

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ



PROJE BAŞLIĞI
Biyolojik Yapıların Matematiksel Modellenmesi ve Kararlılık Analizi

Proje No: FBA-12-4137

Proje Türü
Normal Araştırma Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Yrd. Doç. Dr. Fatma Bozkurt
Eğitim Fakültesi/ İlköğretim Bölümü

Araştırmacının Adı Soyadı
Doç. Dr. Thabet Abdeljawad
Yrd. Doç. Dr. Fatma Berna Benli
Arş. Gör. Fatma Peker

Eylül 2013

KAYŞERİ

TEŞEKKÜR

Proje kodu FBA-12-4137 ve proje başlığı “*Biyolojik Yapıların Matematiksel Modellenmesi ve Kararlılık Analizi*” olan bu çalışmada başarılı bir grup çalışması neticesinde çok güzel yayınlar çıkartan ve proje sorumluluğunu en iyi şekilde gösteren değerli meslektaşlarım Doç. Dr. Thabet Abdeljawad, Yrd.Doç. Dr. Fatma Berna Benli ve öğrencim Arş. Gör. Fatma Peker’e teşekkür ederim.

Bu proje çalışması süresince manevi desteklerinden dolayı BAP Koordinatörü değerli hocam Prof.Dr. Adem Kalınlı’ya ve Erciyes Üniversitesi’nin Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ne sunduğu maddi kaynaklardan dolayı proje ekibi olarak teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	5
ABSTRACT	6
1. GİRİŞ	7
2. GENEL BİLGİLER-1	8
2.1. HIV/AIDS EPİDEMİSİ VE MODELİ	8
2.2. HIV EPİDEMİSİ VE PARÇALI SABİT ARGÜMANLI MODELİ	13
2.3. HIV/AIDS EPİDEMİSİ VE PARÇALI SABİT ARGÜMANLI MODELİ	26
3. GENEL BİLGİLER-2	39
3.1. BULANIK SAYILAR	39
3.2. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	47
4.GEREKÇE VE YÖNTEM	56
5.BULGULAR	57
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	58
7.KAYNAKLAR	59

ÖZET

Bu proje çalışmasında öncelikli olarak HIV modeli göz önüne alındı ve bu modelin kararlılık analizi incelendi. Bu modelden elde edilen sonuçlar ile Hindistan'ın demografik verileri dikkate alındı ve simülasyonlarla Hindistan'daki HIV vakaları ile ilgili tahmini bilgiler elde edildi.

Daha sonra HIV/AIDS epidemisi ile ilgili bir model kuruldu ve bu modelin kararlılık analizi yapıldı. Elde edilen sonuçlar Türkiye'deki HIV/AIDS vakaları ile mukayese edildi.

Çalışmanın devamında bulanık sayılar teorisi, zamanda göre gecikmeli ve kesirsel mertebeden diferansiyel denklem teorisi üzerine odaklanıldı. Buna göre, bulanık sayılar ile ilgili teorik çalışmalar yapıldı, bir türün popülasyonunu incelemek için zaman göre gecikmeli lojistik diferansiyel denklem oluşturuldu ve analiz edildi ve son olarak GBM-IS iç çekişmesi kesirsel mertebeden bir diferansiyel denklem sistemi olarak tasarlandı ve analiz edildi.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklemler, Fark Denklemler, Kesirsel Mertebeden Diferansiyel Denklemler, Parçalı Sabit Argümanlar, Bulanık Sayılar.

ABSTRACT

In this Project, we have at firstly considered a HIV model and have analyzed the stability of this one. The results were considered in view of the demographical data of India.

Then, a HIV/AIDS epidemic model was consturcted and analzed, where the data in Turkey are used to compare the obtained results.

The work is continued by taking attention to fuzzy number theory, delay differential equation theory and fractional order differential equation theory. Thus, theorical works in fuzzy number has been done, while also a delay logistic differential equation of a single species has been considered and a fractional order differential equation system of a GBM-IS interaction has been studied.

Key Words: Differential Equations, Difference Equations, Fractional Order Differential Equations, Piecewise Constant Argumants, Fuzzy Numbers.

1. GİRİŞ

Biyoloji, diğer disiplinler ile mukayese edildiğinde özünde oldukça karmaşık ve zor olaylarla ilgilenmektedir. Bu olayların açıklanmaya çalışılması aşaması ise sadece bu bilimin değil, matematik ve tıp gibi diğer disiplinlerin de ilgisini çekmiş ve Biyo-Matematik alanında disiplinlerarası çalışmaların oluşumuna yol açmıştır. Bu proje çalışması, son yılların en etkin epidemik hastalığı olarak bilinen HIV/AIDS hastalığının modellenmesi, analizi ve değerlendirilmesi üzerine olacaktır.

Belirtilen hastalık sürecini incelemek, tanı ve tedavi için büyük önem arz etmektedir. HIV/AIDS hastalığı ile ilgili modeller incelendiğinde, ayırık zamanlar ya da sürekli zamanların dikkate alındığı görülmektedir. Yapılan incelemeler, HIV epidemisi için daha çok sürekli zamanın dikkate alındığını göstermiştir [1-7]. Fakat bu hastalığın bulaşması ve viral yapının süreci dikkate alındığında, bekleme evrelere ve ayırık zaman aşamaların mevcut olması sebebiyle son yıllarda model kurumunda sürekli ve ayırık zamanın dikkate alındığı hibrid sistemler üzerine odaklanılmasına yol açmıştır. Proje çalışmasında;

1. Duyarlı (hastalığa sahip olmayan) bireylerin, HIV'in erken evresinde tedavi gören bireylerin, bu virüsün ilerlemiş safhasında olan bireylerin ve AIDS evresinde olan bireylerin bulunduğu, dört alt popülasyondan oluşan bir hibrid sistem inşa edilmiş, farklı ülkelerdeki veriler ile modelin tutarlılığı gözden geçirilmiştir.
2. HIV/AIDS epidemisinin viral yapısı irdelenmiş ve vücudun direnç sistemi (immune system) ile iç çekişmesi modellenip, teorik sonuçlarla biyolojik veriler mukayese edilmiştir.

Bu konu ile ilgili çalışmaların devamında hibrid denklem sistemleri dışında denklem yapıları incelenmiş ve bunlar biyolojik yapılara uyarlanmıştır. Bu doğrultuda, bulanık sayılar teorisi, adi ve kesirsel mertebeden diferansiyel denklem sistemlerine giriş yapılmış, bundan sonraki çalışmalara da zemin hazırlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER-1

Bu kısımda HIV/AIDS epidemisi ile ilgili bilgiler verilecek ve parçalı sabit argümanlı modeller kurulup bu modellerin teorik ve nümerik çalışmaları açıklanacaktır.

2.1. HIV/AIDS EPİDEMİSİ VE MODELİ

HIV, insanlarda bağışıklık sistemini bozan, bağışıklık sistemini bozduğu için kişiyi bazı enfeksiyonlara karşı zayıflatan ve AIDS hastalığına sebep olan bir virüstür. Kişinin vücudunda HIV virüsü olması, AIDS olduğu anlamına gelmez. HIV virüsünün vücudu hasta duruma getirecek kadar bağışıklık sistemini zayıflatması uzun yıllar alabilir. Ayrıca, HIV bulaştıktan sonra hastalık belirtileri birkaç yıl hatta bazen daha uzun süre (örneğin on beş yıl) sonra ortaya çıkabilir. Bu zaman süresince HIV hastalığına sahip bir kişi AIDS hastası olmadan yıllarca yaşayabilir. HIV, sahip olduğu coğrafyaya göre HIV-1 ve HIV-2 şeklinde ikiye ayrılır. HIV-1 ve HIV-2 virüsleri, viral yapı, bulaşma fonksiyonları, ürettikleri antikor ve hastalık belirtileri açısından benzerlik gösterse de, HIV-2 nin AIDS'e dönüşme süreci HIV-1'e göre çok daha yavaş gerçekleşir. Şu an dünyada en yaygın insan bağışıklık yetmezliği virüsü HIV-1'dir.

AIDS, Acquired Immune Deficiency Syndrome (Kazanılan Bağışıklık Sistemi Bozukluğu Sendromu)'nın kısaltılmışıdır. AIDS, HIV'e sahip kişilerin yakalanabileceği, bir dizi ender görülen enfeksiyonlar ve kanserlerin birleşimidir. Eğer, HIV'e sahip bir kişi bu hastalıklardan birine yakalanırsa, o zaman AIDS safhasına geçmiş olur.

Çalışmamızda HIV-1 hastalığı üzerinde durulmuştur. HIV-1 virüsünün sebep olduğu enfeksiyonla AIDS'in başlaması arasındaki ortalama süre 10 yıldır ve AIDS ile ilişkili durumun başlamasını takip eden ortalama yaşam süresi 1 yılın altındadır. HIV partikülleri vücuda girer girmez CD4+ T hücrelerini, makrofajları ve dentrit hücrelerini enfekte eder. Eğer bireye kombinasyon anti-HIV veya antiretroviral ilaç tedavisi gibi herhangi bir tedavi uygulanmazsa, bir milimetre küp kandaki CD4+ T hücre sayısı yaklaşık 1000 civarında iken bu sayı çarpıcı bir biçimde 200 civarına kadar düşer. Bu ise AIDS'e geçildiğinin ilk sinyallerini verir.

HIV enfeksiyonu bulaşmış kişi bu virüsü yaşamı boyunca taşır ve bulaştırıcıdır. Virüs sürekli olarak ürer. Virüs üremesinin etkileri ise çok sonra belirginleşmeye başlar. Hastada belirti ve klinik bulgular ortaya çıktığında, HIV enfeksiyonunun belirti veren evresine girilmiş olur.

Olguların büyük bölümünde insanlar virüsü aldıkları ve bulaştırıcı oldukları halde uzun süre hiçbir yakımda bulunmazlar. Bu duruma belirtisiz taşıyıcılık (seropozitiflik) denir. Kişi normal çalışma ve toplumsal yaşamını sürdürür. Ama belirtisiz de olsa bu dönemde yapılacak laboratuvar araştırmaları hastada virüsün varlığını kanıtlayabilir.

İşte bütün bu bilgilerin ışığı altında matematiksel modeller ile ilgili şu bilgileri verebiliriz. HIV(AIDS) için bir matematiksel model kurulacaksa iki şekilde düşünülebilir.

- i) Birincisi bağışıklık sistemi ve onun HIV ile ilişkisini tarif etmek için geliştirilebilir. Bu tarz modeller ilaç tedavisinin etkilerinin yanı sıra gelişmemiş enfekte hücrelerinin (belirti göstermeyen), CD4 hücrelerinin ve virüs popülasyonunun dinamiklerini, yani bu değişkenlerde zamanla meydana gelen değişiklikleri inceler.
- ii) İkincisi ise HIV hastalığının olduğu popülasyondaki bireyler dikkate alınarak geliştirilebilir. Bu modellerde hassas bireyler, HIV virüsüne sahip (HIV pozitif) ama bilmeyen bireyler, HIV virüsüne sahip (HIV pozitif) ve bilenler ve AIDS hastası olan bireylerin dinamik modelleri incelenir [1-9].

HIV(AIDS), zoonoz bir virüs olup hayvandan hayvana, hayvandan insana ve insandan insana bulaşan, mutasyon geçiren ve SI (hastalığa sahip olmayan ve hastalığa sahip olan) kategorisinde değerlendirilen bir epidemik hastalıktır.

S : Hassas bireyler

I : Hasta bireyler

β : Hastalık bulaşma oranı

ve toplam popülasyon $N=I(t)+S(t)$ olmak üzere; en basit haliyle SI modeli

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

şeklinde bir sistem olarak tasarlanmıştır [10].

$N=I(t)+S(t)$ eşitliği kullanılırsa $\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)(N - S(t))$ elde edilir. (2.1.1) sisteminin çözümü

$$S(t) = \frac{N(N-1)}{N-1+e^{\beta Nt}} \quad \text{ve} \quad I(t) = \frac{Ne^{\beta Nt}}{N-1+e^{\beta Nt}} \quad (2.1.2)$$

dir. (2.1.2)' den $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = N$ bulunur. Bu sonuçlardan belli bir zaman sonra hassas popülasyon sınıfındaki bireylerin sayısının sıfıra gittiği bununla birlikte epidemik popülasyon sınıfındaki bireylerin sayısında artışın meydana geleceği ve N değerine ulaşacağı beklenmektedir [11].

SI epidemisi olan HIV ile ilgili modelleme çalışmaları analiz edildiğinde bu virüsün vücuttaki evreleri ve gelişimi ile ilgili [10,12-14] ve insan popülasyonunda bu hastalığın bulaşması ile ilgili çalışmalara [15,16] rastlanmaktadır. Bu tezde, bir popülasyonda HIV epidemisine rastlanması, bu popülasyonda hastalığın bulaşması ve seyri analiz edileceğinden bu ve benzeri çalışmalar göz önüne alınmıştır [11-17].

Göz önüne alınan HIV epidemik hastalık modellerinden biri referans [10]'da görülür. Burada toplam nüfus $N = S + I_1 + I_2$ olmak üzere matematiksel model, aşağıdaki geçiş aşamaları dikkate alınarak oluşturulmuştur.

Birinci denklemde;

$\frac{c\beta SI_1}{N}$: I_1 sınıfındaki bireylerin hassas bireylere HIV bulaştırma oranı

$\frac{ca\beta SI_1}{N}$: I_2 sınıfındaki bireylerin hassas bireylere HIV bulaştırma oranı

$-dI_1$: I_1 sınıfında olup hayatını kaybeden birey oranı

$-k_1I_1$: hastalıklarının ilerlemesi sonucu I_1 sınıfından I_2 sınıfına geçen bireylerin oranı

αI_2 : ilaç tedavisi sonucu I_1 sınıfına dahil olan bireylerin oranı

İkinci denklemde;

$k_1 I_1$: hastalıklarının ilerlemesi sonucu I_1 sınıfından I_2 sınıfına dahil olan birey oranı

$-d I_2$: I_2 sınıfında olup hayatını kaybeden birey oranı

$-k_2 I_2$: hastalıklarının ilerlemesi sonucu I_2 sınıfından ayrılarak AIDS evresinde olan bireylerin oranı

$-\alpha I_2$: ilaç tedavisi sonucu I_2 sınıfından I_1 sınıfına geri dönen bireylerin oranı

ve son olarak üçüncü denklemde ise

$$\frac{dS}{dt} = b(S + I_1 + I_2) - dS - \frac{c\beta S I_1}{N} - \frac{ca\beta S I_1}{N} \quad \text{ve} \quad \frac{dN}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

olmak üzere

$$\frac{dN}{dt} = c\beta \frac{S}{N} (I_1 + aI_2) - (d + k_1) I_1 + \alpha I_2 + k_1 I_1 - (d + k_2 + \alpha) I_2 +$$

$$b(S + I_1 + I_2) - dS - \frac{c\beta S I_1}{N} - \frac{ca\beta S I_1}{N}$$

dir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N - k_2 I_2$$

elde edilir. Bu durumda model,

$$\frac{dI_1}{dt} = c\beta \frac{S}{N} (I_1 + aI_2) - (d + k_1) I_1 + \alpha I_2$$

$$\frac{dI_2}{dt} = k_1 I_1 - (d + k_2 + \alpha) I_2 \quad (2.1.3)$$

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N - k_2 I_2$$

şeklinde olup (2.1.3) modeli, hastalığa sahip olmayan bireyler, hastalığın ilk aşamasında olan, hastalığın ilerlemiş aşamasında olan bireyler dikkate alacak şekilde tasarlanmıştır. Burada amaç,

epidemik hastalığa sahip olup bunu bulaştıran ve bununla birlikte bu hastalığa sahip olup da evrenin ilk aşamasında ve ilerlemiş aşamasında olan popülasyonların birbirleriyle etkileşimi sonucunda zamanla popülasyonda meydana gelecek değişimi analiz etmektir [10]. Buna göre (2.1.1) modelinden farklı olarak bu modelde enfeksiyona sahip olan hastaların iki alt kategoride dikkate alındığı görülmektedir.

