subset X$ açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c X te kapalıdır.
2. $F \subset X$ kuvvetli açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c X te kuvvetli kapalıdır [17].

Teorem 5.1.19: [41] $(A, K) \in ob(\mathbf{CHY})$ olsun.

$\emptyset \neq F \subset A$ (kuvvetli) açıktır $\Leftrightarrow \forall a \in F$ ve $\forall \alpha \in K$ için, $F^c = A \setminus F$ olmak üzere $\alpha \cup [F^c]$ öz-olmayan süzgeçtir veya $\alpha \not\subset [a]$ dır.

İspat: Tanım 5.1.18, Teorem 5.1.16 ve Teorem 5.1.17 gereği ispat aşıkardır.

5.2. Cauchy Uzayında Bağlantılı, Kompakt objeler

Şimdide Cauchy uzaylar kategorisinde (kuvvetli) bağlantılılık (kompaktlık) kavramlarının farklı gösterimlerini karakterize edeceğiz.

Tanım 5.2.1 : $\mathcal{E}$, Set topolojik kategori, X , $\mathcal{E}$ ’de bir obje olsun.

1. X bağlantılıdır ancak ve ancak X ’in hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dır [17].
2. X kuvvetli bağlantılıdır ancak ve ancak X ’in hem açık hem de kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dır [17].
3. X $\mathcal{D}$ –bağlantılıdır ancak ve ancak X ten herhangi bir diskre objeye tanımlanan herhangi bir dönüşüm sabittir [33, 17].

Topolojik uzaylar kategorisi olan **Top** ta ki kuvvetli bağlantılılık ve $\mathcal{D}$ –bağlantılılık genel anlamdaki bağlantılılık kavramına denk gelir. Eğer bir X topolojik uzayı T_1 ise Tanım 5.2.1 den bağlantılılık ve kuvvetli bağlantılılık kavramları denk gelir [1].

Teorem 5.2.2: [41] $(A, K) \in ob(\mathbf{CHY})$ olsun.

(A, K) (kuvvetli) bağlantılıdır ancak ve ancak herhangi $\emptyset \neq F \subset A$ için, aşağıdaki (I) ve (II) şartı sağlar.

(I) K -de bir α öz-süzgeç vardır öyleki $\alpha \cup [F]$ öz-süzgeçtir ve bazı $a \in F^c$ için $\alpha \subset [a]$ dır.

(II) K -de bir α öz-süzgeç vardır öyleki $\alpha \cup [F^c]$ öz-süzgeçtir ve bazı $b \in F$ için $\alpha \subset [b]$ dır.

İspat: Tanım 5.2.1, Teorem 5.1.16, 5.1.17 ve 5.1.19 gereği ispat aşıkardır.

Teorem 5.2.3: [41] $(A, K) \in ob(\mathbf{CHY})$ olsun.

(A, K) D - bağlantılıdır ancak ve ancak herhangi $\phi \neq F \subset A$ için, Teorem 5.2.2 deki (I) ve (II) şartlarını sağlar.

İspat: Kabul edelim ki (A, K) D - bağlantılı ama bazı $\phi \neq F \subset A$ için (I) ve (II) şartları sağlanmasın ve (B, S) CHY de diskre yapısı yani $CardB > 1$ için $S = \{[a] \mid a \in B\} \cup \{[\phi]\}$ olsun. $a, b \in B$ ayrık iki nokta olsun. $f : (A, K) \rightarrow (B, S)$ ve eğer $x \in F$ ise $f(x) = a$ ve eğer $x \in F^c$ ise $f(x) = b$ şeklinde f i tanımlayalım. Biz f 'ın sürekli olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $c \in A$ ve $\alpha \in K$ olsun. $c \in F$ olsun. Herhangi $\alpha \in K$ için $\alpha \cup [F^c]$ öz-olmayan süzgeçtir (kabulümüzden), $V \cap F^c = \phi$ olacak şekilde $V \in \alpha$ seçilebilir. Biz $f(\alpha) \in S$ yani $f(\alpha) = [\phi]$ veya $f(\alpha) = [f(c)] = [a]$ ($c \in F$ olduğundan) olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer $\alpha = [\phi]$ ise $f(\alpha) = [\phi]$ olur. Kabul edelim ki $\alpha \neq [\phi]$ ve $W \in f(\alpha)$ olsun. $W \in f(\alpha)$ olduğundan $W \supset f(V)$ olacak şekilde $V \in \alpha$ vardır. $V \subset F$ olduğundan $f(V) = \{a\}$ olur ve sonuç olarak $a \in W$ ve $f(\alpha) = [a]$ olur. Benzer şekilde eğer $c \in F^c$ olsa, o zaman $f(\alpha) = [\phi]$ veya $f(\alpha) = [b]$ olur. Dolayısıyla f sürekli ama sabit olmadığından bir çelişki elde edilir.

