T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ

KOORDİNASYON BİRİMİ

ZAMAN SKALASINDA TÜMÖR BÜYÜMESİ MODELLEMELERİ

Proje No:FDA-2015-5841

Proje Türü

Kurum Dışı Destekli Araştırmalar İçin İhtiyaç Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:

M. Tamer Şenel

Fen Fakültesi/Matematik

Mart 2016

KAYSERİ

TEŞEKKÜR

Bu projeyi destekleyen ERÜ BAP birimine ve TÜBİTAK ‘a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET **5**

ABSTRACT **6**

1. GİRİŞ **7**

1.1. Amaç ve Kapsam 8

2. LİTERATÜR ÖZETİ **12**

3. GEREÇ VE YÖNTEM **13**

3.1. Temel Tanımlar 14

4. BULGULAR **24**

4.1 Zaman Skalasında Dinamik Sistem Oluşturulması 24

4.2 Lyapunov Dönüşümü ve Karlılık 31

5. TARTIŞMA VE SONUÇ **33**

5.1. Öneriler 34

KAYNAKLAR **35**

ÖZET

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in [11] doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atılmıştır. Bu yeni fikir uygulamalı bilimlerde bir çok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan biriside zaman skalasında dinamik denklemlerdir.

Zaman skalasını basit bir şekilde ifade edecek olursak reel sayıların boş olmayan keyfi bir kapalı altkümesidir. Zaman skalasına reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar negatif olmayan tamsayılar, $[0,2]\cup[4,7]$ kapalı aralıkların birleşimi ve $[0,1]\cup\mathbb{N}$ kümesi örnek olarak verilebilir. Rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve $(0,1)$ açık aralığı ise zaman skalası olmayan kümelerdir. Ayrıntılı bilgi için kitaplara bakılabilir, Bohner, M. ve Peterson, A. [3-4].

Son zamanlarda yapılan birçok araştırmalar göstermiştir ki bu konu uygulama alanlarında büyük bir potansiyele sahiptir. Örneğin; Bir canlı türüne ait olan popülasyonu modelleyebiliriz. Bu türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Bu durumda örtüşmeyen bir popülasyon ortaya çıkar. Bu bize kapalı aralıkların birleşimini verir ki bu zaman skalasıdır.

Zaman skalası teorisi dinamik denklemlere Agarwal R. P. etc, [1-2] ,], L. Erbe etc.[7-8] , Guseinov,G.Sh., Kaymakçalan, B. [10] vd. tarafından ilk olarak aktarıldı. Bu yazarlar zaman skalasında dinamik denklemlerin salınım özellikleri ilgili ilk çalışmaları verdiler. İleriki yıllarda Saker, S.H. [19], Şahiner, Y. [18] ve [Şenel, M.T. [20,22,24,25,27-31] 2. ve 3. mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Zaman skalası Z tamsayıları da kapsadığından fark denklemlere bağlı kalmadan yeni zaman skalaları tanımlayarak birçok fiziksel ve biyolojik olay modellenebilir ve bu modeller üzerinde daha hassas çalışmalar yapılabilir.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, Dinamik denklem, Kararlılık, Tümör.

ABSTRACT

The theory of time scales, which has recently received a lot of attention, was introduced by Stefan Hilger in his PhD thesis in 1988 in order to unify continous and discrete analysis. This new idea presents itself in many areas of applied science.The dynamic equations on time scales are in one of these fields.

A time scale T is an arbitrary nonempty closed subset of the real numbers R. Time scale to real numbers, integers, natural numbers non-negative integers, $[0,2]\cup[4,7]$ of a set of closed intervals and $[0,1]\cup\mathbb{N}$ given as examples. Rational numbers, irrational numbers, complex numbers and the open intervals of time scale are not sets. For more information about time scales, refer to the book Bohner, M. ve Peterson, A. [3-4].

Recently, many studies have shown that has a great potential in the subject application. For exmaple, we can model the population belonging to a species. This species survival time to get a unit. You also get eggs just before they die and get out of the offspring of such eggs after two units of time. This case occurs in a non-overlapping populations. This gives us a combination of closed intervals. This is the time scale.

The theory of dynamic equations on time scales work started with Agarwal R. P. etc, [1-2] ,], L. Erbe etc. [7-8] , Guseinov,G.Sh., Kaymakçalan, B. [10] et al. These authors give the first study of dynamic equations related oscillation properties on time scales . In the following years Saker, S. H. [19] Sahin, Y. [18] and Senel, M. T. [20,22,24,25,27-31] have studied the behavior of solutions of 2nd and 3rd order dynamic equation.

These difficulties have been eliminated due to dynamic equations work on time scales. Thus the mathematicians are saved to prove the same theorems for both differential equations and difference equations.

The works are progressing at great speed on the time scale and and basic definitions and theorems of the analysis are given in the time scale. These definitions and theorems on time scales are discussed new theories and new articles are given in literature.Integer numbers Z is covered by time scales. Thus many physical and biological problems can be modeling without depending on difference equations with defining new time scales. And one can be made more sensitive studies on these models.

Keywords: Time scales, Dynamic equation, Stability, Tumor

1.GİRİŞ

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in [11] doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atılmıştır. Bu yeni fikir uygulamalı bilimlerde bir çok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan biriside zaman skalasında dinamik denklemlerdir.

Son zamanlarda yapılan birçok araştırmalar göstermiştir ki bu konu uygulama alanlarında büyük bir potansiyele sahiptir. Örneğin; Bir canlı türüne ait olan popülasyonu modelleyebiliriz. Bu türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Bu durumda örtüşmeyen bir popülasyon ortaya çıkar. Bu bize kapalı aralıkların birleşimini verir ki bu zaman skalasıdır.

Zaman skalası teorisi dinamik denklemlere Agarwal R. P. etc, [1-2] ,], L. Erbe etc.[7-8] , Guseinov,G.Sh., Kaymakçalan, B. [10] vd. tarafından ilk olarak aktarıldı. Bu yazarlar zaman skalasında dinamik denklemlerin salınım özellikleri ilgili ilk çalışmaları verdiler. İleriki yıllarda Saker, S.H. [19], Şahiner, Y. [18] ve [Şenel, M.T. [20,22,24,25,27-31] 2. ve 3. mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Zaman skalası Z tamsayıları da kapsadığından fark denklemlere bağlı kalmadan yeni zaman skalaları tanımlayarak birçok fiziksel ve biyolojik olay modellenebilir ve bu modeller üzerinde daha hassas çalışmalar yapılabilir.

Bağışıklık biliminde kanser hücrelerinin büyümesi ile ilgili teorik çalışmaların uzun bir geçmişi vardır. Bu çalışmalar, bağışıklık etkisi altında kanser hücrelerinin büyüme davranışı hem de tedavi etkisi ile ilgilidir. İlginç bir tedavi yaklaşımı ise kanserle mücadele için, bağışıklık sisteminin doğal yeteneğini güçlendirmektir. Bağışıklık sistemi effector hücrelerden ibarettir ki onlar T lenfosit, macrofaj ve doğal katil hücreler gibi tümörlere karşı bağışıklık tepkisi verirler. T lemfosit iki alt gruba kategorize edilebilir, yani, sitotoksik T lenfositler (CTLs) ve T-yardımcı hücreler(durağan). CTLs enfekte olmuş hücrelere ve tümör hücrelerini ortadan kaldırmak için bağışıklık sisteminin önemli bir efektör hücreleridir. Durağan hücreler CTLs gibi doğrudan tümör hücrelerini öldürmez onun yerine sitokinler salgılayarak CLSs yardımcı olurlar.