Yukarıda belirtilen (2.1.3) modeli geliştirilerek HIV'in son evresi olan AIDS in varlığının dikkate alınmasıyla başka bir model

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= Q_0 - \left(\frac{\beta_1 S I_1 + \beta_2 S I_2}{N} \right) - \mu S \\
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{\beta_1 S I_1}{N} + \frac{(1-\varepsilon)\beta_2 S I_2}{N} - (\theta + \delta_1 + \mu) I_1 - h(I_1, I_2) \\
\frac{dI_2}{dt} &= \frac{\varepsilon\beta_2 S I_2}{N} + \theta I_1 - (\delta_2 + \mu) I_2 + h(I_1, I_2) \\
\frac{dA}{dt} &= \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 - (\alpha + \mu) A
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

şeklinde düzenlenmiştir [18]. Bu model (2.1.3) denklem sistemine benzer düşünce ile oluşturulmuştur.

HIV ile ilgili modeller incelendiğinde sürekli zamanın dikkate alındığı yani; modelin diferensiyel denklem sistemi olarak ifade edildiği görülmüştür. Fakat HIV epidemisinin hassas birey popülasyonuna bulaşması ve evreler dikkate alındığında popülasyonları etkileyen bazı faktörlerin ayrık zamanda gerçekleştiği tespit edilmiştir. Bu sebeple, popülasyonları ayrık zamanda etkileyen parametreler için farklı bir ifade ediliş düşüncesi ortaya çıkmış ve 1982 yılında Buseenberg ve Cook'un biyolojik yapıları yorumlarken parçalı sabit argümanlardan faydalanması ile bu düşünce projenin ana konusu olmuştur.

2.2. HIV EPİDEMİSİ VE PARÇALI SABİT ARGÜMANLI MODELİ

Bu kısımda, epidemik hastalığa sahip olmayan, hastalığa sahip olan fakat hasta olduğunu bilmeyen, hastalığa sahip olan ve hasta olduğunu bilen bireylerin zamana göre değişimini gösteren bir diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur.

S : epidemik hastalığa sahip olmayan insan popülasyonu

I_1 : HIV hastalığına sahip fakat bunu bilmeyen popülasyon

I_2 : HIV hastalığına sahip ve bunu bilen insan popülasyonu

r_1 : S popülasyonunun büyüme oranı,

p_1 : S popülasyonuna dahil olan yıllık hassas birey oranı

β_1 : I_1 popülasyonunun, S popülasyonuna HIV hastalığını bulaştırma oranı

β_2 : I_2 popülasyonunun, S popülasyonuna hastalığı bulaştırma oranı

α_1 : S popülasyonunun doğal sebeplerden kaynaklanan ölüm oranı

olmak üzere t zamana göre S popülasyonunun değişimini veren denklem

$$\frac{dS}{dt} = S(t) r_1 (p_1 - \alpha_1 S(t) - \beta_1 I_1([t]) - \beta_2 I_2([t])) \quad (2.2.1)$$

şeklinde yazılabilir.

r_2 : I_1 popülasyonunun büyüme oranı olarak

α_2 : I_1 bu popülasyonu için doğal sebeplerden kaynaklanan ölüm oranı

θ : Belirli rahatsızlık belirtileri sonucu uygulanan tıbbi takiplerin neticesinde I_1 sınıfındaki bireylerin hastalığına sahip olduklarını öğrenme oranı

γ : I_1 sınıfındaki bireyin I_2 sınıfındaki birey ile teması sonrası bu hastalığına sahip olduğunun farkına varma oranı

ε_1 : I_1 sınıfındaki bireylerin S sınıfındaki bireylere hastalığı bulaştırmaları sonucu S sınıfındaki bireylerin HIV'e sahip olduklarının farkına varmaları oranı,

ε_2 : I_2 sınıfındaki bireylerin S sınıfındaki bireylere hastalığı bulaştırmaları sonucu S sınıfındaki bireylerin bu epidemiyeye sahip olduklarının farkına varma oranı

olmak üzere, t zamana göre I_1 popülasyon sınıfındaki değişimin denklemi

$$\frac{dI_1}{dt} = I_1(t)r_2(1 - \alpha_2 I_1(t) + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S([t]) - \gamma I_2([t]) - \theta I_1([t]) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S([t])I_2([t])) \quad (2.2.2)$$

şeklindedir.

r_3 : I_2 popülasyon sınıfındaki bireylerin büyüme oranı

α_3 : I_2 sınıfındaki bireylerin doğal sebeplerden kaynaklanan ölüm oranı

olmak üzere I_2 popülasyon sınıfındaki değişimin denklemi

$$\frac{dI_2}{dt} = I_2(t)r_3(1 - \alpha_3 I_2(t) + \beta_2 \varepsilon_2 S([t]) + \gamma I_1([t]) + \theta I_1([t]) + \beta_1 \varepsilon_1 S([t])I_1([t])) \quad (2.2.3)$$

şeklindedir.

(4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri birlikte göz önüne alındığında, HIV epidemisinin matematiksel modeli; $[t]$, $t \in [0, \infty)$ için t 'nin tam değeri olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= S(t)r_1(p_1 - \alpha_1 S(t) - \beta_1 I_1([t]) - \beta_2 I_2([t])) \\ \frac{dI_1}{dt} &= I_1(t)r_2(1 - \alpha_2 I_1(t) + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S([t]) - \gamma I_2([t]) - \theta I_1([t]) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S([t])I_2([t])) \\ \frac{dI_2}{dt} &= I_2(t)r_3(1 - \alpha_3 I_2(t) + \beta_2 \varepsilon_2 S([t]) + \gamma I_1([t]) + \theta I_1([t]) + \beta_1 \varepsilon_1 S([t])I_1([t])) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

olarak yazılabilir.

Bu kısımda, öncelikli olarak (2.2.4) diferansiyel denklem sisteminin pozitif denge noktası elde edilmiştir. Bu modelde $r_1, r_2, r_3, p_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma, \theta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ pozitif reel sayılar, $[t]$, $t \in [0, \infty)$ için t 'nin tam değeri ve t zamanı göstermek üzere $t \in [n, n+1)$ alt aralıklarda (4.1.4) sisteminin fark denklem sistemi olarak elde edilen çözümleri dikkate alınmış ve elde edilen bu çözüm sistemi için kararlılık analizi yapmak amacıyla pozitif denge noktası bulunmuştur.

Şimdi (2.2.4) denklem sistemini göz önüne alalım. (2.2.4) denklem sistemi, $n=0,1,2,\dots$ ve

$t \in [n, n+1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= r_1 (p_1 - \alpha_1 S(t) - \beta_1 I_1([n]) - \beta_2 I_2([n])) \\
\frac{dI_1}{dt} &= r_2 (1 - \alpha_2 I_1(t) + \beta_1 (1 - \varepsilon_1) S([n]) - \gamma I_2([n]) - \theta I_1([n]) + \beta_2 (1 - \varepsilon_2) S([n]) I_2([n])) \\
\frac{dI_2}{dt} &= r_3 (1 - \alpha_3 I_2(t) + \beta_2 \varepsilon_2 S([n]) + \gamma I_1([n]) + \theta I_1([n]) + \beta_1 \varepsilon_1 S([n]) I_1([n]))
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ise

$$\begin{cases}
S(t) = S(n) e^{\int_n^t (r_1 (p_1 - \alpha_1 S(m) - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n))) dm} \\
I_1(t) = I_1(n) e^{\int_n^t (r_2 (1 - \alpha_2 I_1(m) + \beta_1 (1 - \varepsilon_1) S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2 (1 - \varepsilon_2) S(n) I_2(n))) dm} \\
I_2(t) = I_2(n) e^{\int_n^t (r_3 (1 - \alpha_3 I_2(m) + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n) I_1(n))) dm}
\end{cases} \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Bu durumda, eğer $S(0) > 0$, $I_1(0) > 0$, $I_2(0) > 0$, ise (2.2.4) diferansiyel denklem sisteminin çözümü olan (2.2.6)'da pozitif olacaktır.

Ayrıca, (2.2.4) diferansiyel denklem sistemi $n \leq t < n+1$ olmak üzere

$$\begin{cases}
S(t) = \frac{S(n)U_1}{(U_1 - \alpha_1 S(n))e^{-r_1 U_1} + \alpha_1 S(n)} \\
I_1(t) = \frac{I_1(n)U_2}{(U_2 - \alpha_2 I_1(n))e^{-r_2 U_2} + \alpha_2 I_1(n)} \\
I_2(t) = \frac{I_2(n)U_3}{(U_3 - \alpha_3 I_2(n))e^{-r_3 U_3} + \alpha_3 I_2(n)}
\end{cases} \tag{2.2.7}$$

elde edilir. Buradan, $t \rightarrow n+1$ için

$$\begin{cases} S(n+1) = \frac{S(n)U_1}{(U_1 - \alpha_1 S(n))e^{-\tau_1 U_1} + \alpha_1 S(n)} \\ I_1(n+1) = \frac{I_1(n)U_2}{(U_2 - \alpha_2 I_1(n))e^{-\tau_2 U_2} + \alpha_2 I_1(n)} \\ I_2(n+1) = \frac{I_2(n)U_3}{(U_3 - \alpha_3 I_2(n))e^{-\tau_3 U_3} + \alpha_3 I_2(n)} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

fark denklem sistemi bulunur. Burada,

$$U_1 = p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n),$$

$$U_2 = 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n)$$

$$U_3 = 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n)$$

olsun. (2.2.8) sisteminin tanımlı olması için

$$\begin{cases} p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) \neq 0 \\ 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) \neq 0 \\ 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

(2.2.9) koşulunun sağlanması gerekir. (2.2.7) sistemi belirli bir alt aralık için (2.2.4) denklem sisteminin çözümüdür. Bu sebeple (2.2.4) sisteminin çözümlerinin global davranışını incelemek için (2.2.8) fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışı incelenmelidir. Bu durumda (2.2.8) için elde edilen sonuçlar aynı zamanda (2.2.4) diferansiyel denklem sisteminin çözümleri için geçerli olacaktır. (2.2.8) fark denklem sisteminin kararlılık analizini yapmak için öncelikle bu sistemin denge noktalarını bulmak gerekir. bu sistemin denge noktaları aynı zamanda (2.2.4) denklem sisteminin kritik noktalarıdır.

Buna göre,

$$\begin{cases} \beta_1 I_1(n) + \beta_2 I_2(n) + \alpha_1 S(n) = p_1 \\ I_1(n)(\alpha_2 + \theta) + \gamma I_2(n) - \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) = 1 \\ \alpha_3 I_2 - \beta_2 \varepsilon_2 S(n) - (\gamma + \theta)I_1(n) - \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) = 1 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

denklem sisteminin ikinci ve üçüncü denklemlerinden

$$\begin{aligned} I_1(n)(\alpha_2 + \theta) + \gamma I_2(n) - \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) \\ = \alpha_3 I_2 - \beta_2 \varepsilon_2 S(n) - (\gamma + \theta)I_1(n) - \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

yazılabilir.

Eşitsizlik düzenlenirse

$$(\alpha_2 + 2\theta + \gamma)I_1 + (\gamma - \alpha_3)I_2 + (\beta_2 \varepsilon_2 - (1 - \varepsilon_1)\beta_1)S + (\beta_1 \varepsilon_1 I_1 - \beta_2(1 - \varepsilon_2)I_2)S = 0 \quad (2.2.12)$$

elde edilir. (2.2.10) sisteminin birinci denklemi

$$I_2 = \frac{p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1}{\beta_2} \quad (2.2.13)$$

şeklinde yazılsın. Bu eşitliğin (2.2.12)'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} ((\beta_2(\alpha_2 + 2\theta + \gamma) - \beta_1(\gamma - \alpha_3))I_1 + p_1(\gamma - \alpha_3)) \\ + (\beta_2(\beta_2 \varepsilon_2 - \beta_1 + \beta_1 \varepsilon_1) - \alpha_1(\gamma - \alpha_3) + \beta_2 \beta_1 \varepsilon_1 I_1 - \beta_2(1 - \varepsilon_2)(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1))S = 0 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

elde edilir.

Oluşturulan bağıntıların [18]'deki demografik verilerle tutarlı olması için aşağıdaki şartların

i) $\beta_1 = 3\beta_2$

ii) $\beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1(\alpha_3 - \gamma)}{3 - 4\varepsilon_1}}$

iii) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

iv) $\varepsilon_1 \neq (1 - \varepsilon_2)$

ve ilave olarak denge noktasının pozitif olma koşullarının

v) $(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3) > 3(\alpha_3 - \gamma)$

vi) $\alpha_3 > \gamma$

vii) $\alpha_3 > \gamma$

viii) $\theta > \gamma$

sağlanması gerekir.

Bu durumda $\alpha_3 > \gamma$ olmak üzere (2.2.14)'den

$$I_1 = \frac{p_1(\alpha_3 - \gamma)}{\beta_2(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)} \quad (2.2.15)$$

elde edilir.

Yine $\theta > \gamma$ için

$$P_1 > \frac{(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)(\alpha_1(\alpha_3 - \gamma) - \beta_2^2(3 - 4\varepsilon_1))}{\beta_2((1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3) - 3(\alpha_3 - \gamma))} \quad (2.2.16)$$

olmak üzere (2.2.14)'den

$$S = \frac{\beta_2(3 - 4\varepsilon_1)}{\alpha_1(1 - \varepsilon_1)} + \frac{p_1}{\alpha_1} - \left(\frac{3P_1(\alpha_3 - \gamma)}{\alpha_1(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)} + \frac{\alpha_3 - \gamma}{\beta_2(1 - \varepsilon_1)} \right) \quad (2.2.17)$$

bulunur. (2.2.15)-(2.2.17) şartları için (2.2.14) eşitliği sağlanır. (2.2.15) ve (2.2.17) eşitlikleri (2.2.13)'de yerine yazılırsa

$$I_2 = \frac{\alpha_1(\alpha_3 - \gamma) - (3 - 4\varepsilon_1)\beta_2^2}{\beta_2^2(1 - \varepsilon_1)} + \frac{3P_1(\alpha_3 - \gamma)\varepsilon_1}{\beta_2(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)} \quad (2.2.18)$$

elde edilir. Böylece (2.2.8) denklem sisteminin pozitif denge noktası,

$$\bar{S} = \frac{\beta_2(3 - 4\varepsilon_1)}{\alpha_1(1 - \varepsilon_1)} + \frac{p_1}{\alpha_1} - \left(\frac{3P_1(\alpha_3 - \gamma)}{\alpha_1(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)} + \frac{\alpha_3 - \gamma}{\beta_2(1 - \varepsilon_1)} \right)$$

$$\bar{I}_1 = \frac{p_1(\alpha_3 - \gamma)}{\beta_2(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\alpha_1(\alpha_3 - \gamma) - (3 - 4\varepsilon_1)\beta_2^2}{\beta_2^2(1 - \varepsilon_1)} + \frac{3p_1(\alpha_3 - \gamma)\varepsilon_1}{\beta_2(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)}$$

olmak üzere $\bar{X} = (\bar{S}, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$ 'dir.