Kabul edelim ki (I) şartı sağlansın. $f : (A, K) \rightarrow (B, S)$ ve (B, S) diskre obje olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $CardB = 1$ ise f sabit fonksiyondur. $CardB > 1$ ve f sabit olmasın. $y, c \in A$ ve $y \neq c$ vardır öyle ki $f(c) \neq f(y)$ dır. $F = \{c\}$ olsun. Kabulümüzden $\alpha \cup [F] = \alpha \cup [x]$ öz-süzgeç ve $\alpha \subset [y]$ olacak şekilde $\alpha \in K$ vardır. Cauchy uzayının tanımından $\alpha \cap [x] \in K$ dır. Buradan

$\alpha \cap [x] \subset \alpha \subset [y]$ olur. $\alpha \cap [x] \in K$ ve f sürekli fonksiyon olduğundan $f(\alpha \cap [x]) = f(\alpha) \cap f([x]) \in S$ olur. Fakat, $f(\alpha) \cap f([x]) \subset \{f(y), f(c)\}$ ve $f(y) \neq f(c)$ olduğundan $\{f(y), f(c)\} \notin S$ olur. Buradan f sürekli olmayıp çelişkidir. O halde f sabit olmak zorundadır.

Benzer şekilde eğer (II) şartı sağlarsa ispatı benzer şekilde yapılır. O halde Tanım 5.2.1 gereği (A, K) D -bağlantılıdır.

Tanım 5.2.4: [41] $\mathcal{U} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktor, $X, Y \in \mathcal{E}$ 'de objeler ve $f : X \rightarrow Y$ $\mathcal{E}$ da bir morfizm olsun. Bu takdirde,

1. f morfizmi kapalıdır ancak ve ancak X in her bir kapalı alt objesinin f altındaki görüntüsünün Y de kapalı olmasıdır.
2. f morfizmi kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak X in her bir kuvvetli kapalı alt objesinin f altındaki görüntüsünün Y de kuvvetli kapalı olmasıdır.
3. X kompakttır ancak ve ancak $\mathcal{E}$ daki her bir Y objesi için $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$

izdüşüm fonksiyonunun kapalı olmasıdır.

4. X kuvvetli kompakttır ancak ve ancak $\mathcal{E}$ daki her bir Y objesi için $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ izdüşüm fonksiyonunun kuvvetli kapalı olmasıdır.

Tüm topolojik uzayların kategorisi **Top** da, kapalı morfizimler ve kompaktlık kavramları bilinen topolojik uzaylardaki kavramlara indirgenir.

Teorem 5.2.5: [41] **CHY** kategorisindeki tüm objeler (kuvvetli) kompakttır.

İspat: Kabul edelim ki (A, K) herhangi bir Cauchy uzayı olsun. Tanım 5.2.4 den tüm (B, L) Cauchy uzayları için $\pi_2 : (A, K) \times (B, L) \rightarrow (B, L)$ izdüşüm fonksiyonunun (kuvvetli) kapalı olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $M \subset A \times B$ (kuvvetli) kapalı olsun. Göstereceğiz ki $\pi_2(M)$ (kuvvetli) kapalıdır. Aksini kabul edelim. Yani $\pi_2(M)$ (kuvvetli) kapalı olmasın. Bu takdirde, Teorem 5.1.16 (Teorem 5.1.17) den, $a \notin \pi_2(M)$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ için $\alpha \cup [\pi_2(M)]$ öz süzgeç ve $\alpha \subset [a]$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in L$ vardır. $\sigma = [M] \cup \pi_2^{-1}\alpha$ olarak alalım. Buradan, σ öz süzgeçtir ve en az bir $x \in B$ için $\pi_2^{-1}(\alpha) \subset \pi_2^{-1}([a]) = [\pi_2^{-1}(a)] = [B \times \{a\}] \subset [(x, a)]$ dır. $[a] \in K$ ve $[x] \in L$ olduğundan, $[(a, x)] \in K \times L$ elde ederiz ki burada $K \times L$, $A \times B$ üzerinde Cauchy çarpım yapısıdır. Fakat bu durum Teorem 5.1.16 (Teorem 5.1.17) den $M \subset A \times B$ (kuvvetli) kapalı olmasıyla çelişir. Buradan $\pi_2(M)$ (kuvvetli) kapalı olur ki buda bize (A, K) Cauchy uzayının (kuvvetli) kompakt olmasını verir.