Yukarıdaki biyolojik senaryoyu göz önüne alarak bir çok yazar bağışıklık sistemi ve tümör büyümesi arasindaki etkileşimi inceleyen Lotka–Volterra modeline benzer modelleri fark denklemleri kullanarak tanımladılar [6,15,16,41].

Tümör büyümesi modellemeleri üzerindeki çalışmalar fark denklemleri kullanılarak yapılmaktadır. Bilindiği üzere fark denklemi Z tamsayılar kümesi üzerine tanımlıdır ve zaman aralığı olarak 1(bir) birim alınmaktadır. Ancak zaman skalasın da zaman aralığı istenildiği gibi

değiştirilebilir çünkü; hZ , h>0, h$\in$R, bir zaman skalası olduğundan sürekli herhangi bir zaman aralığı istenildiği uzunlukta seçilebilir.

Bu proje çalışmasında diğer yurt içi üniversitelerde zaman skalasında ve fark denklemlerde çalışan öğretim üyelerinin yanına gidilerek bilgi ve tecrübelerinden faydalanılacaktı, ayrıca yurt dışında yabancı araştırmacılarla ve bölümündeki diğer arkadaşlarla fikir alışverişinde bulunulması amaçlanmış ancak proje bütçesinde yapılan kesinti buna imkan vermemiştir. Bu nedenle zaman skalasında dinamik sistem teorisi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bu projenin daha uzun soluklu ve bütçeye ve zamana ihtiyacı vardır. Daha sonra hazırlanacak geniş katılımlı bir proje ile proje devam ettirilmesi amaçlanmaktadır.

1.1. Amaç ve Kapsam

Günümüzde bir çok fiziksel ve biyolojik olayların diferensiyel denklem modelleri oluşturulmaktadır. Bu modellere üzerinde yapılan çalışmalarda diferensiyel denklemlerin elementer fonksiyonlar cinsinden çözümlerinin bulunmasının zor bazen de imkansız olduğu durumlarda diferensiyel denklemeler fark denklemlerine dönüştürülerek yaklaşık çözümler elde edilmektedir. Bu dönüştürme işlemlerinde tamsayılar kümesi kullanılmakta yani fark denklemlerinde çalışmaktadır. Böylece kesikli zaman aralığı kullanılmakta ve aralık boyu 1 (bir) birim kabul edilmektedir. Bu kabul sonucunda elbetteki baştan belli hataları kabul etmek anlamına gelecektir. Peki kesikli aralık neden 1(bir) birim olmak zorunda ? 0.5 , 0.4, 0.3 veya n.h (n doğal sayı, h>0 reel) şeklinde olamaz mı? Elbette olabilir. Ama mevcut teori buna izin vermez çünkü tamsayılar 1 birim aralıklıdır.
Bu proje çalışmasında diğer yurt içi üniversitelerde zaman skalasında ve fark denklemlerde çalışan öğretim üyelerinin yanına gidilerek bilgi ve tecrübelerinden faydalanılacaktı, ayrıca yurt dışında yabancı araştırmacılarla ve bölümündeki diğer arkadaşlarla fikir alışverişinde bulunulacaktı ancak proje bütçesinde yapılan kesinti buna imkan vermemiştir. Bu nedenle zaman skalasında dinamik sistem teorisi üzerinde çalışmalar yapılmış. Daha geniş bir bütçeli bir proje ile zaman skalasında tümör büyümesi incelemesi amaçlanmıştır.

Zaman skalasında ileri ve geri sıçrama operatörleri;

T bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : T \to T$

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T : s > t\}, \text{ tüm } t \in T ,$$

Ve geri sıçrama operatörü $\rho : T \to T$

$$\sigma(t) := \sup\{s \in T \ : s < t\}, \text{ tüm } t \in T$$

ve

sıçrama fonksiyonu $\mu : T \to [0, \infty]$

$$\mu = \sigma(t) - t$$

seklinde tanımlanır.

Örneğin; Zaman skalasını R alırsak

$$\sigma(\mathrm{t}) := \inf\{\mathrm{s} \in \mathrm{R} : \mathrm{s} > \mathrm{t}\} = (\mathrm{t}, \infty) = \mathrm{t}\ , \quad \mu = \sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{t} = 0$$

T = Z alınırsa

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T \ : s > t\} = \{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1, \ \mu = \sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{t} = 1$$

$\mathrm{T} = \{1/n : n \in \mathrm{N}\}$ alırsak, herhangi bir $t \in \mathrm{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathrm{T} : s > t\} = \inf\{\frac{1}{t-1}, \frac{1}{t-2}, \frac{1}{t-3}, ..., 1\} = \frac{1}{t-1}$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathrm{T} : s < t\} = \sup\{0, ..., \frac{1}{t+3}, \frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+1}\} = \frac{1}{t+1}$$

$$\mu(t) = \frac{1}{t-1} - t = \frac{1 - t^2 + t}{t-1}.$$

$T = \{nh : n \in N, h > 0\}$ alırsak ,

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T \ : s > t\} = \{t+h, t+2h, ...\} = t+h$$

$$\mu = \sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{t} = \mathrm{h}$$

olacaktır. Görüldüğü gibi zaman skalasında kesikli aralık boyları 1(bir) olmak zorunda değildir. Zaman skalasının bu özelliğini kullanarak Z dışında yani fark denklemi dışında yeni modeller oluşturulabilir.

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in [11] 1988'deki doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya çıkmış daha sonra bu kavram dinamik denklemlere Agarwal R. P. etc, [1-2] ,], L. Erbe etc.[7-8] , Guseinov,G.Sh., Kaymakçalan, B. [10] vd. tarafından ilk olarak aktarıldı. Bu yazarlar zaman skalasında dinamik denklemlerin salınım özellikleri ilgili ilk çalışmaları verdiler. İleriki yıllarda Saker, S.H. [19], Şahiner, Y. [18] ve [Şenel, M.T. [20,22,24,25,27-31] 2. ve 3. mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelediler. Ayrıntılı bilgi için kitaplara bakılabilir, Bohner, M. ve Peterson, A. [3-4].

Bu incelemeler dinamik denklemlerin salınımlı özellikleri ve asimptotik özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalardı.

Zaman skalasında dinamik denklem modellemeleri ise yeni yeni verilmeye başlanmış olmakla beraber literatürde bu konu ile çalışmalar henüz çok azdır. Örneğin;

Zhuang, K [36,38] zaman skalasında ilk olarak ekolojik modelleme ve besin zinciri yapılarını incelemiştir.
Wang, Y. L., Ai, L. [37] zaman skalasında örümcek ağı modellemesini üzerinde çalışma yapmıştır.

Daha sonra bir biyolojik popilasyon modeleme çalışması Eggensperger, M. [9] tarafından çalışılmıştır.