Elde edilen pozitif denge noktası civarında (2.2.8) sisteminin lineerleştirilmesi için

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.19)$$

determinantı göz önüne alınacaktır. Burada

$$a_{12} = \frac{3\beta_2 \{e^{-\tau_1 U_1} - 1\}}{\alpha_1}, \quad a_{21} = \frac{\{3\beta_2(1 - \varepsilon_1) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)I_2\} \{1 - e^{-\tau_2 U_2}\}}{\alpha_2}, \quad a_{22} = \frac{(\theta + \alpha_2)e^{-\tau_2 U_2} - \theta}{\alpha_2}, \quad a_{11} =$$

$$e^{-\tau_1 U_1}, \quad a_{33} = e^{-\tau_3 U_3}, \quad a_{13} = \frac{\beta_2 \{e^{-\tau_1 U_1} - 1\}}{\alpha_1}, \quad a_{32} = \frac{(\gamma + \theta + 3\beta_2 \varepsilon_1 S)(1 - e^{-\tau_3 U_3})}{\alpha_3},$$

$$a_{23} = \frac{(-\gamma + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S)(1 - e^{-\tau_2 U_2})}{\alpha_2}, \quad a_{31} = \frac{(\beta_2 \varepsilon_2 + 3\beta_2(1 - \varepsilon_2)I_1)(1 - e^{-\tau_3 U_3})}{\alpha_3}.$$

şeklindedir. (2.2.19)'dan, (2.2.8) sisteminin karakteristik denklemi

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{31}a_{13} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})\lambda \\ & - (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.1 (2.2.8) fark denklem sisteminin pozitif denge noktası $\bar{X} = (\bar{S}, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$ olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)(\alpha_1(\alpha_3 - \gamma) - \beta_2^2(3 - 4\varepsilon_1))}{\beta_2((1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3) - 3(\alpha_3 - \gamma))} < p_1 \\ & < \frac{(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3)(\alpha_1(1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 - \gamma) + 3\alpha_1\varepsilon_1(\alpha_3 + \gamma) - 3\varepsilon_1\beta_2^2(3 - 4\varepsilon_1))}{3\beta_2\varepsilon_1((1 - \varepsilon_1)(\alpha_2 + 2\theta - 2\gamma + 3\alpha_3) - 3(\alpha_3 - \gamma))} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

ve

$$\beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_3 \theta}{3(1-\varepsilon_1)(\alpha_2 I_1 - \alpha_3 I_2)}} \quad (2.2.22)$$

koşulları sağlansın. Üstelik,

$$K = \frac{\alpha_2 \beta_2^2 (\varepsilon_2 + 3(1-\varepsilon_2)I_1) + \alpha_1 \alpha_3 \theta}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \alpha_2 (\varepsilon_2 + 3(1-\varepsilon_2)I_1) + 3\beta_2^2 \alpha_3 (3(1-\varepsilon_1) + (1-\varepsilon_2)I_2) - \alpha_1 (\gamma + \theta + 3\beta_2 \varepsilon_1 S)(-\gamma + \beta_2 (1-\varepsilon_2)S)} \quad (2.2.23)$$

olsun. Eğer

$$\overline{U_1} > \frac{1}{r_1} \ln(K), \quad (2.2.24)$$

$$\frac{1}{r_2} \ln\left(\frac{3(-\gamma + \beta_2 \varepsilon_1 S) + \alpha_2}{3(-\gamma + \beta_2 \varepsilon_1 S) + \theta}\right) < \overline{U_2} < \frac{1}{r_2} \ln\left(\frac{\theta + \alpha_2}{\theta}\right) \quad (2.2.25)$$

$$\overline{U_3} > \frac{1}{r_3} \ln\left(\frac{\gamma + \theta + 3\beta_2 \varepsilon_1 S + 3\alpha_3}{\gamma + \theta + 3\beta_2 \varepsilon_1 S}\right) \quad (2.2.26)$$

sağlanırsa, bu taktirde (2.2.8) sisteminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

İspat: Teoremin ispatı için Schur-Cohn kriterinden faydalanılmaktadır.

Teorem 4.2.2. $\{S(n), I_1(n), I_2(n)\}_{n=0}^{\infty}$ (2.2.8) sisteminin bir pozitif çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer

$$\begin{cases} P_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) - \alpha_1 S(n) > 0 \\ 1 - I_1(n)(\alpha_2 + \theta) - \gamma I_2(n) + \beta_1(1-\varepsilon_1)S(n) + \beta_2(1-\varepsilon_2)S(n)I_2(n) > 0 \\ 1 - \alpha_3 I_2 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + (\gamma + \theta)I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) > 0 \end{cases} \quad (2.2.27)$$

ise, bu taktirde (2.2.8) sisteminin çözümleri monoton artandır.

ii) Eğer

$$\begin{cases} P_1 > P_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) > \alpha_1 S(n) \\ 1 > 1 + \beta_1 (1 - \varepsilon_1) S(n) - \theta I_1(n) - \gamma I_2(n) + \beta_2 (1 - \varepsilon_2) S(n) I_2(n) > \alpha_2 I_1(n) \\ 1 > 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + (\gamma + \theta) I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n) I_1(n) > \alpha_3 I_2(n) \end{cases} \quad (2.2.28)$$

sağlanırsa, bu taktirde

$$0 < S(n) < \frac{P_1}{\alpha_1}, \quad 0 < I_1(n) < \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{ve} \quad 0 < I_2(n) < \frac{1}{\alpha_3} \quad (2.2.29)$$

mevcuttur.

Teorem 2.2.3 f, g ve h fonksiyonları $S(t), I_1(t), I_2(t)$ fonksiyonlarına göre bir $(I \subset \mathbb{R}^+)$

sürekli ve türevlenebilir olsun. $f, g, h, k : V \subset (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow I \subset \mathbb{R}^+$ olmak üzere (2.2.8) sistemi

$$F(S(t), I_1(t), I_2(t)) = \begin{cases} S(t+1) = f(S(t), I_1(t), I_2(t)) \\ I_1(t+1) = g(S(t), I_1(t), I_2(t)) \\ I_2(t+1) = h(S(t), I_1(t), I_2(t)) \end{cases} \quad (2.2.30)$$

şeklinde alınsın. $\alpha_1 > 3\beta_2, \alpha_2 > \theta$ olacak şekilde, eğer

$$P_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2 < \frac{2\alpha_1}{3\beta_2 r_1} \quad (2.2.31)$$

ve

$$1 + \beta_1 (1 - \varepsilon_1) S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2 (1 - \varepsilon_2) S(n) I_2(n) < \frac{2\alpha_2}{r_2 \theta} \quad (2.2.32)$$

eşitsizlikleri mevcut ise bu taktirde (2.2.30) sistemi I aralığında bir 2'li devire sahip değildir.

$\bar{X} = (\bar{S}, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$ denge noktasının global kararlılığı için Teorem 2.2.3'teki hipotezlere ilave olarak aşağıdaki koşullar mevcut olmalıdır.

i. $f: A \times B \times C \rightarrow A$

ii. $g: A \times B \times C \rightarrow B$

iii. $h: A \times B \times C \rightarrow C$

olmak üzere f, g, h sürekli fonksiyonlar olsun. Burada $A = \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right)$, $B = \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right)$, $C = \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right)$ dır.

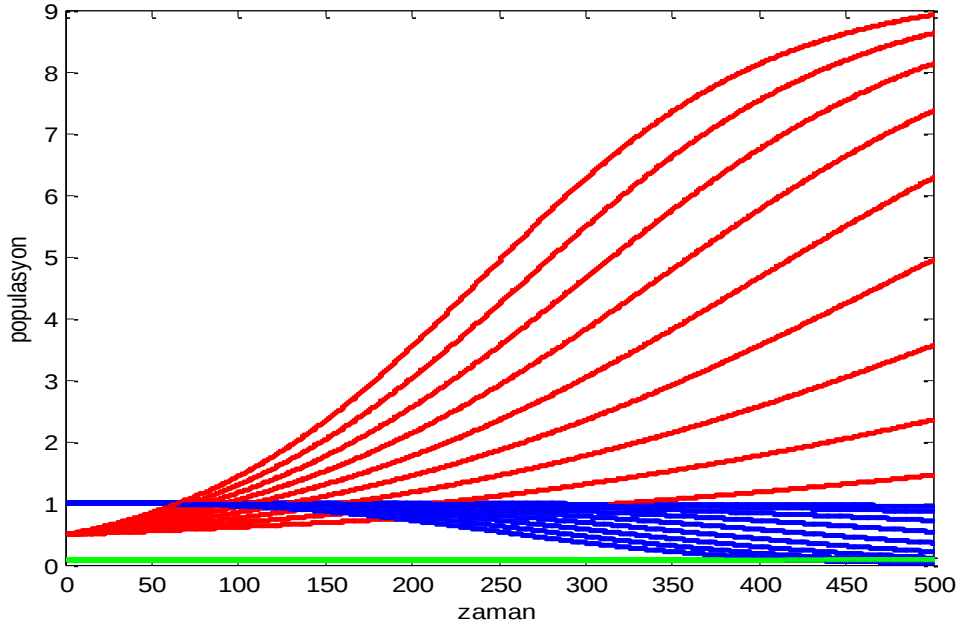
Sonuç 2.2.1 Eğer Teorem 2.2.1-Teorem 2.2.3'deki koşullar sağlanıyor ise, (2.2.8) sisteminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Örnek 2.2.1: Başlangıç koşulları $S(0)=10000$ $I_1(0)=5000$ $I_2(0)=1000$ ve Hindistan'daki yıllık parametre değerleri Tablo 2.2.1'de verilmiş olsun.

Parametreler	Değerler
p_1	2000
γ	0.00001
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$	0.01
α_1	0.0748
α_2	0.0919
α_3	0.092
β_1	0.171
β_2	0.057
θ	0.015
r_1	$r_1 \in [0.001, 0.01]$
r_2	$r_1 = r_2$
r_3	$r_3 = 0.001r_1$

Tablo 2.2.1

Bu durumda Şekil 2.2.1, HIV epidemisinin zamana göre yayılımını veren grafiği göstermektedir.



Şekil 2.2.1 Hassas bireylerin (S =mavi), Hasta bireylerin (I_2 = yeşil), Hasta fakat bunu bilmeyen bireylerin (I_1 = kırmızı) zamana göre değişimini veren grafik

NOT: Bu çalışma 12. Matematik Sempozyumun'da ve 2. Uluslar arası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı'nda sunulmuş, yayın gönderme aşamasındadır.

2.3. HIV/AIDS EPİDEMİSİ VE PARÇALI SABİT ARGÜMANLI MODELİ

Bu kısımda Naresh'in çalışması [5] gözden geçirilerek parçalı sabit argümanlı bir diferansiyel denklem sistemi tasarlanmıştır. Buna göre model, aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S(t)r_1(p_1 - \alpha_1 S(t) - \beta_1 I_1(\llbracket t \rrbracket) - \beta_2 I_2(\llbracket t \rrbracket)) \\ \frac{dI_1}{dt} = I_1(t)r_2(1 - \alpha_2 I_1(t) + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(\llbracket t \rrbracket) - \gamma I_2(\llbracket t \rrbracket) - \theta I_1(\llbracket t \rrbracket) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(\llbracket t \rrbracket)I_2(\llbracket t \rrbracket) - \delta_1 I_1(\llbracket t \rrbracket)) \\ \frac{dI_2}{dt} = I_2(t)r_3(1 - \alpha_3 I_2(t) + \beta_2 \varepsilon_2 S(\llbracket t \rrbracket) + \gamma I_1(\llbracket t \rrbracket) + \theta I_1(\llbracket t \rrbracket) + \beta_1 \varepsilon_1 S(\llbracket t \rrbracket)I_1(\llbracket t \rrbracket) - \delta_2 I_2(\llbracket t \rrbracket)) \\ \frac{dA}{dt} = A(t)(1 - \alpha_4 A(t) - \mu A(\llbracket t \rrbracket) + \delta_1 I_1(\llbracket t \rrbracket) + \delta_2 I_2(\llbracket t \rrbracket)) \end{cases} \quad (2)$$

.3.1)

Burada $S(t)$ hassas popülasyon sınıfını, $I_1(t)$, HIV enfeksiyonuna sahip fakat bunu bilmeyenlerin sınıfını, $I_2(t)$, HIV enfeksiyonuna sahip ve bunu bilenlerin popülasyon sınıfını ve $A(t)$ de AIDS

hasta sayılarını temsil etmektedir. A_1 , doğal sebeplerden kaynaklanan ölüm oranına karşılık gelmektedir. p_1 ise yıllık hassas birey popülasyon oranıdır. I_1 ve I_2 sınıflarından β_1 ve β_2 oranında yıllık enfeksiyon oranı ile hassas birey popülasyonunun sınıfında azlama meydana gelecektir. r_1 , r_2 ve r_3 sırasıyla S, I_1 ve I_2 sınıflarının popülasyon büyüme oranlarını ifade etmektedir. I_1 sınıfında doğal sebeplerden dolayı ölüm oranı α_2 iken I_2 sınıfı için bu oran α_3 'e karşılık gelmektedir. A sınıfındaki doğal ölüm oranı ise α_4 olarak ifade edilir. Klinik müdahalelerin olumsuz gelişim süreci ile I_1 ve I_2 sınıfından δ_1 ve δ_2 oranında AIDS sınıfına geçiş meydana gelir. I_1 sınıfındaki bireyin hasta olduğunun farkına varması ile I_2 sınıfına geçiş oranı θ dır. I_1 ve I_2 birbirlerine hastalığı buşatırma ihtimali γ şeklinde ifade edilirken S sınıfındaki bireye I_1 sınıfından bireyin hastalığı bulaştırması ve bunun farkına varılması oranı ε_1 olarak belirlenmiştir. Benzer şekilde, S sınıfındaki bireye I_2 sınıfından bireyin hastalığı bulaştırması oranı ε_2 dir. AIDS hastalığından kaynaklanan ölüm oranı da μ olarak belirlenmiştir. (2.3.1) sistemi $t \in [n, n + 1)$ aralığındaki Bernoulli diferansiyel denklem sistemine karşılık gelmektedir öyle ki

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} - r_1(p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n))S(t) = -\alpha_1 r_1 S(t)^2 \\ \frac{dI_1}{dt} - r_2(1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n))I_1(t) = -r_2 \alpha_2 I_1(t)^2 \\ \frac{dI_2}{dt} - r_3(1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) - \delta_2 I_2(n))I_2(t) = -\alpha_3 r_3 I_2(t)^2 \\ \frac{dA}{dt} - (1 - \mu A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n))A(t) = -\alpha_4 A(t)^2 \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

dir. (2.3.2) denklem sisteminin $t \in [n, n + 1)$ aralığındaki çözümü

$$\left\{ \begin{array}{l} S(n+1) = \frac{S(n)U_1}{(U_1 - \alpha_1 S(n)) \cdot \exp(-r_1 U_1) + \alpha_1 S(n)} \\ I_1(n+1) = \frac{I_1(n)U_2}{(U_2 - \alpha_2 I_1(n)) \cdot \exp(-r_2 U_2) + \alpha_2 I_1(n)} \\ I_2(n+1) = \frac{I_2(n)(U_3)}{(U_3 - \alpha_3 I_2(n)) \cdot \exp(-r_3 U_3) + \alpha_3 I_2(n)} \\ A(n+1) = \frac{A(n)(U_4)}{(U_4 - \alpha_4 A(n)) \cdot \exp(-U_4) + \alpha_4 A(n)} \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

olarak elde edilir. Burada

$$U_1 = p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n),$$

$$U_2 = 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n)$$

$$U_3 = 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) - \delta_2 I_2(n)$$

ve

$$U_4 = 1 - \mu A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n)$$

dır. Burada, (2.3.3) denklem sistemi için

$$\begin{cases} p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) \neq 0 \\ 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n) \neq 0 \\ 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) - \delta_2 I_2(n) \neq 0 \\ 1 - \mu A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n) \neq 0 \end{cases} \quad (2.3.4)$$

olduğu kabul edilecektir.

(2.3.1) denklem sisteminin çözümü için ancak $t \in [n, n+1)$ aralığında bir yorumda bulunabildik. Bu denklem sisteminin çözümlerinin global davranışı hakkında yorum yapabilmek için (2.3.3) denklem sistemi incelenilecektir. Çünkü bu denklem sistemi birinci mertebeden bir fark denklem sistemine karşılık gelmektedir. Bunun için öncelikle (2.3.3) denklem sisteminin denge noktası bulunmalıdır. Bu ise aynı zamanda (2.3.1) denklem sisteminin kritik noktasına karşılık gelmektedir.