6. BÖLÜM

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

6.1. Sonuç ve Değerlendirme

Bu tez çalışmamızda Cauchy uzaylar ele alındı. İlk olarak, Cauchy uzayların tanımı verilerek; objeleri Cauchy uzaylar ve morfizimleri *Cauchy-dönüşümlerden* oluşan **CHY** kategorisinin topolojik kategori olduğu gösterildi. Üçüncü bölümde p noktasında $\bar{T}_0$, T'_0 ve T_1 Cauchy uzaylar karakterize edildi ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelendi. Dördüncü bölümde Cauchy uzaylarda geneldeki $\bar{T}_0$, T'_0 ve T_1 ayrım aksiyomları incelendi. Ayrıca p noktasındaki T_i , $i = 0, 1$ Cauchy uzaylarla genelde T_i , $i = 0, 1$ Cauchy uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi. Son olarak Beşinci bölümde, Cauchy uzaylarda kapalı, kuvvetli kapalı alt cümleleri karakterize edildi ve bilinen kapalı alt cümlelerle ilişkiler incelendi. Bununla birlikte Cauchy uzaylarda bağlantılı, kuvvetli bağlantılı ve $\mathcal{D}$ – bağlantılı alt cümlelerinin karakterizasyonu verildi ve bazı özellikleri incelendi.

İleride yapılacak çalışmalarda **CHY** kategorisinde aşağıdaki sorular incelenecektir.

1. Normal ve regüler Cauchy uzaylar noktada ve genelde karakterize edilebilir mi?
2. Eğer bunlar karakterize edilebilir ise bunlarla klasik olanlar arasındaki ilişkiler nelerdir?

KAYNAKLAR

1. Spivak, D. I., 2013. Category Theory for Scientists., Free online.
2. Eilenberg, S., Mac Lane, S., 1945. Relation between homology and homotopy groups of spaces, **Annals of Mathematics**, **46**: 480-509.
3. Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E., 1990. Abstract and Concrete Categories., New York: Wiley.
4. Herrlich, H., 1975. Topological Functors, **Gen. Top. Appl.**, 4: 125-142.
5. Kent, D. C., 1969. Convergence quotient maps, **Fundamante Mathematica**, **165**: 197-205.
6. Wyler, O., 1971. Top Categories and Categorical Topology, **Gen. Top. Appl.**, **11**: 17- 28.
7. Schwartz, F., 1978. Connections Between Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math. No.719, Springer-Verlag, 345-354.
8. Baran, M., 1992. Separation properties, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **23**: 333-341.
9. Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, **Commentationes Mathematica Universitatis Carolinae**, **34**: 383-395.
10. Baran, M., 1997. A notion of compactness in topological categories. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, **50 no. 3-4**: 221-234.
11. Baran, M., 1992. Separation properties at p for the topological categories of reflexive relation spaces and preordered spaces, **Mathematica Balkanica**, **3**: 193-198.
12. Baran, M., 1994. Generalized local separation properties, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **25**: 615-620.
13. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, **Acta Mathematica Hungarica**, **87**: 33-45.
14. Baran M., Al-Safar J., 2011. Quotient-reflective and bireflective subcategories of the category of preordered sets. **Topology and its Appl.**, **158**: 2076-2084.
15. Johnstone, P. T., 1977. Topos Theory. New York: Academic Press.
16. Baran, M., 1998. Completely Regular Objects and Normal Objects in topological categories, **Acta Mathica Hungarica**, **80 no. 3**: 211-224.