Ve yine Zhuang, K., Wen, Z. [39] gecikmeli nüfus modellemesininin periyodik çözümlerini zaman skalasında incelemişlerdir.
Bohner, M., Gelles, G., Heim, J. [5] , Li, Y., Yang, L., Zhang, H. [13] zaman skalasında modelleme çalışmaları yapmışlardır.
Çoğu kanser, bir sağlıklı hücrenin hasara uğraması ile başlar, bunu zaman içinde biriken başka hasarlar izler. Bu, sigara dumanındaki 69 kanserojenden, iyonize radyasyona, teknolojide kullanılan 80 binin üzerindeki güncel kimyasaldan birine ya da arsenik gibi bir doğal kanserojene maruz kalma olabilir.
Bu yabancı maddelerden birisi normal bir vücut hücresine girdiği ve onu değişime uğrattığında, bu vücut hücresinin kanser hücresine dönüşme riski vardır. Eğer bu değişim olursa bu kanser hücrelerinin bir kaç yıl içinde milyonlarca kanser hücresi oluşturma riski vardır. Birkaç milyon kanser hücresi (vücudumuzda trilyonlarca hücre vardır), tespit edilip tedavi edilmezse, türüne göre ölüme yol açabilir. Hasarlar, üremeyi idare eden DNA dizilerine zarar vererek genlerin düzeninin bozulmasına, doğal tamir mekanizmalarının başarısız olmasına ve kanser öz hücrelerin kontrol dışı artışına yol açabilir. Bazı yabancı maddeler aynı zamanda bağışıklık

sistemini de hasara uğratarak savunma mekanizmasını zayıflatabilir.

Kanserde yaygın olarak kullanılan tedavi yöntemleri cerrahi, radyoterapi ve kemoterapidir. Daha az sıklıkla hormon tedavileri, biyolojik tedavi yöntemleri ve hedefe yönelik tedaviler kullanılır. Bu tedavi yöntemleri tek başına veya birlikte uygulanmaktadır.

Bu tedaviler sırasında uygulanan yöntem, ilaç vs. dozu çok önemlidir. Çünkü tedavi doz aşımıda sağlık açısından önemli sorunlar oluşturmaktadır.

Tümör hücresi hangi şartlarda büyümesi durdurulabilir ? Ve geriletilebilir. Yani vücudun bağışıklık sistemi bunun için yeterli mi? Yoksa dışarıdan uygulanacak tedavi dozu ne kadar olmalıdır? Bunun bir denge noktası vardır mıdır?

Bu denge noktası nasıl bulunabilir ? İşte bu noktada kararlılık teorisi devreye girmektedir. Tümör büyümesini dinamik denklem modellemesi yapıldığı taktirde bütün bu sorulara cevap bulunabilir. Büyümenin hangi noktalarda ve dış etkenlerde durdurabileneceği bir denge noktası bulunabilir.

Bizim bu projede yapmak istediğimiz asıl modelleme ise zaman skalasında tümör büyüme modellemesi yapmaktı. Ancak proje bütçesinde yapılan kesinti buna imkan vermemiştir. Bu nedenle zaman skalasında dinamik sistem teorisi üzerinde çalışmalar yapılmış. Daha geniş bir bütçeli bir proje ile zaman skalasında tümör büyümesi incelemesi amaçlanmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in [11] 1988'deki doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya çıkmış daha sonra bu kavram dinamik denklemlere Agarwal R. P. etc, [1-2] ,], L. Erbe etc.[7-8] , Guseinov,G.Sh., Kaymakçalan, B. [10] vd. tarafından ilk olarak aktarıldı. Bu yazarlar zaman skalasında dinamik denklemlerin salınım özellikleri ilgili ilk çalışmaları verdiler. İleriki yıllarda Saker, S.H. [19], Şahiner, Y. [18] ve [Şenel, M.T. [20,22,24,25,27-31] 2. ve 3. mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelediler. Ayrıntılı bilgi için kitaplara bakılabilir, Bohner, M. ve Peterson, A. [3-4].

Bağışıklık biliminde kanser hücrelerinin büyümesi ile ilgili teorik çalışmaların uzun bir geçmişi vardır. Bu çalışmalar, bağışıklık etkisi altında kanser büyüme davranışı hem de tedavi etkisi ile ilgilidir. İlginç bir tedavi yaklaşımı ise kanserle mücadele için, bağışıklık sisteminin doğal yeteneğini güçlendirmektir. Bağışıklık sistemi effector hücrelerden ibarettir ki onlar T lenfosit, macrofaj ve doğal katil hücreler gibi tümörlere karşı bağışıklık tepkisi verirler. T lemfosit iki alt gruba kategorize edilebilir, yani, sitotoksik T lenfositler (CTLs) ve T-yardımcı hücreler(durağan). CTLs enfekte olmuş hücrelere ve tümör hücrelerini ortadan kaldırmak için bağışıklık sisteminin önemli bir efektör hücreleridir. Durağan hücreler CTLs gibi doğrudan tümör hücrelerini öldürmez onun yerine sitokinler salgılayarak CLSs yardımcı olurlar. Literatürde tümör büyümesi ve bağışıklık sistemi ve tümör hücreleri arasındaki mücadeyi inceleyen fark denklemler kullanılarak yapılan bazı çalışmalar Öztürk, I.; Bozkurt, F.; Gurcan, F.[15] , Bozkurt, F.[6] ve Özturk, I.; Bozkurt, F. [16], Gurcan F.; Kartal, S.; etc.[41] verilebilir.

Yukarıdaki çalışmalara baktığımızda zaman skalasında yapılan modellemelerin çok az olduğu ve yeni yeni verilmeye başlandığı anlaşılmaktadır. Bu modelleme de büyük bir eksiklik olduğu ortadadır. Özellikle son yıllarda kanser dünyada hızla yayılmakta insanlar için önemli bir sağlik sorunu haline gelmiştir. Devletler kanser tedavisi için önemli harcamalar yapmakta ama bu harcamalara ve çabalara rağmen insan ölüm oranı bu hastalıkta çok yüksektir. Bu nedenle tümör üzerinde yapılacak çalışmalar büyük bir önem kazanmaktadır.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu proje çalışmasında yöntem olarak teorik çalışma uygulanmıştır. Diğer yurt içi üniversitelerde zaman skalasında ve fark denklemlerde çalışan öğretim üyelerinin yanına gidilerek bilgi ve tecrübelerinden faydalanılacaktı, ayrıca yurt dışında yabancı araştırmacılarla ve bölümündeki diğer arkadaşlarla fikir alışverişinde bulunulacaktı ancak proje bütçesinde yapılan kesinti buna imkan vermemiştir. Bu nedenle zaman skalasında dinamik sistem teorisi üzerinde çalışmalar yapılmış. Daha geniş bir bütçeli bir proje ile zaman skalasında tümör büyümesi incelemesi amaçlanmıştır.

Eğer Z tamsayılar olarak alırsak yukarıda anlatılan denklemleri elde ederiz. Böylece ayrık zaman aralıkları bir birim olmak yerine birden daha büyük veya küçük olacaktır. Bu ise bir birim ayrık zaman aralığına göre daha gerçekçi olacaktır.