Denge noktasının tanımından aşağıdaki denklem sistemi incelenilecektir:

$$\begin{cases} \beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \alpha_1 S = p_1 \\ (\delta_1 + \alpha_2 + \theta)I_1 + \gamma I_2 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2 = 1 \\ (\delta_2 + \alpha_3)I_2 - \beta_2 \varepsilon_2 S - (\gamma + \theta)I_1 - \beta_1 \varepsilon_1 SI_1 = 1 \\ (\mu + \alpha_4)A - \delta_1 I_1 - \delta_2 I_2 = 1. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

(2.3.5)'den

$$\begin{aligned} & (\delta_1 + \alpha_2 + \theta)I_1 + \gamma I_2 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2 \\ & = (\delta_2 + \alpha_3)I_2 - \beta_2 \varepsilon_2 S - (\gamma + \theta)I_1 - \beta_1 \varepsilon_1 SI_1 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

yazılabilir. Bu denklemin sadeleştirilmesi ile

$$(\delta_1 + \alpha_2 + 2\theta + \gamma)I_1 + (\gamma - \delta_2 - \alpha_3)I_2 + (\beta_2 \varepsilon_2 - \beta_1 + \beta_1 \varepsilon_1)S$$

$$+(\beta_1 \varepsilon_1 I_1 - \beta_2(1 - \varepsilon_2)I_2)S = 0 \quad (2.3.7)$$

bulunur. (2.3.7)'ye

$$I_2 = \frac{p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1}{\beta_2}, \quad (2.3.8)$$

ifadesinin yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & \beta_2(\delta_1 + \alpha_2 + 2\theta + \gamma)I_1 + (\gamma - \delta_2 - \alpha_3)(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1) + \beta_2(\beta_2 \varepsilon_2 - \beta_1 + \beta_1 \varepsilon_1)S \\ & + (\beta_2 \beta_1 \varepsilon_1 I_1 - \beta_2(1 - \varepsilon_2)(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1))S = 0 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerin yapılması ve $\beta_1 = 3\beta_2$, $\delta_1 = 2\delta_2$, $\beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{2(1-\varepsilon_1)}}$, $5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma > 6$, $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 1$, $\delta_2 + \alpha_3 > \gamma$ kabulleri ile

$$I_1 = \frac{p_1(\delta_2 + \alpha_3 - \gamma)}{\beta_2(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)}, \quad (2.3.10)$$

ve

$$S = \frac{2\beta_2(1-\varepsilon_1) + \varepsilon_1 p_1}{\alpha_1 \varepsilon_1} - (\delta_2 + \alpha_3 - \gamma) \left(\frac{1}{\beta_2 \varepsilon_1} + \frac{6p_1}{\alpha_1(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)} \right), \quad (2.3.11)$$

bulunur. Burada

$$p_1 > \frac{(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)(\alpha_1 - 2\beta_2^2(1-\varepsilon_1))}{\beta_2 \varepsilon_1((5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma) - 6)}, \quad (2.3.12)$$

dır. (2.3.10) ve (2.3.11)'in (2.3.8)'de yerine yazılmasıyla $2 + \gamma > \delta_2 + \alpha_3$ olmak üzere

$$I_2 = \frac{\alpha_1 - 2\beta_2^2(1-\varepsilon_1)}{\beta_2^2 \varepsilon_1} + \frac{3p_1(2 - (\delta_2 + \alpha_3 - \gamma))}{\beta_2(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)} \quad (2.3.13)$$

elde edilir.

Son olarak, (2.3.5)'ten

$$A = \frac{1}{(\mu + \alpha_4)} + \frac{\delta_2 p_1 (6 - (\delta_2 + \alpha_3 - \gamma))}{\beta_2 (5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)(\mu + \alpha_4)} + \frac{\delta_2 (\alpha_1 - 2\beta_2^2 (1 - \varepsilon_1))}{\beta_2^2 \varepsilon_1 (\mu + \alpha_4)}. \quad (2.3.14)$$

dir. Sistem (2.3.3)'ün $\bar{x} = (S, I_1, I_2, A)$ denge noktası civarında lineerleştirmesi ile

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{31}a_{13} - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})\lambda \\ &- (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

elde edilir öyle ki

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3.16)$$

ve

$$\lambda_1 = \frac{(\mu + \alpha_4) \exp(-\bar{U}_4) - \mu}{\alpha_4} \quad (2.3.17)$$

dir.

Aşağıdaki teoremlerin ispat sürecinde

$\delta_1 = 2\delta_2, \beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{2(1-\varepsilon_1)}}$, $5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma > 6$, $2 + \gamma > \delta_2 + \alpha_3 > \gamma, \beta_1 = 3\beta_2$ ve $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 1$ koşullarının mevcut olduğu kabul edilmiştir.

Teorem 2.3.1. $\bar{x}$, (2.3.3) denklem sisteminin denge noktası olsun. Ayrıca,

$$\frac{3\alpha_3(2 - (\delta_2 + \alpha_3 - \gamma))}{\delta_2 + \alpha_3 - \gamma} > 3\alpha_3 > \alpha_2, 2\delta_2 + \alpha_2 > \gamma \text{ ve } \beta_2 > \sqrt{\frac{\alpha_1(\delta_2(2\alpha_3 - \alpha_2) + \theta\alpha_3)}{3\varepsilon_1(\alpha_3 I_2 - \alpha_2 I_1)}} \text{ koşulları için}$$

$$\frac{(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)(\alpha_1 - 2\beta_2^2(1 - \varepsilon_1))}{\beta_2 \varepsilon_1 ((5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma) - 6)} < p_1 < \frac{\{(3 + 2\delta_2 + \alpha_2 - \gamma)\alpha_1 - 6\beta_2^2(1 - \varepsilon_1)\}(5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma)}{3\beta_2 \varepsilon_1 ((5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma) - 6)} \quad (2.3.18)$$

olduğu kabul edilsin.

$$K = \frac{3\alpha_3\beta_2(3\beta_2(1-\varepsilon_1)+\beta_2\varepsilon_1I_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_2(1-\varepsilon_1)+3\beta_2\varepsilon_1I_1)+(\theta+2\delta_2)\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\delta_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1(\theta+2\delta_2)\delta_2+3\alpha_3\beta_2(3\beta_2(1-\varepsilon_1)+\beta_2\varepsilon_1I_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_2\varepsilon_2+3\beta_2\varepsilon_1I_1)-\alpha_1(\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1S)(-\gamma+\beta_2\varepsilon_1S)}$$

olmak üzere eğer

$$\frac{1}{r_2} \ln \left(\frac{\theta+2\delta_2+\alpha_2-3\gamma+3\beta_2\varepsilon_1S}{\theta+2\delta_2-3\gamma+3\beta_2\varepsilon_1S} \right) < \overline{U}_2 < \frac{1}{r_2} \ln \left(\frac{\theta+2\delta_2+\alpha_2}{\theta+2\delta_2} \right), \quad (2.3.19)$$

$$\frac{1}{r_3} \ln \left(\frac{3\delta_2+3\alpha_3+\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1S}{3\delta_2+\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1S} \right) < \overline{U}_3 < \frac{1}{r_3} \ln \left(\frac{\delta_2+\alpha_3}{\delta_2} \right), \quad (2.3.20)$$

ve

$$\overline{U}_1 > \frac{1}{r_1} \ln(K) \quad (2.3.21)$$

ise, bu taktirde $-\gamma + \beta_2\varepsilon_1S > 0$ kabulü altında (2.3.3) denklem sisteminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.3.2. (2.3.3) denklem sisteminin bir pozitif çözümü $\{S(n), I_1(n), I_2(n), A(n)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) Eğer

$$\begin{cases} p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) - \alpha_1 S(n) > 0 \\ 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - (\theta + \alpha_2)I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n) > 0 \\ 1 + \beta_2\varepsilon_2S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1\varepsilon_1S(n)I_1(n) - (\delta_2 + \alpha_3)I_2(n) > 0 \\ 1 - (\mu + \alpha_4)A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n) > 0, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

ise, bu taktirde (2.3.3) denklem sisteminin bütün çözümleri monoton artandır.

ii) Eğer

$$\begin{cases} p_1 > p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n) > \alpha_1 S(n) \\ 1 > 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n) > \alpha_2 I_1(n) \\ 1 > 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) - \delta_2 I_2(n) > \alpha_3 I_2(n) \\ 1 > 1 - \mu A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n) > \alpha_4 A(n), \end{cases} \quad (2.3.23)$$

ise, bu durumda (2.3.3) denklem sisteminin çözümleri bir üst sınıra sahiptir öyle ki

$$S(n) < \frac{p_1}{\alpha_1}, \quad I_1(n) < \frac{1}{\alpha_2}, \quad I_2(n) < \frac{1}{\alpha_3} \text{ ve } A(n) < \frac{1}{\alpha_4}$$

dır.

Theorem 2.3.3. (2.3.3) denklem sistemi

$$F(S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)) = \begin{cases} S(t+1) = f(S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)) \\ I_1(t+1) = g(S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)) \\ I_2(t+1) = h(S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)) \\ A(t+1) = k(S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)), \end{cases} \quad (2.3.24)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Ayrıca , f, g, h ve k fonksiyonların $S(t), I_1(t), I_2(t), A(t)$ fonksiyonlarına göre birinci mertebeden kısmi türevleri mevcut olacak şekilde $I \subset R^+$ ve $f, g, h, k: V \subset (\mathbb{R}^+)^4 \rightarrow I \subset R^+$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda,

$\alpha_1 > 3\beta_2, \alpha_2 > 2\delta_2 + \theta, \alpha_3 > \delta_2$ ve $\alpha_4 > \mu$ kabulleri için, eğer

$$p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2 < \frac{2\alpha_1}{3\beta_2 r_1}, \quad (2.3.25)$$

$$1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \gamma I_2 - \theta I_1 + \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2 - \delta_1 I_1 < \frac{2\alpha_2}{r_2(2\delta_2 + \theta)}, \quad (2.3.26)$$

$$1 + \beta_2 \varepsilon_2 S + \gamma I_1 + \theta I_1 + \beta_1 \varepsilon_1 SI_1 - \delta_2 I_2 < \frac{2\alpha_3}{r_3 \delta_2} \quad (2.3.27)$$

ve

$$1 - \mu A + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 < \frac{2\alpha_4}{\mu}, \quad (2.3.28)$$

eşitsizlikleri mevcut ise (2.3.24) sisteminin I' 'da ikili devri yoktur.

$\bar{x} = (S, I_1, I_2, A)$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu ispatlamak için

$$\mathbf{a)} \ f: \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_4}\right) \rightarrow \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right)$$

$$\mathbf{b)} \ g: \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_4}\right) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

$$\mathbf{c)} \ h: \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_4}\right) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right)$$

$$\mathbf{d)} \ k: \left[0, \frac{p_1}{\alpha_1}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_2}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_3}\right) \times \left[0, \frac{1}{\alpha_4}\right) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\alpha_4}\right)$$

olmak üzere f, g, h ve k fonksiyonların belirtilen dönüşümler için sürekli olduğu kabul edilmelidir.

Sonuç 2.3.1. $\bar{x}$, (2.3.3) denklem sisteminin pozitif denge noktası olsun. Üstelik Teorem 2.3.1- Teorem 2.3.3'deki kabullerin mevcut olduğu Kabul edilsin. Bu durumda, (2.3.3) denklem sisteminin pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Bu kısımda ayrıca popülasyonun düşük yoğunlukta olması halindeki HIV/AIDS hastalığının yayılımı incelenilecektir. Fakat bu tür epidemik durumlarda (2.3.1) modeli revize edilmelidir.

Bu kısımdaki bundan sonraki çalışmalar, düşük yoğunluktaki enfeksiyon durumları için geçerli olacaktır.

(2.3.1) denklem sistemi

$$\begin{cases} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = r_1(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2) \\ \frac{1}{I_1} \frac{dI_1}{dt} = r_2(1 - (\alpha_2 + \delta_1 + \theta)I_1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \gamma I_2 + \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2) \\ \frac{1}{I_2} \frac{dI_2}{dt} = r_3(1 - (\alpha_3 + \delta_2)I_2 + \beta_2 \varepsilon_2 S + (\gamma + \theta)I_1 + \beta_1 \varepsilon_1 SI_1) \\ \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 1 - (\alpha_4 + \mu)A + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 \end{cases} \quad (2.3.29)$$

şeklinde yazılmış olsun. E_1, E_2, E_3 ve E_4 'ler Allee sabitleri olmak üzere

$$a(S) = \frac{S}{E_1 + S}, \quad a(I_1) = \frac{I_1}{E_2 + I_1}, \quad a(I_2) = \frac{I_2}{E_3 + I_2} \quad \text{and} \quad a(A) = \frac{A}{E_4 + A} \quad (2.3.30)$$

Allee fonksiyonları (2.3.1) denklem sistemine uygulansın. Bu durumda

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = a(S)r_1(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2) \\ \frac{1}{I_1} \frac{dI_1}{dt} = a(I_1)r_2(1 - (\alpha_2 + \delta_1 + \theta)I_1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \gamma I_2 + \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2) \\ \frac{1}{I_2} \frac{dI_2}{dt} = a(I_2)r_3(1 - (\alpha_3 + \delta_2)I_2 + \beta_2\varepsilon_2 S + (\gamma + \theta)I_1 + \beta_1\varepsilon_1 SI_1) \\ \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = a(A)(1 - (\alpha_4 + \mu)A + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2). \end{array} \right. \quad (2.3.31)$$

olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} F(S) = a(S)r_1(p_1 - \alpha_1 S - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2) \\ G(I_1) = a(I_1)r_2(1 - (\alpha_2 + \delta_1 + \theta)I_1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \gamma I_2 + \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2) \\ H(I_2) = a(I_2)r_3(1 - (\alpha_3 + \delta_2)I_2 + \beta_2\varepsilon_2 S + (\gamma + \theta)I_1 + \beta_1\varepsilon_1 SI_1) \\ K(A) = a(A)(1 - (\alpha_4 + \mu)A + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2) \end{array} \right. \quad (2.3.32)$$

denklem sisteminde S'ye göre F, I_1 'e göre G, I_2 'ye göre H ve A'ya göre K fonksiyonunun kısmı türevleri alınırsa

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(S) = \frac{-\alpha_1 r_1 S^2 - 2E_1 \alpha_1 r_1 S + E_4(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)E_1 r_1}{(E_1 + S)^2} \\ G'(I_1) = \frac{r_2(\alpha_2 + \delta_1 + \theta)I_1^2 + E_2 r_2(1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S - \gamma I_2 + \beta_2(1 - \varepsilon_2)SI_2)}{(E_2 + I_1)^2} \\ H'(I_2) = \frac{r_3(\alpha_3 + \delta_2)I_2^2 + r_3 E_3(1 + \beta_2 \varepsilon_2 S + (\gamma + \theta)I_1 + \beta_1 \varepsilon_1 SI_1)}{(E_3 + I_2)^2} \\ K'(A) = \frac{(\alpha_4 + \mu)A^2 + E_4(1 + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2)}{(E_4 + A)^2} \end{array} \right. \quad (2.3.33)$$

yazılabilir. Teorem 2.3.2/(i)'ye göre (2.3.33)'te G, H ve K fonksiyonlar artan iken, S fonksiyonu

$$S \in \left(0, -E_1 + \sqrt{E_1^2 + \frac{E_1(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)}{\alpha_1}}\right) \quad (2.3.34)$$

aralığında artan bir fonksiyon ve

$$S \in \left(-E_1 + \sqrt{E_1^2 + \frac{E_1(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)}{\alpha_1}}, \infty\right), \quad (2.3.25)$$

için ise azalan fonksiyondur. Bu durumda, eğer hassas birey popülasyonu

$$S < -E_1 + \sqrt{E_1^2 + \frac{E_1(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)}{\alpha_1}}$$

aralığında ise, Allee fonksiyonunun uygulandığı bir model realistik sonuçlar verirken, S'in

$$S > -E_1 + \sqrt{E_1^2 + \frac{E_1(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)}{\alpha_1}},$$

eşitsizliğini sağlaması anılan fonksiyonların önemini yitirebileceği anlamını taşır.