17. Baran, M., Kula, M., 2006. A note on connectedness, **Publicationes Mathematicae Debrecen**, **68/3-4**: 489-501.
18. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, **Applied Categorical Structures**, **10**: 403-415.
19. Dikranjan, D., Giuli, E., 1987. Closure Operators I, **Topology Appl.**, **27**: 129-143.
20. Baran, M., Altindis, H., 1996. T_2 -objects in topological categories, **Acta Mathematica Hungarica**, **71 (1-2)**: 41-48.
21. Brümmer, G. C. L., 1971. A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology, Ph.D. Thesis, Univ. of Cape Town.
22. Hoffmann, E. R., 1973. (E,M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, Dusseldorf.
23. Marny, T. H., 1973. Rects-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien Dissertation, Frei Univ., Berlin.
24. Baran, M., 1990. Separation Properties in Topological Categories, Ph. D. Thesis, University of Miami.
25. Hang, H. H., 1973. Limit Operators and Reflective Subcategories, Topo 72 II Pittsburg Internat. Confer., 378 Springer-Verlag, Berlin.
26. Weil, A., 1937. Sur les Espaces a Structure Uniforme et sur la Topologie Generale, **Act. Scient. et Ind.**, 551.
27. H. J. Kowalsky, 1954. Limesraume und Komplettierung, **Math. Nachr.**, **12**: 301-340.
28. Cook, C. H., Fischer, H. R., 1967. Uniform Convergence Structure, **Math. Ann.**, **173**: 290-306.
29. H. Keller, 1968. Die Limes-uniformisierbarkeit der Limesraume, **Math. Ann.**, **176**: 334-341.
30. E. Reed, 1971. Completion of uniform convergence spaces, **Math. Ann.**, **194**: 83-108.
31. Preuss, G., 2002. Foundations of topology, An approach to Convenient Topology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
32. Bourbaki, N., 1966. Elements of Mathematics General Topology, Addison-Wesley Publishing Company.

33. Preuss, G., 2009. Prefilter spaces and a precompletion of preuniform convergence spaces related to some well-known completions. **Topology and its applications**, **156**: 2005-2012.
34. L. M., Friedler, 1973. Quotients of Proximity Spaces, **Proceedings of the American Mathematical Society** **37 no 2**: 589-594.
35. Kula, M., Maraşlı T., Özkan S., 2014. A Note On Closedness And Connectedness In The Category Of Proximity Spaces. **Filomat**, **vol.28**: 1483-1492.
36. S., Weck Schwarz, 1991. T_0 -objects and seperated objects in topological categories, **Questiones Math.** **14**: 315-325
37. E., Lowen-Colebunders, 1989. Function Classes of Cauchy Continuos Maps, M. Dekker, New York.
38. G., Preuss, 1991. Improvement of Cauchy spaces, **QUA in General Topology**, **9**: 159-166.
39. N., Rath, 1994. Precauchy spaces, PH.D. Thesis, Washington State University.
40. Kula, M., 2012. Separation Properties At p For The Topological Category Of Cauchy Spaces., **Acta Mathematica Hungarica**, **136 (1-2)**: 1-15.
41. Kula, M., 2011. A Note On Cauchy Spaces. **Acta Mathematica Hungarica**, **133**: 14–32.
42. Baran, M., 1993. Ayrılma Aksiyomları, **Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi**, **(1-2)**: 47-54.
43. Harvey, J. M., 1977. T_0 -Seperation İn Topological Categories, **Quaestions Mathematica** **2**: 177-190.
44. Baran, M., Altındış, H., 1995. T_0 -objects objects in topological categories, **Kuwait Journal of Science**, **22**: 123-127.
45. Lodato, M. W., 1964. On topologically induced generalized proximity relations. **Proceedings of the American Mathematical Society**, **15**: 417-422; **MR 28**: 4513.
46. Baran, M., 1998. T_3 and T_4 -objects in topological categories **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **29**: 59-69.
47. L. D., Nel, 1975. Initially structured categories and cartesian closedness, *Canad. J. Math.*, **XXVII** : 1361–1377.

48. M. M. Clementino, E. Giuli, W. Tholen, 1996. A Functional Approach to General Topology., **In: Categorical Appl. Categ. Structures**, **4**: 15-29.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mustafa KAYA
Baba Adı : Hüseyin
Anne Adı : Emine
Doğum Yeri : Gerger / ADIYAMAN
Doğum Tarihi : 21.10.1990

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2013
Ortaöğrenim	İbrahim Turhan Lisesi, İstanbul	2009

İLETİŞİM

Adres : Fatih Mah. 228. Sok. Birlik Apt. No: 6/17
Esenler / İSTANBUL