Zaman skalası reel sayıların kapalı alt aralıklarıdır. R, Z, N, [0,1] , [0,1] U [2,3] vs. zaman skalasına örneklerdir. Zaman skalası T ile gösterilir. Zaman skalasının anlaşılır olması için aşağıdaki tanımlar verelim. Ayrıntılı bilgi için kitaplara bakılabilir, Bohner, M. ve Peterson, A [3-4].

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : T \to T$

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T : s > t\}, \text{ tüm } t \in T ,$$

Ve geri sıçrama operatörü $\rho : T \to T$

$$\sigma(t) := \sup\{s \in T : s < t\}, \text{ tüm } t \in T$$

ve

sıçrama fonksiyonu $\mu : T \to [0, \infty]$

$$\mu = \sigma(t) - t$$

seklinde tanımlanır.

Örneğin; Zaman skalasını R alırsak

$$\sigma(t) := \inf\{s \in R : s > t\} = (t, \infty) = t , \quad \mu = \sigma(t) - t = 0$$

T = Z alınırsa

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T : s > t\} = \{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1, \ \mu = \sigma(t) - t = 1$$

$\mathrm{T} = \{1/n : n \in \mathrm{N}\}$ alırsak, herhangi bir $t \in \mathrm{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathrm{T} : s > t\} = \inf\{\frac{1}{t-1}, \frac{1}{t-2}, \frac{1}{t-3}, ..., 1\} = \frac{1}{t-1}$$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathrm{T} : s < t\} = \sup\{0, ..., \frac{1}{t+3}, \frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+1}\} = \frac{1}{t+1}$$

$$\mu(t) = \frac{1}{t-1} - t = \frac{1-t^2+t}{t-1}.$$

$T = \{nh : n \in N, h > 0\}$ alırsak ,

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T : s > t\} = \{t+h, t+2h, ...\} = t+h$$

$$\mu = \sigma(t) - t = h$$

Bu projede yöntem olarak

Zaman skalası Z(tamsayılar) yerine zaman skalası $T = \{nh : n \in N, h > 0\}$

$$\sigma(t) := \inf\{s \in T : s > t\} = \{t+h, t+2h, ...\} = t+h$$

$$\mu = \sigma(t) - t = h$$

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1 (Türev) $f : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathrm{T}^{\kappa}$ olsun. Herhangi bir pozitif $\in$ sayısı için t'nin bir U komşuluğunda her $s \in U$ için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \right| \leq \in |\sigma(t) - s|$$

şartını sağlayan $f^{\Delta}(t)$ sayısına f fonksiyonun t noktasındaki delta türevi denir. Ayrıca her $t \in \mathrm{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa f fonksiyonuna delta türevlenebilir denir. $f^{\Delta} : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ fonksiyonuna ise f fonksiyonunun T^{κ} üzerindeki delta türevi denir.

Örnek 3.2. (i) $f : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathrm{T}$ için $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit sayı olmak üzere $f(t) = \alpha$ şeklinde tanımlansın. O zaman $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ olur. Çünkü herhangi bir pozitif $\in$ sayısı için,

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-0.\left[\sigma(t)-s\right]\right|=|\alpha-\alpha|=0\leq\in|\sigma(t)-s|$$

şartı her $s\in\mathrm{T}$ için sağlanır.

(ii) $f:\mathrm{T}\to\mathrm{R}$ fonksiyonu her $t\in\mathrm{T}$ için $f(t)=t$ şeklinde tanımlansın. O zaman $f^{\Delta}(t)\equiv 1$ olur. Çünkü herhangi bir pozitif $\in$ sayısı için,

$$\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]-1.\left[\sigma(t)-s\right]\right|=|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)|=0\leq\in|\sigma(t)-s|$$

şartı her $s\in\mathrm{T}$ için sağlanır.

Teorem 3.3 $f:\mathrm{T}\to\mathrm{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathrm{T}^{\kappa}$ olsun. O zaman ;

(i) *f, t* noktasında türevlenebilir ise o zaman *f, t* noktasında süreklidir.

(ii) *f, t* noktasında sürekli ve *t* noktası sağa dağılmış ise o zaman *f, t* noktasında türevlenebilirdir ve bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

(iii) *t* noktası sağ yoğun ise o zaman *f, t* noktasında türevlenebilirdir ancak ve ancak

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limiti mevcuttur. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

iv) *f* , *t* noktasında türevlenebilir ise o zaman

$$f(\sigma(t))=f(t)+f^{\Delta}(t)\mu(t)$$

(iv) f fonksiyonu *t* noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $\sigma(t)=t$ ise o zaman $\mu(t)=0$ olur. O halde

$$f(\sigma(t))=f(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Örnek 3.4 $\mathrm{T}=\mathrm{R}$ ve $\mathrm{T}=\mathrm{Z}$ için $f^{\Delta}(t)$ türevini inceleyelim:

(i) $\mathrm{T}=\mathrm{R}$ ve $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ $t\in\mathrm{R}$ noktasında delta türevlenebilir olsun.

$\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti mevcutsa *f'* in t noktasında türevlenebilir olduğunu ve bu limitin $f'(t)$ ile gösterildiğini türevin tanımından biliyoruz. O halde Teorem 3.3 (iii) şıkkından

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)$$

elde edilir. Böylece $\mathrm{T}=\mathrm{R}$ ise $f^{\Delta}(t)=f'(t)$ olur.

(ii) $\mathrm{T}=\mathrm{Z}$ ve $f:\mathrm{Z}\to\mathrm{R}$, $t\in\mathrm{Z}$ noktasında delta türevlenebilir olsun. O zaman

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

elde edilir ki bu bilinen ileri fark operatöründen başkası değildir.

Teorem 3.5 $f,g:\mathrm{T}\to\mathrm{R}$ fonksiyonları $t\in\mathrm{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsun. O zaman

(i) $f+g:\mathrm{T}\to\mathrm{R}$ $t\in\mathrm{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f+g\right)^{\Delta}\left(t\right)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

(ii) Herhangi bir α sabiti için,

$$\left(\alpha f\right)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

(iii) $fg:\mathrm{T}\to\mathrm{R}$, t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(fg\right)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

(iv) $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise $\dfrac{1}{f}$, *t* noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

(v) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ t noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

Teorem 3.6 α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

(i) f fonksiyonu $f(t) = (t-\alpha)^m$ şeklinde tanımlansın. O zaman

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v} \left(t-\alpha\right)^{m-1-v}$$

(ii) g fonksiyonu $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\left(t-\alpha\right)\left(\sigma(t)-\alpha\right) \neq 0$ olmak üzere

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m-v} \left(t-\alpha\right)^{v+1}}$$

İspat: (i) Bu formulü tümevarım yöntemiyle ispat edelim. Eğer $m=1$ ise o zaman $f(t) = t-\alpha$ olur. Örnek 3.2. (i) ve (ii)'den $f^{\Delta}(t) = 1$ buluruz. Şimdi kabul edelim ki $f(t) = (t-\alpha)^m$ için

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} \left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v} \left(t-\alpha\right)^{m-1-v}$$

sağlansın. $F(t) = (t-\alpha)^{m+1} = (t-\alpha)f(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Teorem 3.4 (iii)'deki çarpım kuralını kullanırsak

$$F^{\Delta}(t) = f(\sigma(t)) + \left(t-\alpha\right) f^{\Delta}(t)$$

$$= \left(\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m} + \left(t-\alpha\right) \sum_{v=0}^{m-1} \left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v} \left(t-\alpha\right)^{m-1-v} \right)$$

$$=\left(\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m}+\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-v}\right),$$

$$=\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-v}$$

Böylece tümevarım yönteminden istenen sonuç elde edilir.