Buna göre, (2.3.34) durumuna göre analiz yapılacaktır. (2.3.1) denklem sistemine

$$a(S(\llbracket t \rrbracket)) = \frac{S(\llbracket t \rrbracket)}{E_1 + S(\llbracket t \rrbracket)}, \quad a(I_1(\llbracket t \rrbracket)) = \frac{I_1(\llbracket t \rrbracket)}{E_2 + I_1(\llbracket t \rrbracket)}, \quad a(I_2(\llbracket t \rrbracket)) = \frac{I_2(\llbracket t \rrbracket)}{E_3 + I_2(\llbracket t \rrbracket)} \quad (2.3.26)$$

ve

$$a(A(\llbracket t \rrbracket)) = \frac{A(\llbracket t \rrbracket)}{E_4 + A(\llbracket t \rrbracket)} \quad (2.3.27)$$

Allee fonksiyonları uygulansın. Burada E_1, E_2, E_3 ve E_4 'ler Allee sabitlerine karşılık gelmektedirler. $t \in [n, n+1)$ ve $t \rightarrow n+1$ olmak üzere $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{cases} S(n+1) = \frac{S(n)U_1}{(U_1 - \alpha_1 S(n)) \cdot \exp(-r_1 a(S(n))U_1) + \alpha_1 S(n)} \\ I_1(n+1) = \frac{I_1(n)U_2}{(U_2 - \alpha_2 I_1(n)) \cdot \exp(-r_2 a(I_1(n))U_2) + \alpha_2 I_1(n)} \\ I_2(n+1) = \frac{I_2(n)(U_3)}{(U_3 - \alpha_3 I_2(n)) \cdot \exp(-r_3 I_2(n)U_3) + \alpha_3 I_2(n)} \\ A(n+1) = \frac{A(n)(U_4)}{(U_4 - \alpha_4 A(n)) \cdot \exp(-A(n)U_4) + \alpha_4 A(n)} \end{cases} \quad (2.3.28)$$

olmak üzere

$$U_1 = p_1 - \beta_1 I_1(n) - \beta_2 I_2(n),$$

$$U_2 = 1 + \beta_1(1 - \varepsilon_1)S(n) - \gamma I_2(n) - \theta I_1(n) + \beta_2(1 - \varepsilon_2)S(n)I_2(n) - \delta_1 I_1(n)$$

$$U_3 = 1 + \beta_2 \varepsilon_2 S(n) + \gamma I_1(n) + \theta I_1(n) + \beta_1 \varepsilon_1 S(n)I_1(n) - \delta_2 I_2(n)$$

ve

$$U_4 = 1 - \mu A(n) + \delta_1 I_1(n) + \delta_2 I_2(n)$$

dir. Burada (2.3.3) denklem sisteminin denge noktası ile (2.3.28) denklem sisteminin denge noktası aynı olup aşağıdaki teoremler $\bar{x} = (S, I_1, I_2, A)$ denge noktasının yerel ve global kararlılık analizleri üzerine olacaktır.

Burada, $\beta_1 = 3\beta_2, \delta_1 = 2\delta_2, \beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{2(1-\varepsilon_1)}}, 5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma > 6, \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 1$ ve $2 + \gamma > \delta_2 + \alpha_3 > \gamma$ koşullarının mevcut olduğu kabul edilsin.

Teorem 2.3.4. $\bar{x}$, (2.3.28) denklem sisteminin pozitif denge noktası olsun. Ayrıca,

$$\frac{3\alpha_3(2-(\delta_2+\alpha_3-\gamma))}{\delta_2+\alpha_3-\gamma} > 3\alpha_3 > \alpha_2, \beta_2 > \sqrt{\frac{\alpha_1(\delta_2(2\alpha_3-\alpha_2)+\theta\alpha_3)}{3\varepsilon_1(\alpha_3 I_2 - \alpha_2 I_1)}} \text{ ve } 2\delta_2 + \alpha_2 > \gamma \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{(5\delta_2+\alpha_2+3\alpha_3+2\theta-2\gamma)(\alpha_1-2\beta_2^2(1-\varepsilon_1))}{\beta_2\varepsilon_1((5\delta_2+\alpha_2+3\alpha_3+2\theta-2\gamma)-6)} < p_1 < \frac{\{(3+2\delta_2+\alpha_2-\gamma)\alpha_1-6\beta_2^2(1-\varepsilon_1)\}(5\delta_2+\alpha_2+3\alpha_3+2\theta-2\gamma)}{3\beta_2\varepsilon_1((5\delta_2+\alpha_2+3\alpha_3+2\theta-2\gamma)-6)} \quad (2.3.29)$$

eşitsizliği mevcut olsun. Eğer

$$\frac{1}{r_2 a(\bar{I}_1)} \ln \left(\frac{\theta+2\delta_2+\alpha_2-3\gamma+3\beta_2\varepsilon_1 S}{\theta+2\delta_2-3\gamma+3\beta_2\varepsilon_1 S} \right) < \bar{U}_2 < \frac{1}{r_2 a(\bar{I}_1)} \ln \left(\frac{\theta+2\delta_2+\alpha_2}{\theta+2\delta_2} \right), \quad (2.3.30)$$

$$\frac{1}{r_3 a(\bar{I}_2)} \ln \left(\frac{3\delta_2+3\alpha_3+\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1 S}{3\delta_2+\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1 S} \right) < \bar{U}_3 < \frac{1}{r_3 a(\bar{I}_2)} \ln \left(\frac{\delta_2+\alpha_3}{\delta_2} \right), \quad (2.3.31)$$

$$\bar{U}_1 > \frac{1}{r_1} \ln(K), \quad (2.3.32)$$

ise, bu durumda $-\gamma + \beta_2\varepsilon_1 S > 0$ kabulü altında (2.3.28) denklem sisteminin pozitif denge noktası yerel asimptotik kararlıdır. Burada

$$K = \frac{3\alpha_3\beta_2(3\beta_2(1-\varepsilon_1)+\beta_2\varepsilon_1 I_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_2(1-\varepsilon_1)+3\beta_2\varepsilon_1 I_1)+(\theta+2\delta_2)\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\delta_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1(\theta+2\delta_2)\delta_2+3\alpha_3\beta_2(3\beta_2(1-\varepsilon_1)+\beta_2\varepsilon_1 I_2)+\alpha_2\beta_2(\beta_2\varepsilon_2+3\beta_2\varepsilon_1 I_1)-\alpha_1(\gamma+\theta+3\beta_2\varepsilon_1 S)(-\gamma+\beta_2\varepsilon_1 S)} \quad (2.3.33)$$

dir.

Sonuç 2.3.2. (2.3.28) denklem sisteminin pozitif denge noktası $\bar{x}$ olsun. Eğer Teorem 2.3.4, Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin koşulları mevcut ise, bu durumda $\bar{x}$ global asimptotik kararlıdır.

Örnek 2.3.2. Bu çalışmada parçalı sabit argümanlı bir diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Burada, dört popülasyon sınıfı ve bunların HIV/AIDS epidemisini bulaştırması esas alınmıştır. Hassas birey popülasyonu olarak tanımlanan popülasyon daha önce HIV epidemisi bulaşmamış grubu temsil etmektedir. Aralık 2010'da DSÖ/UNAIDS'in açıklamalarına göre günlük yaklaşık 7000 HIV hastası rapor edilmektedir. Bunların 1000'i 0-14 yaş çocuklara karşılık gelirken 6000'i 15 yaş üzeri bireylerdir. Yaklaşık 33.3 milyon insane HIV/AIDS epidemisine sahiptir. Aşağıdaki tablo Türkiye'deki yaşa göre HIV/AIDS dağılımını göstermektedir [19].

Yaş	0-	5-	10-	13-	15-	20-	25-	30-	35-	40-	50-	60+	Bilmeyen
-----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----------

	4	9	12	14	19	24	29	34	39	49	59		
Sayı	51	16	6	4	69	457	638	685	588	724	420	217	302
Toplam													4177

Tablo 2.3.2

Türkiye'nin nüfusu yaklaşık 70 586256 dır. Bunun içinde 15-65 yaş aralığında olanların sayısı yaklaşık 46943690 dır. Tablo 1'de HIV/AIDS dağılımı dikkate alındığında

$$\beta_1 + \beta_2 = 4\beta_2 = 8.8978944 \times 10^{-5}$$

olup

$$\beta_1 = 6.67341 \times 10^{-5} \quad \text{ve} \quad \beta_2 = 2.22447 \times 10^{-5} \quad (2.3.34)$$

bulunur.

Türkiye'de yıllık büyüme oranı $r_1 = 0.017$ olarak kaydedilmiştir. [20]'deki bilgiler dikkate alındığında 0-4 grubunda 17 birey yeni doğmuş olmalıdır. Bu durumda $r_3 = 0.004$ olacaktır. HIV hastalığına sahip olduğunu bilmeyen grubun ise $r_2 = 0.0105$ oranında büyüme oranına sahip olduğu kabul edilebilir. [20]'deki bilgilere göre $\alpha_1 = 0.005$ dir. Ayrıca [21]'den $\mu = 0.0416$ ve $\alpha_4 = 0.9584$ olduğu bilinmektedir. [5]'teki çalışmaya göre ise $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma = 1 \times 10^{-5}$, $\theta = 0.2858$, $\delta_1 = 0.572$, $\delta_2 = 0.286$ dir. Bu durumda

$$\beta_1 = 3\beta_2, \delta_1 = 2\delta_2, \beta_2 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{2(1-\varepsilon_1)}}, 5\delta_2 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\theta - 2\gamma > 6, \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 1 \text{ ve}$$

$2 + \gamma > \delta_2 + \alpha_3 > \gamma$ olmalıdır. Hesaplamalardan

$$1686244 < p_1 < 2569835$$

olduğu elde edilir. Bu sayı 46943690 ile bölündüğünde gerçek oran elde edilir. Allee fonksiyonu $E_1 = 0.001$ olmak üzere

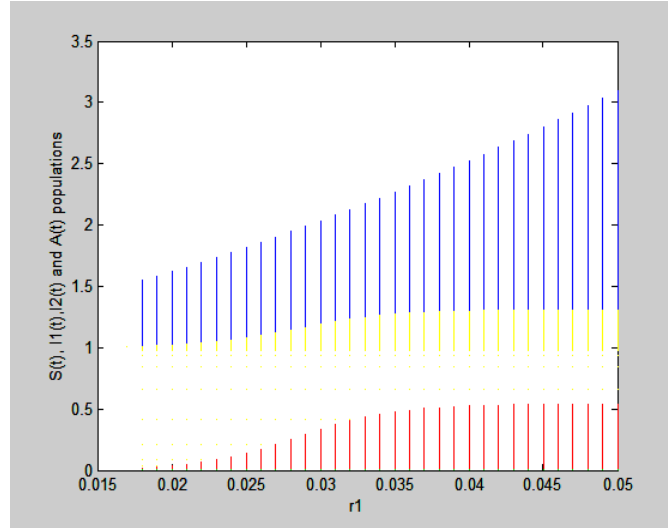
$$S \in \left(0, -E_1 + \sqrt{E_1^2 + \frac{E_1(p_1 - \beta_1 I_1 - \beta_2 I_2)}{\alpha_1}}\right) \cong (0, 0.1036374) \quad (2.3.35)$$

bulunur. Bu sayı $x = 0.1036374 \times 46943690 = 4865121$ verir. Bu durumda Allee fonksiyon barındıran (2.3.28) denklem sistemi kullanılmalıdır.

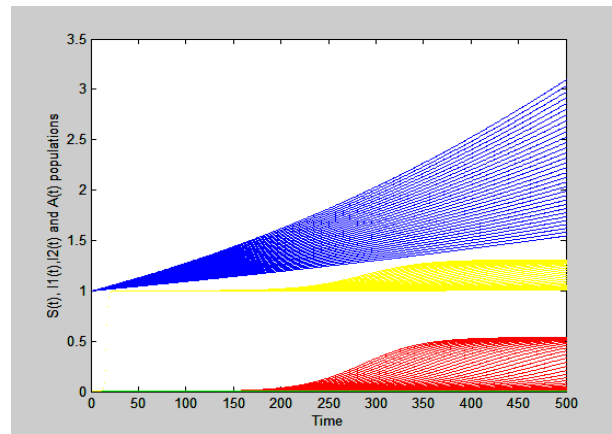
Şekil 2.3.1 ve Şekil 2.3.2 (2.3.1) denklem sisteminde çözümlerin davranışını gösterirken Şekil 2.3.3 ve Şekil 2.3.4'te Allee fonksiyonunun dahil olması halini vermektedir. Burada, $r_1 \in [0.017, 0.05]$, $r_2 = 0.6176r_1$, $r_3 = 0.23529r_1$, $\alpha_1 = 0.005$, $\alpha_4 = 0.9584$, $\mu = 0.0416$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma = 1 \times 10^{-5}$, $\theta = 0.2858$, $\delta_1 = 0.572$, $\delta_2 = 0.286$ ve başlangıç

koşulları $S(0)=1$, $I_1(0) = 0.000082545$, $I_2(0) = 0.0000064332$, $A(0) = 0.000000213$ olarak alınmıştır. Allee katsayıları ise $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 0.0001$ dır.

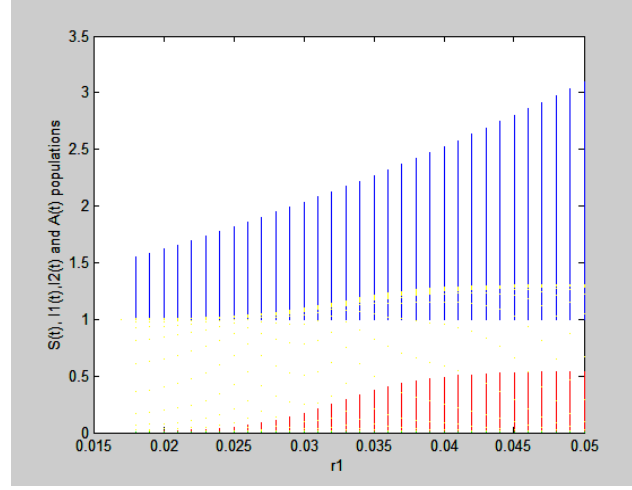
Şekil 2.3.1-2.3.4'te mavi grafik $S(t)$ hassas birey popülasyonunu, kırmızı grafik hasta olduğunu bilmeyen $I_1(t)$ sınıfını, yeşil grafik hasta olduğunu bilen sınıfı ve sarı grafik de AIDS hasta sınıfını göstermektedir.



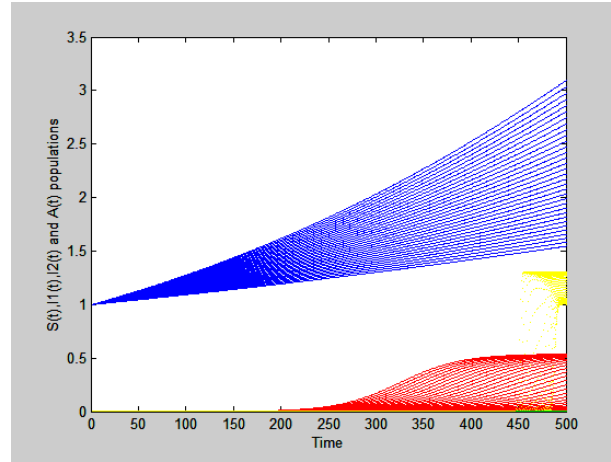
Şekil 2.3.1



Şekil 2.3.2



Şekil 2.3.3



Şekil 2.3.4.

NOT: Bu çalışma Applied Mathematics and Computation'a gönderilmiştir.

GENEL BİLGİLER -2

Bu kısımda biyolojik yapılar ile ilgili modelleme çalışmalarını düzenlemek ve geliştirmek için bulanık sayılar teorisinden ve kesirsel mertebeden diferansiyel denklem teorisinden faydalanılmıştır. Bu kısımdaki çalışma bundan sonraki proje çalışmaları için zemin oluşturmuş ve adi mertebeden diferansiyel denklem teorisinin biyolojik yapıları açıklamada yetersiz olduğu kanaatine varılmıştır. Kısım 3.1 bulanık sayı teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler yer alırken kısım 3.2’de kesirsel mertebeden diferansiyel denklem şeklinde tasarlanmış olan bir beyin tümörü büyümesi incelenmiştir.

3.1. BULANIK SAYILAR

İlk olarak 1951 yılında Steinhaus [22] tarafından, Polonya’da yapılan bir konferansta tanıtılan ve yine aynı yılda Fast [23] tarafından geliştirilen “İstatistiksel Yakınsaklık” kavramı, Toplanabilme Teorisi [24-26], Fourier Serileri [27], Fonksiyonel Analiz [27-29], Sayılar Teorisi [30] ve son zamanlarda ise, Ölçü Teorisi [31], Optimizasyon Teorisi [32,33] ve Fonksiyon Dizileri [34] gibi matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Özellikle 1993 yılında Fridy [35] tarafından “İstatistiksel limit noktaları” kavramı verildikten sonra 1997 yılında Fridy ve Orhan [36] tarafından “İstatistiksel limit supremum ve limit infimum” kavramları verilerek bir çeşit yeni bir analiz kavramı ortaya konulmuştur.

Bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizileri ilk olarak Matloka [37] tarafından tanıtıldı. Nanda [38] bulanık sayı dizileri uzayının tam metrik uzay olduğunu ispatladı. Daha sonra Nuray ve Savaş [39] bulanık sayılar için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizilerini tanımladılar. Nuray [40], Savaş [41] ve Kwon [42,43] istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı sonuçların bulanık sayılar için benzerlerini yaptılar. Aytar [44-46] bulanık sayı dizileri için

istatistiksel limit noktaları, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel monotonluk ve istatistiksel limit supremum, istatistiksel limit infimum kavramlarını tanımladı.

Bulanık sayı dizileri için λ -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λ -toplanabilme kavramları ise, Mursaleen [47] ve Savaş [48] tarafından tanımlandı.

Bütün reel sayıların cümlesini R ile gösterelim. Herhangi bir reel sayının a ve b gibi iki reel sayı arasında olduğu bilinir. Buna göre x reel sayısının $a \leq x \leq b$ veya $x \in [a, b]$ şeklinde $[a, b]$ kapalı sınırlı aralığına dahil olduğu kabul edilir. a ve b , aralığın sınırları veya bitim noktaları olarak adlandırılır. Bir A aralık sayısının alt sınırı $\underline{A}$, üst sınırı ise $\bar{A}$ şeklinde gösterilir. Bir aralık; kapalı, açık, alttan sınırsız (soldan), üstten sınırsız (sağdan) olabilir. R reel sayılar cümlesi de bir aralıktır ve $(-\infty, \infty)$ şeklinde gösterilir.

A aralık sayısı, $a \leq x \leq b$ olacak şekildeki x reel sayılarının cümlesi olarak tanımlanır. Yani $a, b \in R$ için $x \in [a, b]$ veya

$$A = [\underline{A}, \bar{A}] = \{x : \underline{A} \leq x \leq \bar{A}, x \in R\}$$

dir.

Özel olarak $a = b$ alınırsa A aralık sayısı bir reel sayıya indirgenir ki, bu da $a = [a, a]$ gibi nokta aralık veya tek nokta cümlesi olarak adlandırılır. Böylece bir aralık sayısı bir reel sayının (tek nokta cümlesinin) genelleştirilmişidir denir.

$A = [\underline{A}, \bar{A}]$ ve $B = [\underline{B}, \bar{B}]$ aralık sayılarının aralarındaki uzaklık

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\bar{A} - \bar{B}|) \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer A ve B tek nokta aralıkları ise yani $A = [a, a]$, $B = [b, b]$ ise bu durumda, (3.1.1) ifadesi reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir. Gerçekten,

$$d([a, a], [b, b]) = \max(|a - b|, |a - b|) = |a - b|$$

(3.1.1) den $d(A, B) = d(B, A)$,

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

olduğu söylenebilir.

Tanım 3.1.1. Bulanık sayı $X : R \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur;

- i) X normaldir, yani $X(t_0) = 1$ olacak şekilde $\exists t_0 \in R$ vardır.
- ii) X bulanık konveksdir, yani

$$\forall t_1, t_2 \in R, 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ için } X(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \geq \min\{X(t_1), X(t_2)\} \text{ dir.}$$

- iii) X üst yarı sürekli, yani $\forall t \in [0,1]$ için $\{x : X(x) < t\}$ cümlesi açık olmalı.

- iv) $X^0 = \{t \in R : X(t) > 0\}$ cümlesinin kapanışı kompakt olmalı [49].

Bulanık sayıların cümlesi $L(R)$ ile gösterilir .

Her reel sayı kendi karakteristik fonksiyonu ile gösterilebilir. Ayrıca bulanık sayı tanımından her karakteristik fonksiyonun bir bulanık sayı olduğu söylenebilir. Böylece reel sayılar cümlesi bulanık sayılar cümlesinin bir alt cümlesidir ve bulanık sayılar için gözlemlenen bütün özellikler reel sayılar için de geçerli olacaktır. Fakat bulanık sayılar cümlesi kısmi sıralı ve grup yapısı oluşturmayan bir cümledir.

Bulanık sayılar üzerindeki $\bar{d}$ Hausdorff metriği de $\bar{d} : L(R) \times L(R) \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha \right|, \left| \overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha \right| \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $X^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$, X bulanık sayısının α kesmesidir. Burada $\bar{d}$, $L(R)$ üzerinde bir metriktir. $(L(R), \bar{d})$ tam metrik uzaydır [50].

Bulanık sayılar için sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha \text{ ve } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Bu $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$X < Y \Leftrightarrow X \leq Y, \exists \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X}^\alpha < \overline{Y}^\alpha \text{ ve } \underline{X}^\alpha < \underline{Y}^\alpha$$

şeklindedir [51]. Eğer $X \leq Y$ ve $Y \leq X$ bağıntılarından her ikisi de sağlanmıyor ise, X ve Y bulanık sayıları karşılaştırılmaz denir ve $X \not\sim Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, bulanık sayılarının $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st\text{-}\lim X_k = X_0$ ile gösterilir [40].

Tanım 3.1.3. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \bar{d}(X_k, X_m) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon) \in N$ mevcut ise, bu taktirde bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir [40].

Tanım 3.1.4. $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan bir dizisi, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ ve $X = (X_k)$ dizisi de bulanık sayılarının bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, bulanık sayılarının $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına λ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $s_\lambda - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir [47].

Tanım 3.1.5. Bir K cümlesi için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K cümlesinin λ -yoğunluğu denir ve $\delta_\lambda(K)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. X_k nın bazı indisleri için λ -yoğunluğu 0 olanlar çıkarıldığında X_k yine aynı p özelliğini sağlıyor ise, λ -hemen hemen her k için X_k lar p özelliğini sağlar denir ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : X_k, p \text{ özelliğini sağlar}\}| = 1$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.7. $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan bir dizisi, $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ ve $X = (X_k)$ dizisi de bulanık sayıların bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : \bar{d}(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon) \in N$ mevcut ise, bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisine λ -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Burada $\lambda_n = (n)$ alırsak, λ -istatistiksel Cauchy dizisi istatistiksel Cauchy dizisine ve $\lambda_n = (1,1,1,...)$ alırsak λ -istatistiksel Cauchy dizisi klasik Cauchy dizisine dönüşür.

Teorem 3.1.1. Bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisi λ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $X = (X_k)$ dizisinin λ -istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 3.1.2. Bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli λ -toplanabilir ise, X_0 bulanık sayısına λ -istatistiksel yakınsaktır [48].

Sonuç 3.1.1. Bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisi bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli λ -toplanabilir ise, X bulanık sayı dizisi λ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.3. Bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisi ve $\liminf_n (\lambda_n/n) > 0$ ise, bulanık sayıların $X = (X_k)$ dizisi λ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 3.1.4. $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : X_k = Y_k\}| = 1$ olacak şekilde $\exists Y = (Y_k)$ λ -istatistiksel yakınsak dizisi varsa, $X = (X_k)$ dizisi λ -istatistiksel yakınsak bir dizidir.

Tanım 3.1.8. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k(j) \in I_n : j \in N\}| = 0$$

ise, $(X_{k(j)})$ altdizisine λ -seyrek (thin) altdizi, eğer

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k(j) \in I_n : j \in N\}| > 0$$

ise, λ -seyrek olmayan (nonthin) altdizi denir.

Kısalık için, $K = \{k(j) : j \in N\}$ olmak üzere $(X_{k(j)})$ altdizisini $(X)_K$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.9. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin bir A bulanık sayısına klasik yakınsayan ve λ -seyrek olmayan bir altdizisi varsa, A bulanık sayısına $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin λ -istatistiksel limit noktası denir. X dizisinin λ -istatistiksel limit noktalarının cümlesini Λ_X^λ ile gösterelim.

Tanım 3.1.10. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi ve eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \bar{d}(X_k, B) < \varepsilon \right\} \right| \neq 0$$

veya

$$\limsup_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \bar{d}(X_k, B) < \varepsilon \right\} \right| > 0$$

ise, B bulanık sayısına $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin λ -istatistiksel yığılma noktası denir. X dizisinin λ -istatistiksel yığılma noktalarının cümlesini Γ_X^λ ile gösterelim.

Teorem 3.1.5. Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi için $\Lambda_X^\lambda \subseteq \Gamma_X^\lambda$ dir.

Teorem 3.1.6. L_X bir $X = (X_k)$ dizisinin klasik limit noktalarının cümlesini göstermek üzere, $\Gamma_X^\lambda \subseteq L_X$ dir.

Tanım 3.1.11. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. (X_{k_n}) monoton artan (yani $X_{k_n} \leq X_{k_{n+1}}$) ve $\delta_\lambda(K) = 1$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq I_n$ alt cümlesi varsa, (X_k) bulanık sayı dizisine λ -istatistiksel monoton artandır (λ -s.m.i) denir.

Benzer şekilde λ -istatistiksel monoton azalanlık tanımlanabilir.

$X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi verilsin. (X_{k_n}) monoton azalan (yani $X_{k_{n+1}} \leq X_{k_n}$) ve $\delta_\lambda(K) = 1$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq I_n$ alt cümlesi varsa, (X_k) bulanık sayı dizisine λ -istatistiksel monoton azalandır (λ -s.m.d) denir.

Önerme 3.1.1. Kabul edelim ki $X = (X_k) \in L(R)$ olsun.

i) Eğer $X = (X_k)$ λ -istatistiksel monoton artan bir dizi ise, bu durumda

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : X_k \not\leq X_{k+1}\}| = 0 \text{ dır.}$$

ii) Eğer $X = (X_k)$ λ -istatistiksel monoton azalan bir dizi ise, bu durumda

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : X_k \not\geq X_{k+1}\}| = 0 \text{ dır.}$$

Tanım 3.1.12 Eğer

$$\delta_\lambda(\{k \in I_n : X_k > M\} \cup \{k \in I_n : X_k \not\sim M\}) = 0$$

olacak şekilde bir M bulanık sayısı varsa, $X = (X_k)$ dizisine üstten λ -istatistiksel sınırlıdır denir.

Alttan λ -istatistiksel sınırlılık da benzer şekilde tanımlanabilir.

Eğer $X = (X_k)$ dizisi hem alttan, hem de üstten λ -istatistiksel sınırlı ise, bu taktirde $X = (X_k)$ dizisi λ -istatistiksel sınırlıdır denir. Benzer şekilde bu tanımı aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz:

$$0_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & d.d. \end{cases} \text{ olmak üzere eğer}$$

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : \bar{d}(X_k, 0_1) > A\}| = 0$$

olacak şekilde A reel sayısı varsa, $X = (X_k)$ dizisi λ -istatistiksel sınırlıdır.

Aşağıdaki ayrışım teoremi λ -istatistiksel sınırlı bulanık sayı dizilerinin bir λ -istatistiksel sıfır dizisi ve bir sınırlı dizi içeren iki parçaya ayrılabilirliğini gösterir. Bunun için öncelikle λ -istatistiksel sıfır dizisini tanımlayalım.

Tanım 3.1.13. Bir bulanık sayının λ -istatistiksel limiti sıfıra eşit ise, bu diziye λ -istatistiksel sıfır dizisidir denir. Yani

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \bar{d}(X_k, 0_1) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine λ -istatistiksel sıfır dizisidir denir.

Teorem 3.1.7. Eğer $X = (X_k)$ λ -istatistiksel sınırlı bir diziyi, $Y = (Y_k)$ sınırlı bir dizi ve $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : Z_k \neq 0_1 \right\} \right| = 0$ olmak üzere $X = Y + Z$ şeklinde yazabiliriz.

Teorem 3.1.8. $X = (X_k)$, X_0 a λ -istatistiksel yakınsak bir dizi ise, $\lim Y_k = X_0$, $X = Y + Z$ ve $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k \neq Y_k \right\} \right| = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ dizisi ve $Z = (Z_k)$ λ -istatistiksel sıfır dizisi vardır.

Teorem 3.1.9. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 a λ -istatistiksel yakınsak olsun.

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : X_k < a, X_k > b, a, b \in L(R) \right\} \right| = 0$$

ise, X_0 bulanık sayısı, $[a, b]$ aralığındadır.

NOT: Bu kısımdaki çalışmalar, farklı konferanslarda sunulmuş ve dergilerde basılmıştır. Bunlar,

1. Intenational Conference: Mathematical Science and Applications adlı konferansta sunulmuş ve International Journal of Mathematics and Computation dergisinde “ λ -statistically monotonic and λ -statistically bounded sequences of fuzzy numbers” başlığı altında basılmıştır.
2. ICAAMM 2013 isimli konferansta sunulmuş ve makale şeklinde hazırlayıp konferansın belirteceği dergide basıma gönderilecektir.
3. ICPAM 2013 isimli konferansta sunulmuş ve “Lambda-statistical Limit Inferior and Limit Superior for Sequences of Fuzzy Numbers” isimli makale International Journal of Modeling and Optimization dergisinde basılmıştır.

3.2. ADİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu kısımda adi mertebeden diferansiyel denklemler üzerinde durulmuştur. Bu çalışma için [52-63] referansları dikkate alınmıştır.

Bu çalışmada, zamana göre gecikmeli bir lojistik diferansiyel denklem oluşturulmuştur. Bu denklem

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x(t) \{1 - \alpha \cdot x(t) - \beta x(t - \tau)\} + \gamma x(t - \tau) \quad (3.2.1)$$

olmak üzere α, β bilinmeyen pozitif reel sayılar, $r, \gamma \in R - \{0\}$ ve $\tau > 0$ de zaman göre gecikmedir. Burada, yerel ve global kararlılık analizinde r ve γ parametrelerin önemi üzerinde durulacaktır. Ayrıca Hopf çatallanmasının varlığı ve çatallanan periyodik çözümlerin yönü tespit edilecektir.

$u(t) = x(\tau)$ dönüşümü ile (3.2.1)

$$\frac{du(t)}{dt} = r \tau u(t) \{1 - \alpha u(t) - \beta u(t - 1)\} + \gamma \tau u(t - 1) \quad (3.2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin iki kritik noktası vardır. Bunlar $\bar{u}_1 = 0$ ve $r \neq 0$ olmak üzere

$\bar{u}_2 = \frac{r + \gamma}{r(\alpha + \beta)}$ dir. (3.2.2) denkleminin $\bar{u}_1 = 0$ noktası civarında lineerleştirilmesi ile

$$\frac{du(t)}{dt} = r\tau u(t) + \gamma\tau u(t-1) \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi ise

$$\lambda - r\tau - \gamma\tau e^{-\lambda} = 0 \quad (3.2.4)$$

şeklinde bulunur. Benzer $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası civarında lineerleştirilmiş denklem

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\tau(\alpha\bar{u}_2 + \gamma)y(t) - \tau(\beta\bar{u}_2 - \gamma)y(t-1), \quad (3.2.5)$$

ve karakteristik denklem ise

$$\lambda + \tau(\alpha\bar{u}_2 + \gamma) + \tau(\beta\bar{u}_2 - \gamma)e^{-\lambda} = 0 \quad (3.2.6)$$

olarak edilde edilir.

Teorem 3.2.1. (3.2.1) denklemin kritik noktaları $\bar{u}_1 = 0$ ve $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $r < \frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer $\chi = r\tau \tan \chi$, $0 < \chi < \pi$ olmak üzere

$$-\frac{1}{\tau} \sqrt{r^2 \tau^2 + \chi^2} < \gamma < -r$$

ise, bu durumda (3.2.1) denklemin $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası yerel asimptotik kararlıdır.