(ii) $g(t)=\dfrac{1}{(t-\alpha)^{m}}=\dfrac{1}{f(t)}$ için Teorem 3.5 (iv) 'ü uygularsak $\left(t-\alpha\right)\left(\sigma(t)-\alpha\right)\neq 0$ olmak üzere

$$g^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f^{\sigma}(t)}$$

$$=-\frac{\sum_{v=0}^{m-1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{v}\left(t-\alpha\right)^{m-1-v}}{\left(t-\alpha\right)^{m}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m}}$$

$$=-\sum_{v=0}^{m-1}\frac{1}{\left(t-\alpha\right)^{v+1}\left(\sigma(t)-\alpha\right)^{m-v}}$$

Örnek 3.7 **(i)** t^{2} ' nin türevini bulalım.

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{1}\sigma(t)^{v}.t^{1-v}=t+\sigma(t)$$

(ii) $\left(t-1\right)^{3}$ ' nin türevini bulalım.

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{2}(\sigma(t)-1)^{v}.\left(t-1\right)^{2-v}$$

$$=\left(t-1\right)^{2}+(\sigma(t)-1)\left(t-1\right)+(\sigma(t)-1)^{2}$$

(iii) $\dfrac{1}{t}$ 'nin türevi $-\dfrac{1}{t\sigma(t)}$ 'dir..

(iv) $\frac{1}{t^2}$ ' nin türevini bulalım.

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{v=0}^{1} \frac{1}{\sigma(t)^{2-v}\left(t\right)^{v+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sigma(t)^2 t + \sigma(t)t^2}$$

Tanım 3.8 (Yüksek mertebeden türevler) $f : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ bir fonksiyon olsun.

$f^{\Delta},\ \mathrm{T}^{\kappa^2} = \left(\mathrm{T}^{\kappa}\right)^{\kappa}$ üzerinde türevlenebilir olsun. O zaman $f^{\Delta\Delta} : \mathrm{T}^{\kappa^2} \to \mathrm{R}$ 'ya ikinci mertebeden delta türevi denir. Benzer şekilde n. mertebeden $f^{\Delta^n} : \mathrm{T}^{\kappa^n} \to \mathrm{R}$ delta türevleri de tanımlanabilir. Son olarak $t \in \mathrm{T}$ için $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ şeklinde tanımlansın. Benzer şekilde $n \in \mathrm{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlanabilir. Ayrıca

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t,\ f^{\Delta^0} = f \text{ ve } \mathrm{T}^{\kappa^0} = \mathrm{T}$$

Örnek 3.9 Genelde *f* ve g iki kez türevlenebilir olsalar bile *fg* iki kez türevlenebilir olmayabilir. *f* ve g iki kez türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir olsun.

$$\left(fg\right)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

olduğu bilindiğine göre

$$\left(fg\right)^{\Delta\Delta} = \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}g + \left(f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}\right)g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}$$

Burada $f^{\Delta^{\sigma}}$ yerine $f^{\Delta\sigma}$, $f^{\sigma^{\Delta}}$ yerine $f^{\sigma\Delta}$ ve $f^{\sigma^{\sigma}}$ yerine $f^{\sigma\sigma}$ kullanıldı. Bundan sonra da bu gösterimleri kullanacağız. n. mertebeden türev için ise Leibniz formülünü kullanacağız.

Teorem 3.10 $S_k^{(n)}$, *k* kez σ ve *n* - *k* kez Δ'yı içeren bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcutsa o zaman her $n \in \mathrm{N}$ için

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} \qquad (*)$$

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispat edelim. $n=1$ için Örnek 3.8' den (*) doğrudur. ($n=0$ için $\sum_{\Lambda \in \varnothing} f^{\Lambda} = f$ kabul edelim. Böylece $n=0$ için de (*) sağlanır.) Şimdi kabul edelim ki her $n \in \mathrm{N}$ için

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k}$$

sağlansın. O zaman delta türevinin çarpma ve toplama kurallarını kullanırsak

$$(fg)^{\Delta^{n+1}} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} \right\}^{\Delta}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right)^{\Delta} g^{\Delta^k} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} \right) g^{\Delta^k} + \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g^{\Delta^k}$$

$$= \left(\sum_{\Lambda \in S_n^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} \right) g^{\Delta^{n+1}} + \left(\sum_{\Lambda \in S_0^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Lambda\sigma} + \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda\Delta} \right) g^{\Delta^k}$$

$$=\left(\sum_{\Lambda\in S_{n+1}^{(n+1)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^{n+1}}+\left(\sum_{\Lambda\in S_{0}^{(n+1)}} f^{\Lambda}\right)g+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k}^{(n+1)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k}^{(n+1)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^{k}}$$

Böylece tümevarım yönteminden istenen sonuç elde edilir.

Örnek 3.11 (i) $\mathrm{T}=\mathrm{R}$ ise o zaman her $\Lambda\in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda}=f^{(n-k)}$ olur. Burada $f^{(n)}$, f fonksiyonunun n. mertebeden türevini göstermektedir.

$$\left|S_k^{(n)}\right|=\binom{n}{k}$$

olduğundan

$$\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}=\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{(n-k)}=f^{(n-k)}\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} 1=\binom{n}{k}f^{(n-k)}$$

Böylece

$$(fg)^{\Delta^n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

elde edilir ki bu analizdeki Leibniz formülüdür.

(ii) $\mathrm{T}=\mathrm{Z}$ ise o zaman her $\Lambda\in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda}=\Delta^{n-k}f$ olur. Burada $\Delta^n f$, f fonksiyonunun n. mertebeden fark operatörünü göstermektedir.

$$\left|S_k^{(n)}\right|=\binom{n}{k}$$

olduğundan

$$\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}=\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} \Delta^{n-k}f=\Delta^{n-k}f\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} 1=\binom{n}{k}\Delta^{n-k}f$$

elde edilir. Böylece

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k} f(t+k)\Delta^k g(t)$$

olur ki bu fark denklemlerdeki Leibniz formülüdür.

Örnek 3.12 $h>0$ ve $\mathrm{T} = h\mathrm{Z} = \{hk : k \in \mathrm{Z}\}$ olsun. $t \in \mathrm{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathrm{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in N\} = t + h$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathrm{T} : s < t\} = \sup\{t - nh : n \in N\} = t - h$$

Böylece her $t \in \mathrm{T}$ noktası izole edilmiş noktadır ve her $t \in \mathrm{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$$

olur. Yani $\mu(t)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Ayrıca $f : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \ \forall t \in \mathrm{T}$$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{f(t+2h) - f(t+h)}{h} - \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}}{h}$$

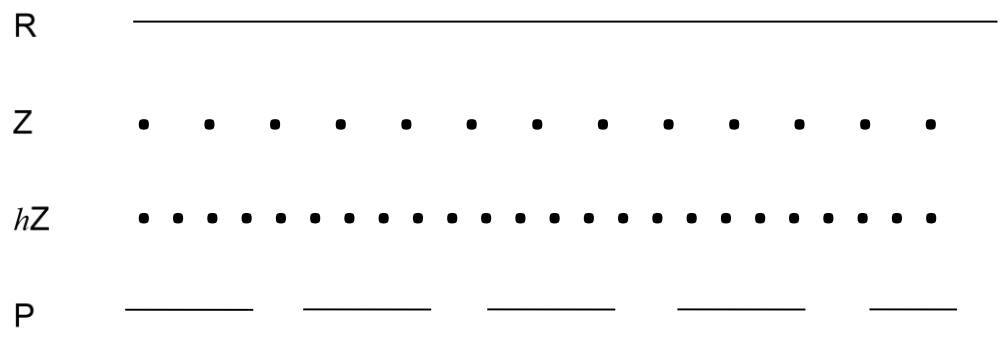
$$= \frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t)}{h^2}$$

Benzer şekilde $f^{\Delta^n}(t)$' yi hesaplamak çok uzun bir yöntem olur. Başka bir yaklaşımla bu fonksiyonu hesaplayalım. İlk önce dikkat edilirse

$$\sigma^n(t) = t + nh \text{ ve } \rho^n(t) = t - nh, \ \forall n \in \mathrm{N}_0$$

olduğu hemen görülür.

Bazı zaman skalası örnekleri:



Şimdi bir Δ_h operatörü, I birim operatör olmak üzere

$$\Delta_h = \frac{1}{h}(\sigma - I)$$

şeklinde tanımlansın. Binom teoreminden

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

olduğunu biliyoruz. Δ_h operatörünün n.kuvvetini bulmak için bu teoremi kullanırsak

$$\Delta_h^n = \frac{1}{h^n}(\sigma - I) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k (-I)^{n-k}$$

elde edilir. Bu operatöre *f* fonksiyonunu uygulayalım.

$$f^{\Delta^n}(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(t+kh)$$

elde edilir ki bu *f* fonksiyonunun n. mertebeden delta türevidir.

4. BULGULAR

4.1 Zaman Skalasında Dinamik Sistem Oluşturulması

Bu bölümde $T = \mathbb{T}$ alınacaktır.

Tanım 1. Birinci mertebeden

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) \tag{4.1}$$

lineer dinamik denklemi eğer $p \in \Re$ ise regresif olarak adlandırılır.

Teorem 2. Kabul edelim ki (4.1) regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in R$ olsun. Bu takdirde

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.2}$$

Başlangıç değer probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(t) = e_p(t, t_0)y_0$$

dir.

Tanım 3. Eğer $p \in \Re$ ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-sürekli ise bu takdirde

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t) \tag{4.3}$$

dinamik denklemi regresif dir.

Teorem 4. Kabul edelim ki (4.3) regresif, $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $x_0 \in R$ olsun.

$$x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.4}$$

ve

$$y^{\Delta}(t) = -p(t)y(t) + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.5}$$

başlangıç değer problemlerinin bir tek çözümü vardır ve bu çözümler

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau$$

ve

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau.$$

dir.

İspat . (4.4) denkleminin her iki tarafını $e_p(t, t_0)$ ile çarpıp düzenlersek

$$\begin{aligned} [e_p(t, t_0)x]^{\Delta}(t) &= e_p(t, t_0)x^{\Delta}(t) + p(t)e_p(t, t_0)x^{\sigma}(t) \\ &= e_p(t, t_0)[x^{\Delta}(t) + p(t)x^{\sigma}(t)] \\ &= e_p(t, t_0)f(t) \end{aligned}$$

elde ederiz ve her iki tarafı t_0 dan *t* ye integre edersek

$$e_p(t, t_0)x(t) - e_p(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau) \Delta\tau.$$

Buradan

$$e_p(t, t_0)x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(\tau, t_0) f(\tau) \Delta\tau.$$

buluruz. Bu denklemi x-e göre çözersek

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{e_p(\tau, t_0)}{e_p(t, t_0)} f(\tau) \Delta\tau$$

elde ederiz. $e_p(t, \tau) e_p(\tau, t_0) = e_p(t, t_0)$ olduğundan *x(t)* aşağıdaki şekillerde yazılabilir

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau) \Delta\tau$$

yada

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, t_0)[x_0 + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t_0, \tau) f(\tau) \Delta\tau].$$

x(t) nin tekliği Teorem 2.74 [3] den görülür. İkinci ispat benzer olduğundan ihmal edilmiştir.

Şimdi $\mathbb{T}$ üzerinde diferensiyellenebilen bir

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

matrisini göz önüne alalım. A matrisinin diferensiyeli

$$A^{\Delta} = (a_{ij}^{\Delta})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$$

olsun.

Teorem 5. Eğer $t \in \mathbb{T}^k$ de diferensiyellenebiliniyorsa, bu takdirde

$$A^{\sigma}(t) = A(t) + \mu(t)A^{\Delta}(t)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} A^{\sigma} &= (a_{ij}^{\sigma}) \\ &= (a_{ij} + \mu a_{ij}^{\Delta}) \\ &= A + \mu A^{\Delta} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 6. Kabul edelim ki A ve B diferensiyellenebilir nxn matrix-değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

i) $(A+B)^{\Delta} = A^{\Delta} + B^{\Delta}$;

ii) $(\alpha A)^{\Delta} = \alpha A^{\Delta}$

iii) $(AB)^{\Delta} = A^{\Delta}B^{\sigma} + AB^{\Delta} = A^{\sigma}B^{\Delta} + A^{\Delta}B$;

iv) $(A^{-1})^{\Delta} = -(A^{\sigma})^{-1}A^{\Delta}A^{-1} = -A^{-1}A^{\Delta}(A^{\sigma})^{-1}$, AA^{σ} terslenebir;

v) $(AB^{-1})^{\Delta} = (A^{\Delta} - AB^{-1}B^{\Delta})(B^{\sigma})^{-1} = (A^{\Delta} - (AB^{-1})^{\sigma}B^{\Delta})B^{-1}$, BB^{σ} terslenebilir.

Tanım 7. A, n x n zaman skalasında matris değeri fonksiyon olsun. Eğer A nın her bir elemanı rd-sürekli ise A zaman skalasında rd-süreklidir. Zaman skalası üzerinde rd-sürekli m x n matris değerli fonksiyonlar

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{R}^{m\times n})$$

ile gösterilir.

n x 1 tipinde vektör-değerli sistem

$$y^{\Delta}(t) = A(t)y(t) + f(t) \tag{4.6}$$

regresifdir. Burada $A \in \Re$ ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-sürekli vektör değerli fonksiyondur.

Lemma 8. n x n tipinde matris-değerli A fonksiyonu regresiftir ancak ve ancak A(t) nin $\lambda_i(t)$ eigen değerleri $1 \le i \le n$ için regresifdir**.**

Tanım 9. Kabul edelim ki A ve B zaman skalasında n x n matris değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde her $t \in \mathbb{T}^k$ için $A \oplus B$

$$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t)$$

ile tanımlı, $\ominus A$**,**

$$(\ominus A)(t) = -[I + \mu(t)A(t)]^{-1}A(t) = -A(t)[I + \mu(t)A(t)]^{-1}$$

ile tanımlı, $A \ominus B$ ise

$$(A \ominus B)(t) = (A \oplus (\ominus B))(t)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 10. $(\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}), \oplus)$ bir gruptur.