(ii) $\gamma > -\frac{1}{\tau}$ olsun. Eğer $\chi = -\frac{\tau}{\alpha+\beta}(\gamma(2\alpha+\beta) + \alpha r) \tan \chi$, $0 < \chi < \pi$ olmak üzere

$$-\gamma < r < \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sqrt{((2\alpha+\beta)\gamma + \alpha r)^2 (1 + \tan^2 \chi)}$$

ise, bu durumda $\bar{u}_2 = \frac{r+\gamma}{r(\alpha+\beta)}$ kritik noktası yerel asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.2. Eğer $\gamma^2 < r^2$ ise, bu taktirde $\bar{u}_1 = 0$ her $\tau > 0$ için asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.3. Eğer $\beta > \alpha$ ve $\Delta = 4\gamma^2(\alpha + \beta)^2$ olmak üzere $r \in \left(\frac{4\alpha\gamma - \sqrt{\Delta}}{2(\beta - \alpha)}, \frac{4\alpha\gamma + \sqrt{\Delta}}{2(\beta - \alpha)} \right)$ ise, bu durumda $\bar{u}_2 = \frac{r + \gamma}{r(\alpha + \beta)}$ her $\tau > 0$ için asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.4. Kabul edelim ki $\gamma < 0$ ve $r > 0$ olsun. Üstelik $\tau > 0$ için $0 < x(t) < \sqrt{2r+1} \cdot x(t) < x(t-\tau)$ koşulu mevcut olsun. Bu durumda $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.5. $0 < r < -\frac{(\alpha + \beta) + 2\alpha\gamma}{2(2\alpha + \beta)} < -\gamma$ ve $\gamma < -\frac{\alpha + \beta}{2\alpha}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\tau > 0$ için $0 < x(t) < x(t-\tau)$ olsun. Bu durumda $\bar{u}_2 = \frac{r + \gamma}{r(\alpha + \beta)}$ global asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.2.6. $\chi = r\tau \tan \chi$ ve $0 < \chi < \pi$ olmak üzere $\gamma = -\frac{1}{\tau} \sqrt{r^2\tau^2 + \chi^2}$ olsun. Bu durumda $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasından bir periyodik yörüngeye Hopf çatallanması mevcuttur.

Benzer şekilde, $\chi = -\frac{\tau}{\alpha + \beta} (\gamma(2\alpha + \beta) + \alpha\gamma_*) \tan \chi$, $0 < \chi < \pi$ olmak üzere r ,

$$r_* = \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sqrt{((2\alpha + \beta)\gamma + \alpha\gamma_*)^2 (1 + \tan^2 \chi)}$$

kritik noktadan geçmesi $\bar{u}_2 = \frac{\gamma + r}{r(\alpha + \beta)}$ noktasının bir periyodik yörüngeye Hopf çatallanması meydana gelir.

$\nu \in R$ olmak üzere $\gamma = \gamma_* + \nu$ olsun. $\mu \in C$ için

$$L_{\nu}\mu = r\tau\mu(0) + (\gamma_* + \nu) \cdot \tau\mu(-1) \quad (3.2.7)$$

ve

$$F(\nu, \mu) = -\alpha r\tau\mu^2(0) - \beta\pi\mu(0)\mu(-1) \quad (3.2.8)$$

yazılsın. Rietsz teoreminden $\theta \in [-1,0]$ olmak üzere bir $\eta(\theta, \nu)$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki

$$L_\nu \mu = \int_{-1}^{\theta} d\eta(\theta, \nu) \mu(\theta) \quad \text{for } \mu \in C \quad (3.2.9)$$

yazılabilir. $\mu \in C^1([-1,0], R)$ için

$$A(\nu)\mu = \begin{cases} \frac{d\mu(\theta)}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0 \\ \int_{-1}^0 d\eta(\xi, \nu) \mu(\xi), & \theta = 0, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

ve

$$B(\nu)\mu = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0 \\ F(\nu, \mu), & \theta = 0. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

tanımlansın. Böylece, $\theta \in [-1,0]$ için $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ olmak üzere

$$\dot{u}_t = A(\nu)u_t + B(\nu)u_t \quad (3.2.12)$$

yazılabilir. $\psi \in C^1[-1,0]$ için A 'nın adjoint operatörü A^* tanımlansın, öyle ki

$$A^*(\nu)\psi = \begin{cases} -\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}, & 0 < \xi \leq 1 \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, \nu) \mu(-t), & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.2.13)$$

olsun ve bilineer iç çarpım ise

$$\langle \psi, \mu \rangle = \bar{\psi}(0)\mu(0) - \int_{-1}^0 \int_{s=0}^{\theta} \bar{\psi}(s - \theta) d\eta(\theta, 0) \mu(s) ds \quad (3.2.14)$$

şeklinde ifade edilsin. (3.2.14)'ten

$$\begin{aligned}\langle q^*, q \rangle &= \overline{D} - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{q}^*(s - \theta) d\eta(\theta, 0) \mu(s) ds \\ &= \overline{D} (1 + \gamma_* \tau e^{-i\omega_0}) = 1.\end{aligned}$$

dir. Burada

$$q^*(\theta) = \frac{1}{1 + \gamma_* \tau e^{i\omega_0 \theta}}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.2.15)$$

bulunur. Benzer şekilde, $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ dir.

$\nu = 0$ 'da C_0 merkez manifoldu tarif etmek için koordinatları hesaplamalıyız. Her bir $u \in \text{Dom}(A)$ için (z, s) ikiliyi $z = \langle q^*, u_t \rangle$ ve

$$s(t, \theta) = u_t(\theta) - zq(\theta) - \bar{z}\bar{q}(\theta) = u_t(\theta) - 2\text{Re}\{zq(\theta)\} \quad (3.2.16)$$

olmak üzere yazalım. C_0 merkez manifold üzerinde $s(t, \theta) = s(z(t), \bar{z}(t), \theta)$ vardır öyle ki

$$s(z, \bar{z}, \theta) = s_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + s_{11}(\theta) z\bar{z} + s_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + s_{30}(\theta) \frac{z^3}{6} + \dots \quad (3.2.17)$$

dir. Burada z ve $\bar{z}$ 'ler q ve q^* yönlerindeki C_0 merkez manifoldun yerel koordinatlarıdır. $u_t \in C_0$ çözümler için

$$\langle q^*, \dot{u}_t \rangle = \langle q^*, Au_t + Bu_t \rangle$$

yazılabilir. $\nu = 0$ olduğundan

$$\dot{z}_t = \langle q^*, \dot{u}_t \rangle = \langle q^*, Au_t + Bu_t \rangle = i\omega_0 z_t + \bar{q}^*(0) f(z, \bar{z})$$

dir. Yukarıdaki diferansiyel denklem

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z + \bar{q}^*(0) f(z, \bar{z}) = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}) \quad (3.2.18)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{30} \frac{z^3}{6} + \dots \quad (3.2.19)$$

olur. Ayrıca,

$$u_t(\theta) = s(t, \theta) + 2 \operatorname{Re}\{zq(\theta)\} = s_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + s_{11}(\theta) z\bar{z} + s_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + e^{i\omega_0\theta} z + e^{-i\omega_0\theta} \bar{z} + \dots \quad (3.2.20)$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} g(z, \bar{z}) &= \bar{q}^*(0) f(z, \bar{z}) \\ &= \bar{q}^*(0) F(0, u_t) \\ &= -\bar{D}r\tau [\alpha u_t^2(0) + \beta u_t(0) u_t(-1)] \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

elde edilir. Katsayılardan

$$\begin{aligned} g_{20} &= -2\bar{D}r\tau(\alpha + \beta e^{-i\omega_0}) \\ g_{11} &= -2\bar{D}r\tau(\alpha + \beta \cos \omega_0) \\ g_{02} &= -2\bar{D}r\tau(\alpha + \beta e^{i\omega_0}) \\ g_{21} &= -\bar{D}r\tau [2\alpha(s_{20}(0) + 2s_{11}(0)) + \beta(e^{i\omega_0}s_{20}(0) + s_{20}(-1) + 2s_{11}(-1) + 2e^{-i\omega_0}s_{11}(0))] \end{aligned}$$

yazılabilir. s_{20} ve s_{11} 'ler g_{21} 'de bilinmediğinden bunları bulmak için hesaplamalar yapacağız.

$$\dot{s} = \dot{u}_t - q\dot{z} - \bar{q}\dot{\bar{z}} = Aw - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^* f(z, \bar{z})q\} + Bu_t$$

eşitliğinden ve B'nin tanımından

$$\dot{s} = \dot{u}_t - q\dot{z} - \bar{q}\dot{\bar{z}} = \begin{cases} As - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^* f(z, \bar{z})q(\theta)\}, & -1 \leq \theta < 0 \\ As - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^* f(z, \bar{z})q\} + f(z, \bar{z}) & \theta = 0. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

yazılır. (3.2.22) düzenlenirse,

$$K(z, \bar{z}, \theta) = K_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + K_{11}(\theta) z\bar{z} + K_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olmak üzere

$$\dot{s}(t) = As + K(z, \bar{z}, \theta) \quad (3.2.23)$$

yazılabilir. Buradan ise

$$(A - 2i\omega_0)s_{20}(\theta) = -K_{20}(\theta), \quad As_{11}(\theta) = -K_{11}(\theta), \dots \quad (3.2.24)$$

elde edilir. Böylece,

$$K_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + K_{11}(\theta)z\bar{z} + K_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots + g(z, \bar{z})q + \overline{g(z, \bar{z})}\bar{q} = 0.$$

dir. Bu durumda

$$\begin{cases} K_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \overline{g_{02}} \cdot \bar{q}(\theta), \\ K_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \overline{g_{11}}\bar{q}(\theta), \\ K_{02}(\theta) = -g_{02}q(\theta) - \overline{g_{20}}\bar{q}(\theta), \\ \dots \end{cases} \quad (3.2.25)$$

bulunur. A'nın tanımından

$$\dot{s}_{20}(\theta) = 2i\omega_0 s_{20} + g_{20}q(\theta) + \overline{g_{02}}\bar{q}(\theta) \quad (3.2.26)$$

ve

$$\dot{s}_{11}(\theta) = g_{11}q(\theta) + \overline{g_{11}}\bar{q}(\theta) \quad (3.2.27)$$

yazılabilir. $q(\theta) = e^{i\omega_0\theta}$ olduğundan

$$s_{20}(\theta) = i\frac{g_{20}}{\omega_0}e^{i\omega_0\theta} + i\frac{\overline{g_{02}}}{3\omega_0}e^{-i\omega_0\theta} + U_1e^{2i\omega_0\theta} \quad (3.2.28)$$

ve

$$s_{11}(\theta) = -i\frac{g_{11}}{\omega_0}e^{i\omega_0\theta} + i\frac{\overline{g_{11}}}{\omega_0}e^{-i\omega_0\theta} + U_2 \quad (3.2.29)$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{cases} K_{20}(0) = -g_{20} - \overline{g_{02}} - 2r\tau(\alpha + \beta e^{-i\omega_0}) = -As_{20}(0) + 2i\omega_0 s_{20}(0), \\ K_{11}(0) = -g_{11} - \overline{g_{11}} - 2r\tau(\alpha + \beta \cos \omega_0) = -As_{11}(0), \\ \dots \end{cases} \quad (3.2.30)$$

yazılır. (3.2.30)'dan

$$U_1 = \frac{ig_{20}\left(\frac{r\tau + \gamma_* \tau e^{-i\omega_0}}{\omega_0} - i\right) + i\overline{g_{02}}\left(\frac{r\tau + \gamma_* \tau e^{i\omega_0}}{3\omega_0} + \frac{i}{3}\right) - 2r\tau(\alpha + \beta e^{-i\omega_0})}{2i\omega_0 - r\tau - \gamma_* \tau e^{-2i\omega_0}} \quad (3.2.31)$$

ve

$$U_2 = \frac{ig_{11}\left(\frac{r\tau + \gamma_* \tau e^{-i\omega_0}}{\omega_0} - i\right) - i\overline{g_{11}}\left(\frac{r\tau + \gamma_* \tau e^{i\omega_0}}{\omega_0} + i\right) + 2r\tau(\alpha + \beta \cos \omega_0)}{\tau(r + \gamma_*)} \quad (3.2.32)$$

elde edilir. Böylece,

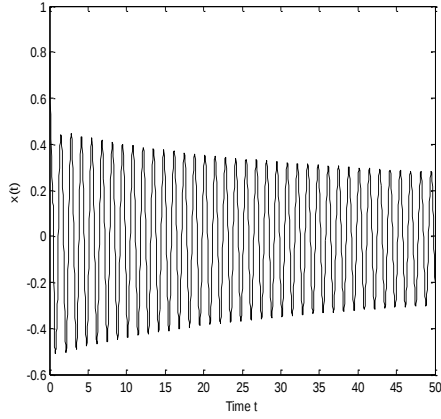
$$\begin{cases} c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}, \\ \mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\operatorname{Re}(\lambda'(\gamma_*))}, \\ \beta_2 = 2\operatorname{Re}(c_1(0)). \end{cases} \quad (3.2.33)$$

parametreleri hesaplanabilir.

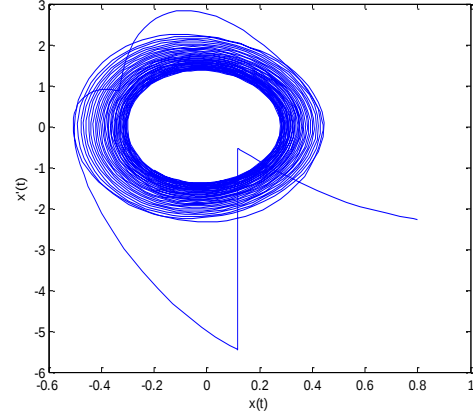
Örnek 3.2.1

(i) $\tau = 0.5$, $r = -4.71238898025$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8999999$, $\gamma = -6.66432399526318$ ve $x(0) = 0.8001$ parametreleri için ilk 50 iterasyon yapıldığında (3.2.1) denklemin grafiği Şekil 3.2.1(a) ve Şekil 3.2.1(b)'de görülür. Burada $\bar{u}_1 = 0$ kritik noktasının bir periyodik yörüngeye Hopf çatallanması mevcuttur.

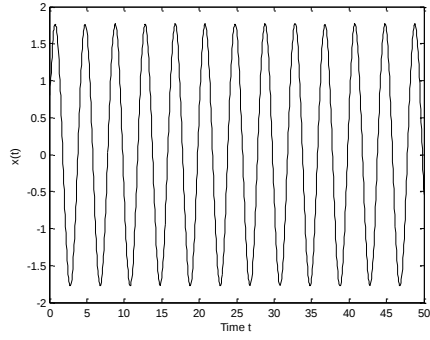
(ii) $\tau = 0.5$, $r = 1.5707963275$, $\alpha = 0.0005$, $\beta = 0.0003$, $\gamma = -2.221441470076$ ve $x(0) = 0.8001$, parametreleri için ilk 50 iterasyon yapıldığında (3.2.1) denklemin grafiği Şekil 3.2.2(a) ve Şekil 3.2.2 (b)'de görülür. Burada $\bar{u}_2$ kritik noktasının bir periyodik yörüngeye Hopf çatallanması mevcuttur.



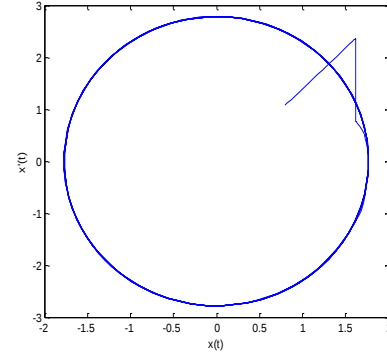
Şekil 3.2.1 (a)



Şekil 3.2.1 (b)



Şekil 3.2.2 (a)



Şekil 3.2.2 (b)

Örnek 3.2.1/(i)'de belirtilen parametreler için $C_1(0) = -0.64676 - 0.49156i$, $\mu_2 = -5.3852$ ve $\beta_2 = -1.29352$ elde edilir. Bu durumda, Hopf çatallanması subkritiktir ve çatallanan periodik çözümler kararlıdır.

Benzer şekilde, Örnek 3.2.1/(ii)'deki parametre değerleri için $C_1(0) = 0.00018155 - 0.00055611i$, $\mu_2 = 0.00059634$ ve $\beta_2 = 0.0003631$ elde edilir. Buna göre, Hopf çatallanması superkritiktir ve çatallanan periyodik çözümler kararsızdır.