Teoremden $A, B \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ ise $A \oplus B \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Şimdi A^* **,** *A* matrisinin conjugate transpozu olsun. Eğer $A \in R^{nxn}$ ise A^* =A^T dir.

Özellik 11. Kabul edelim ki A ve B kompleks değerler üzerinde regresif matris değerli fonksiyonlar olsunlar.

(i) A^* regresifdir.

(ii) $A^* \oplus B^* = (A \oplus B)^*$.

Şimdi genelleştirilmiş matris üstel fonksiyonu tanımlayalım. Matris değerli

$$Y^{\Delta}(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I_n \tag{4.7}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alalım burada I_n n x n tipinde özdeşlik matrisidir.

Tanım 12. (4.7) matris dinamik denklemin genel çözümü Temel Matris olarak tanımlanır ve $\Phi_A(t,t_0)$ ile gösterilir.

Φ_A bir dönüşüm matrisi aşağıdaki lemma ve teoremde e_A ile gösterilecektir.

Lemma 13. Eğer $A, B \in \Re$ zaman skalasında matris değerli fonksiyonlar ise bu takdirde

i $)\ \Phi_0(t,s) \equiv I$ ve $\Phi_A(t,t) \equiv I;$

ii $)\ \Phi_A(\sigma(t),s) = (I + \mu(t)A(t))\Phi_A(t,s);$

iii $)\ \Phi_A^{-1}(t,s) = \Phi^*_{\ominus A^*}(t,s);$

iv $)\ \Phi_A(t,s) = \Phi_A^{-1}(s,t) = \Phi^*_{\ominus A^*}(s,t);$

v $)\ \Phi_A(t,s)\Phi_A(s,r) = \Phi_A(t,r);$

vi $)\ \Phi_A(t,s)\Phi_B(t,s) = \Phi_{A\oplus B}(t,s);$

vii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve A sabit ise bu takdirde $\Phi_A(t,t_0) = e^{A(t,t_0)};$

viii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *h>0,* ve A sabit ise bu takdirde $\Phi_A(t,s) = (I + hA)^{\frac{t-t_0}{h}}$ dir.

Teorem 14. Eğer λ_0, ξ n x n tipindeki A matrisi için eigen çift iseler bu takdirde $x(t) = e_{\lambda_0}(t,t_0)\xi$, $\mathbb{T}$ üzerinde

$$x^{\Delta} = Ax, \qquad A \in \mathcal{R}$$

denkleminin çözümüdür.

Örnek 15.

$$x^{\Delta} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

vektör dinamik denklemi çözersek, katsayılar matrisinin eigen değerleri $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$ dir.

Bu denklemler tüm $t \in \mathbb{T}^k$, $1 - 4\mu(t) \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir zaman skalasında regresifdir. λ_1, λ_2 eigen değerlerine karşılık gelen eigen vektörler sırasıyla

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$x(t) = c_1 e_{-4}(t, t_0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e_{-1}(t, t_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 16. Eğer $x(t) = u(t) + iv(t)$ $\mathbb{T}$ üzerinde regresif $x^{\Delta} = A(t)x$ dinamik denklemin kompleks vektör değerli çözümü ise bu takdir de u ve v , $x^{\Delta} = A(t)x$ dinamik denklemin reel değerli çözümleridirler.

Şimdi n x 1 tipinde vektör değerli dinamik

$$y^{\Delta}(t) = A(t)y(t) + f(t), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{4.8}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

Teorem 17. $t_0 \in \mathbb{T}$ **ve** $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$. olsun. Bu takdirde regresif (4.8) başlangıç değer problemi bir tek $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm

$$y(t) = \Phi_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \tag{4.9}$$

şeklindedir.

Teorem 18. $A \in \Re$, $\mathbb{T}$ üzerinde n x n tipinde matris değerli bir fonksiyon olsun ve kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ rd-sürekli olsun. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu takdirde

$$x^{\Delta} = -A^{*}(t)x^{\sigma} + f(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.10}$$

başlangıç değer probleminin $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x(t) = \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{\ominus A^{*}}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau \tag{4.11}$$

şeklindedir.

İspat.

$$\begin{aligned} x^{\Delta} &= -A^{*}(t)x^{\sigma} + f(t) \\ &= -A^{*}(t)[x + \mu(t)x^{\Delta}] + f(t) \\ &= -A^{*}(t)x - \mu(t)A^{*}(t)x^{\Delta} + f(t) \end{aligned}$$

yani

$$[I + \mu(t)A^{*}(t)]x^{\Delta} = -A^{*}(t)x + f(t)$$

$$\begin{aligned} x^{\Delta} &= -[I + \mu(t)A^{*}(t)]^{-1}A^{*}(t)x + [I + \mu(t)A^{*}(t)]^{-1}f(t) \\ &= (\ominus A^{*}(t))x + [I + \mu(t)A^{*}(t)]^{-1}f(t). \end{aligned}$$

dir. (4.10) denkleminin çözümünü

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{\ominus A^{*}}(t, \sigma(\tau))[1 + \mu(\tau)A^{*}(\tau)]f(\tau)\Delta\tau \\ &= \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{A^{*}}(\sigma(\tau), t)[I + \mu(\tau)A^{*}(\tau)]^{-1}f(\tau)\Delta\tau \\ &= \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \{[I + \mu(\tau)A(\tau)]^{-1}\Phi_{A}(\sigma(\tau), t)\}^{*}f(\tau)\Delta\tau \\ &= \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \{\Phi_{A}(\tau, t)\}^{*}f(\tau)\Delta\tau \\ &= \Phi_{\ominus A^{*}}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_{\ominus A^{*}}(t, \tau)f(\tau)\Delta\tau. \end{aligned}$$

olarak buluruz.

4.2 Lyapunov Dönüşümü ve Karlılık

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4.12}$$

dinamik denklem sistemini göz önüne alalım.

Tanım 19. Bazı $\eta, \rho \in R^{+}$ sayıları ve $t \in \mathbb{T}$ için Lyapunov Dönüşümü

$$||L(t)|| \leq \rho \text{ ve } det\ L(t) \geq \eta$$

Şartını sağlayan terslenebilir $L(t) \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ matrisidir.

Lemma 20. Kabul edlim ki A(t) n x n tipinde her $t \in \mathbb{T}$ için tersi mevcut matris olsun.

i) Her t için $\|A^{-1}(t))\| \leq \alpha$ olacak şekilde $\alpha > 0$ sabiti varsa,

ii) Bütün $t \in \mathbb{T}$ için $|detA(t)| \geq \beta$ ve

$$\|A^{-1}(t)\| \leq \frac{\|A(t)\|^{n-1}}{|detA(t)|}$$

olacak şekilde β sabiti vardır.

Tanım 21. Zaman değişkenli lineer (4.12) dinamik denklemine düzgün kararlı denir eğer bir t_0 noktasındaki $x(t_0)$ çözümü için

$$\|x(t)\| \leq \gamma\|x(t_0)\|, \qquad t \geq t_0$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu $\gamma > 0$ sabiti varsa.