NOT: Bu çalışma ICPAM 2013 isimli konferansta sunulmuş ve International Journal of Modeling and Optimization dergisinde “Hopf bifurcation and stability analysis for a delayed logistic equation” başlığı ile basılmıştır.

4.GEREKÇE VE YÖNTEM

Bu proje çalışmasında öncelikle, biyolojik yapılar içerisinde HIV/AIDS epidemik hastalığı incelenmiş ve hastalık için iki model kurulmuştur (Bölüm 2). İlk adımda HIV hastalığına sahip olmayan, bu hastalığa sahip olup da bilmeyen ve hastalığa sahip olduğunu bilen bir popülasyon modeli tasarlanmıştır. İnsanların bu hastalığı birbirlerine bulaştırmaları ve ilaç tedavisi süreci ayrık zaman diliminde gerçekleşen bir olay iken insanlar örtüşen jenerasyonlar olduklarından sürekli zaman da dikkate alınmalıydı. Bu sebeple bu model için parçalı sabit argümanlı bir diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuş ve pozitif denge noktasının kararlılık analizi incelenmiştir. Hindistan'da bilinçsizce bu hastalığın insanlara bulaştırılması düşünüldüğünde bu model için Hindistan'daki demografik veriler dikkate alınmış ve bu epidemik hastalığın yayılımında etkin parametreler tespit edilmiştir. Bu kısımdaki ikinci modelde ise hastalığa sahip olmayan, HIV'e sahip olup da bilmeyen, HIV epidemisine sahip olan ve AIDS hastaları olmak üzere dört popülasyon sınıfı incelenmiştir. Bu model de yine parçalı sabit argümanlı diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Bu modelde Türkiye'deki HIV/AIDS hastaları dikkate alınmıştır. Türkiye'de HIV/AIDS hastalarının az olması sebebiyle modele Allee fonksiyonu dahil edilmiş ve Allee etkili bir dinamik sistem incelenmiştir.

Çalışmalardan birincisi uluslar arası bir yayına göndermek için hazırlanırken, ikincisi Applied Mathematics and Computation'a gönderilmiş ve değerlendirme aşamasındadır.

Amacımız biyolojik olayları modelleyebilecek matematiksel araçları analiz etmek ve modelini kurmak olduğundan çalışmamızın bundan sonraki araştırmaları ileriki proje çalışmalarımız için zemin oluşturmuştur. Bilindiği üzere bulanık sayılar teorisi önce mühendislik alanını ilgilendiren bir alan iken günümüzde biyolojik vakaları da analiz etmekte kullanılan önemli bir sahadır. Bu sebeple, bulanık sayılar teorisi üzerine çalışmalar yapılmış ve bu çalışmaları biyolojik yapılara uyarlayabilecek analizlerde bulunulmuştur. Raporun üçüncü bölümünün birinci kısmında yer alan bu çalışmada henüz teorik analizlerde bulunulmuş, fakat biyolojik yapılara uyarlanacak zemin de kurulmuştur. Bu çalışmalar çeşitli konferanslarda sunulmuş ve biri basılmak üzere iki yayın da uluslar arası dergilere gönderilmek üzere hazırlanmıştır.

Raporun üçüncü bölümünün ikinci kısmında zamana göre gecikmeli ve tek türün popülasyonu için geçerli olan bir model tasarlanmış ve analiz edilmiştir. Belirli bir zaman sıralamasının gerçekçi problemler olması sebebiyle (örneğin hastalık tespit edilir ve ardından ilaç kullanılır) bu çalışmada zamana göre gecikmeli bir model analiz edilmiş, bu çalışma uluslararası bir konferansta sunulmuş ve bir dergide basılmıştır.

5.BULGULAR

Proje süresi boyunca yapılan analizler sonucu elde edilen bulgular aşağıda maddeler halinde listelenmiştir.

1. Parçalı sabit argümanlı diferansiyel denklem sistemi şeklinde oluşturulan HIV modeli analiz edilmiş ve Hindistan'daki demografik veriler kullanılarak simülasyonlar yapılmıştır. [5]'deki çalışmada, Hindistan'daki bilinçsizce HIV bulaştırmanın devam etmesi halinde 75 yıl sonra halkın yarısının HIV hastası olabileceği iddia edilmişti. Benzer bir grafik yapısı oluşturulan bu modelin simülasyonunda rastlanılmıştır. Bu durumda, HIV hasta sayısı çok olan ülkeler için uygun bir model tasarlanmıştır.

2. Bu çalışmada ikinci adım olarak HIV/AIDS epidemisinin modeli parçalı sabit argümanlı bir diferansiyel denklem sistemi şeklinde oluşturulmuş, ancak HIV/AIDS hastasının yaygın olmadığı ülkeler için analiz yapılmıştır. Bu sebeple Türkiye'deki hasta verileri incelenmiştir ve modele Allee fonksiyonunun uyarlanması ile model analiz edilmiştir.

3. Bulanık sayılar teorisinin biyolojik yapıları açıklamada kullanılması, bulanık sayılar teorisi ile ilgili teorik çalışmalar yapılmış ve uluslar arası camiada çalışmaya ilgi duyulması elde edilen teorik çalışmaları biyolojik vakalara uyarlamayı gerektirmiştir. Bu sebeple, bundan sonraki proje çalışmalarında bulanık sayılar teorisi ve epidemik hastalıklar üzerine durulması planlanmıştır.

4. Bu proje çalışmasında zaman göre gecikmeli ve tek bir türün popülasyonunu kapsayan bir model tasarlanmış ve bu modelin kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca, Hopf çatallanması ve yörünge analizi üzerine durulmuştur. Bu çalışma uluslar arası alanda sunulmuştur.

5. Her ne kadar adi diferansiyel denklem teorisi ile biyolojik yapılar analiz edilip modellenmeye çalışıldıysa da kesirsel mertebeden diferansiyel denklem teorisinin adi diferansiyel denklem teorisine göre biyolojik yapıları analiz etmede önemli avantajlara sahip olduğu bilinmektedir. Bu sebeple ICAAMM 2013 de sunulmak üzere bir GBM-immune sisteminden oluşan iç çekişme modeli kesirsel mertebeden diferansiyel denklem sistemi şeklinde tasarlanmış ve analiz edilmiştir. Bu çalışma, uluslararası ortamda yoğun ilgi görmüş ve uluslararası bir dergide basılmak üzere gönderilmiştir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu proje çalışmasında, HIV/AIDS epidemisi ile ilgili parçalı sabit argümanlı çalışmalar yapılacağı ve bununla birlikte farklı model çalışmaları da yapılacağı belirtilmiştir. Grubun titiz, ilgili ve düzenli çalışmaları neticesinde proje takviminde belirtilen süreden daha erken sürede hedeflere ulaşıldığı görülmüştür. Problemlerin gruplar arasında paylaşılması ve düzenli toplantıların yapılması sonucunda HIV/AIDS epidemisi ile ilgili iki çalışma yapılmış ve demografik verilerle uyumluluğu analiz edilmiştir. Bu çalışmalar ulusal ve uluslar arası ortamlarda paylaşılmış ve biri yayın olarak gönderilmiş diğeri ise yazım aşamasında olup gönderilecektir.

Bundan sonraki proje süresinde farklı model kurma arayışı içine girilmiştir. Bu çalışmalarda, bulanık sayı teorisi, zaman göre gecikmeli diferansiyel denklem teorisi ve kesirsel mertebeden diferansiyel denklem teorisi üzerine durulmuştur. Her bir çalışma uluslar arası ortamda sunulmuş ve bununla birlikte ya çalışma yayın olarak basılmıştır ya da basılmak üzere hazırlık aşamasındadır. Elde edilen sonuçlar neticesinde modelleme çalışmaları iki farklı kategoride bundan sonraki proje çalışmalarında incelenmesine karar verilmiştir. Bunlardan biri bulanık sayılar teorisi iken diğeri de kesirsel mertebeden diferansiyel denklemler teorisi olmuştur.

7. KAYNAKLAR

- [1] Velasco-Hernandez, J.X., Yig-Hen Hsieh, Modelling the effect of treatment and behavioral change in HIV transmission Dynamics. J. Math. Biol., 32 (1994), 233-249.
- [2] Blythe, S. P., Anderson, R. M., Variable Infectiousness in HIV Transmission Models. IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology, 5(1988), 181-200.
- [3] Bachar, M, Dorfmayr, A., HIV treatment models with time delay,.Comptes Rendus Biologies, 327 (11) (2004), 983-994.
- [4] Naresh, R., Sharma, D., Tripathi, A., Modelling the effect of tuberculosis on the spread of HIV infection in a population with density-dependent birth and death rate. Mathematical and Computer Modelling, Volume 50, Issues 7–8(2009), 1154-1166.
- [5] Naresh, R., Sharma, D., Tripathi, A., A nonlinear HIV/AIDS model with contact tracing. Applied Mathematics and Computation, 217 (23) (2011), 9575-9591.
- [6] Arazoza, H.D., Lounes, R., A non-linear model for a sexually transmitted disease with contact tracing. IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology, 19(2002), 221–234.
- [7] Doyle, M., Greenhalgh, D., Asymmetry and multiple endemic equilibria in a model for HIV transmission in a heterosexual population. Mathematical and Computer Modelling, 29 (3)(1999) 43–61.
- [8] Nyabadza, F., Mukandavire, Z., S.D., Modelling the HIV/AIDS epidemic trends in South Africa: Insights from a simple mathematical model. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12 (4)(2011), 2091- 2104.
- [9]Naresh, R, Sharma, D., Tripathi, A., Modelling the effect of risky sexual behaviour on the spread of HIV/AIDS. International Journal of Applied Mathematics and Computation, 1 (3) (2009), 132–147.

[10] 22. HIV/AIDS (Web Sayfası: <http://www.msf.org/diseases/hiv-aids?gclid=CPSs0NCvn7gCFVMbtAod7S0AfA>) (Eriřim Tarihi: Mayıs 2012).

[11] İstanbul Üniversitesi İşletme Fakóltesi Dergisi, Istanbul University Journal of the School of Business Administration, 38 (2)(2009), 197-209.

[12] Antiviral ilaçlar ve viral kemoterapi (Web Sayfası: http://medisinalkimya.net/jlms/docs/0007_b02b3daa7cfd75659f236ce5ae0ad3a.pdf) (Eriřim Tarihi: Aralık 2013).

[13] Anderson, R. M., May R. M.,. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[14] Adams, B.M., Banks, H.T., Davidian, M., Kwon, H.D., Tran, H.T., Wynne S.N., Rosenberg, E.S., HIV dynamics: Modeling, data analysis, and optimal treatment. Protocols Journal of Computational and Applied Mathematics, 184 (1)(2005), 10-49.

[15] Wodarz, D., Nowak, Mathematical models of HIV pathogenesis and treatment; Bio Essays, 24 (12) (2002), 1178–1187.

[16] Busenberg, S., Cooke, K., Y.H. Hsieh., A model for HIV in Asia. Mathematical Biosciences, 128 (1-2)(1995), 185-210.

[17] Bailey, N.T.J., The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications. Hafner, second edition, New York, 1975.

[18] HIV/AIDS (<http://tr.wikipedia.org/wiki/AIDS>), Eriřim Tarihi: Şubat 2012.

[19] Tümer, A., Dünyada ve Türkiye’de Güncel Verilerle HIV/AIDS, Türk HIV/AIDS Dergisi, 9(4) (2011),99-103.

[20] Koç, İ., et al., Türkiye’nin Demografik Dönüşümü, Hacettepe Üniversitesi Nüfus Etütleri Enstitüsü, 2008.

- [21] Taşdelen-Fısgın, N., et al., Evaluation of HIV/AIDS Cases, Klinik Dergisi, 22(1)(2009), 18-20.
- [22] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2(1951), 73-74.
- [23] Fast, H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2(1951), 241-244.
- [24] Schoenberg, I. J., The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66(1959), 361-375.
- [25] Salat, T., On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30(1980), 139-150.
- [26] Fridy, J.A., On statistical convergence, Analysis, 5(1985), 301-313.
- [27] Connor, J.S., The statistical and strong P-Cesaro convergence of sequences, Analysis, 8(1988), 47-63.
- [28] Connor, J.S., On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32(1989), 194-198.
- [29] Kline, J.L., Statistical Convergence and Densities Generated by Sequences of Measures, Ph.D. Thesis, Ohio University, USA, 1995.
- [30] Erdős, P., Tenebaum, G., Sur les densities de certaines suites d'entries, Proc. London Math. Soc., 50 (1989), 417-438.
- [31] Miller, H.I., Orhan, C., On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungary, 93 (1-2)(2001), 135-151.

- [32] Mamedov, M.A., Pehlivan, S., Statistical convergence of optimal pahts., Math. Jap., 52 (1)(2000), 51-55.
- [33]Pehlivan, S., Mamedov, M.A., Statistical cluster point and turnpike, Optimization, 48(2000), 93-106.
- [34]Duman, O., Orhan, C., μ -statistically convergent function sequences, Czech. Math. J., 54 (2)(2004), 413-422.
- [35]Fridy, J.A., Statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 4(1993), 1187-1192.
- [36]Fridy, J.A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125(1997), 3625-3631.
- [37]Matloka, M., Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28(1986), 28-37.
- [38]Nanda, S., On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33(1989), 123-126.
- [39]Nuray, F., Savaş, E., Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3)(1995), 269-273.
- [40]Nuray, F., Lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 99 (3)(1998), 353-355.
- [41]Savaş, E., On statistically convergent sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 137(2001), 277-282.
- [42]Kwon, J.S., On statistical and p -cesaro convergence of fuzzy numbers, Korean J.C.A.M., 9 (3)(2000), 95-203.
- [43]Kwon, J.S., Shim, H.T., Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 123(2001), 85-88.

- [44]Aytar, S., Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 165 (2004), 129-138.
- [45]Aytar, S., Pehlivan, S., Statistically monotonic and statistically bounded sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci., 176(2006), 734-744.
- [46]Aytar, S., Mamedov, M.A., Pehlivan, S., Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 157(2006), 976-985.
- [47] Mursaleen, M., λ -Statistical Convergence, Math. Slovaca, 50 (1)(2000), 111-115.
- [48]Savaş, E., On strongly λ -summable sequences of fuzzy numbers, Inf. Sci. 125(2000), 181-186.
- [49]Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2(1972), 30-34.
- [50]Puri, M.L., Ralescu, D.A., Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91(1983), 552-558.
- [51]Diamond, P., Kloeden, P., Metric Spaces of Fuzzy Sets, Theory and Applications, World Scientific, Singapore, 1994.
- [52] Hutchinson, G.E., Circular causal systems in ecology, Ann. N.Y. Acad.Sci., 50 (1948), 221- 246.
- [53] Gopalsamy, K., Stability and oscillations in delay differential equations of a population dynamics, Dodrecht: Kluwer Academic Press, 1992.
- [54] Kuang, Y., Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, Boston 1993.

- [55] Jiang, M., et al., Nonlinear behavior of the parameterized logistic differential systems, *Applied Mathematics and Computation*, 89 (2007), 1694-1704.
- [56] Sun, C., Han, M., Lin, Y., Analysis of stability and Hopf bifurcation for delayed logistic equation, *Chaos, Solutions and Fractals*, 31(2007), 672-682.
- [57] Yiang, M., et al., Stability, bifurcation and a new chaos in the logistic differential equation with delay, *Physics Letters A*, 350 (2006), 221-227.
- [58] Gopalsamy, K., On the global attractivity in a generalized delay-logistic differential equation, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 100 (1986), 183-192.
- [59] Betz, H., Burcham, P.B. , Ewig, G.M. *Differential equation with application*, Harper and Brothers, New York, 1954.
- [60] Uchanski, J., *Classical Mathematical Ecology*, PWN, Warsaw, 1992.
- [61] Hale, J., Verduyn Lunel, S., *Introduction to Functional Differential equations*, Springer, New York, 1993.
- [62] Ruan, S., Wei, J., On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations, *Dynam. Cont. Discr. Impul. Sys. Series A: Math. Anal.*, 1 (2003), 863-874.
- [63] Hassard, B., Kazarino, D., Wan, Y., *Theory and applications of Hopf bifurcation*, Cambridge University Press, 1981.