Teorem 22. Zaman değişkenli (4.12) dinamik denklemi düzgün üstel kararlıdır ancak ve yalnız $t, t_0 \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ için

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)$$

eşitsizliğini sağlayan Φ_A dönüşüm matrisi olacak şekilde $-\lambda \in \mathcal{R}^{+}, \lambda, \gamma > 0$ vardır.

Tanım 23. Lineer (4.12) denklemine düzgün asimptotik kararlıdır denir eğer denklem düzgün kararlı ve verilen herhangi $\delta > 0$ için bir $T > 0$ vardır öyleki t_0 *ve* $x(t_0)$ için karşılık gelen *x(t)* çözümü

$$\|x(t)\| \leq \delta \|x(t_0)\|, \qquad t \geq t_0 + T \tag{4.13}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 24. Kabul edelim ki $t \in \mathbb{T}, \|A(t)\| \leq \alpha$ olacak şekilde bir α sabiti olsun. Bu takdirde (4.12) dinamik denklemi düzgün üstel karalıdır ancak ve yalnız tüm $t, \tau \in \mathbb{T}$, $t \geq \sigma(\tau)$, için

$$\int_{\tau}^{t} \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \Delta s \leq \beta$$

olacak şekilde bir β sabiti vardır.

Teorem 25. (4.12) lineer dinamik denklemi düzgün üstel kararlıdır ancak ve yalnız düzgün asimptotik kararlıdır.

Teorem 26. (Düzgün kararlılığın korunması) Kabul edelim ki

$$z(t) = L^{-1}(t)x(t)$$

bir Lyapunov dönüşümü olsun. Bu takdirde (4.12) sistemi düzgün kararlıdır ancak ve yalnız

$$z^{\Delta}(t) = [L^{\sigma^{-1}} A(t) L(t) - L^{\sigma^{-1}} L^{\Delta}(t)] z(t), \quad z(t_0) = z_0$$

düzgün karalıdır.

Teorem 27. (Düzgün üstel kararlılığın korunması) Kabul edelim ki

$$z(t) = L^{-1}(t)x(t)$$

bir Lyapunov dönüşümü olsun. Bu takdirde (4.12) sistemi üstel düzgün kararlıdır ancak ve yalnız

$$z^{\Delta}(t) = [L^{\sigma^{-1}} A(t) L(t) - L^{\sigma^{-1}} L^{\Delta}(t)] z(t), \quad z(t_0) = z_0$$

düzgün üstel karalıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu proje zaman skalasında dinamik denklemler ve dinamik denklem sistem oluşturulması üzerinde duruldu.

Zaman skalası teorisi ilk kez Steven Hilger'in [11] doktora tezinde sürekli ortamdaki ve ayrık ortamdaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atılmıştır. Bu yeni fikir uygulamalı bilimlerde bir çok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan biriside zaman skalasında dinamik denklemlerdir.

Son zamanlarda yapılan birçok araştırmalar göstermiştir ki bu konu uygulama alanlarında büyük bir potansiyele sahiptir. Örneğin; Bir canlı türüne ait olan popülasyonu modelleyebiliriz. Bu türe ait yaşam süresi bir birim zaman olsun. Ayrıca bu tür ölmeden hemen önce yumurtlasın ve iki birim zaman sonra yavrular yumurtadan çıksın. Bu durumda örtüşmeyen bir popülasyon ortaya çıkar. Bu bize kapalı aralıkların birleşimini verir ki bu zaman skalasıdır.

Bağışıklık biliminde kanser hücrelerinin büyümesi ile ilgili teorik çalışmaların uzun bir geçmişi vardır. Bu çalışmalar, bağışıklık etkisi altında kanser büyüme davranışı hem de tedavi etkisi ile ilgilidir. İlginç bir tedavi yaklaşımı ise kanserle mücadele için, bağışıklık sisteminin doğal yeteneğini güçlendirmektir. Bağışıklık sistemi effector hücrelerden ibarettir ki onlar T lenfosit, macrofaj ve doğal katil hücreler gibi tümörlere karşı bağışıklık tepkisi verirler. T lemfosit iki alt gruba kategorize edilebilir, yani, sitotoksik T lenfositler (CTLs) ve T-yardımcı hücreler(durağan). CTLs enfekte olmuş hücrelere ve tümör hücrelerini ortadan kaldırmak için bağışıklık sisteminin önemli bir efektör hücreleridir. Durağan hücreler CTLs gibi doğrudan tümör hücrelerini öldürmez onun yerine sitokinler salgılayarak CLSs yardımcı olurlar. Literatürde tümör büyümesi ve bağışıklık sistemi ve tümör hücreleri arasındaki mücadeyi inceleyen fark denklemler kullanılarak yapılan bazı çalışmalar Öztürk, I.; Bozkurt, F.; Gurcan, F.[15] , Bozkurt, F.[6] ve Özturk, I.; Bozkurt, F. [16], Gurcan F.; Kartal, S.; etc.[41] verilebilir.

Yukarıdaki çalışmalara baktığımızda zaman skalasında yapılan modellemelerin çok az olduğu ve yeni yeni verilmeye başlandığı anlaşılmaktadır. Bu modelleme de büyük bir eksiklik olduğu ortadadır. Özellikle son yıllarda kanser dünyada hızla yayılmakta insanlar için önemli bir sağlık sorunu haline gelmiştir. Devletler kanser tedavisi için önemli harcamalar yapmakta ama bu harcamalara ve çabalara rağmen insan ölüm oranı bu hastalıkta çok yüksektir. Bu nedenle tümör üzerinde yapılacak çalışmalar büyük bir önem kazanmaktadır.

Tümör büyümesi modellemeleri üzerindeki çalışmalar fark denklemleri kullanılarak yapılmaktadır. Bilindiği üzere fark denklemi Z tamsayılar kümesi üzerine tanımlıdır ve zaman aralığı olarak 1(bir) birim alınmaktadır. Ancak zaman skalasın da zaman aralığı istenildiği gibi değiştirilebilir çünkü; hZ , h>0, h$\in$R, bir zaman skalası olduğundan sürekli herhangi bir zaman aralığı istenildiği uzunlukta seçilebilir.

Bu proje çalışmasında zaman skalasında tümör büyümesi modellemeleri amaçlanmış ancak bütçe kısıntıları ve zaman darlığı nedeniyle **(bu proje için verilen bütçe sadece 1500TL dir ve kırtasiye bütçesidir ,bütçe hiç kullanılmamıştır.)** bu konuda uzman kişilerle irtibat sağlanamamıştır ve proje için süre modelleme yapılmasına imkan vermemiştir. Bununla birlikte zaman skalası ile ilgili temel alt yapı çalışmaları yapılmış, zaman skalasında dinamik denklem sistem teorisi üzerinde üzerinde durulmuştur ve gerekli alt yapı oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu teorinin çalışılması zaman skalasında modelleme yapılması açısından çok önemlidir. Ülkemizde ve dünyada yeni bir kavram olan zaman skalası üzerindeki bu çalışmalar ileride yapılacak olan çalışmalar açısından önemlidir.

Proje süresi bitmesine rağmen çalışmalara ara verilmeyecektir ve modelleme çalışmalarına geçilecektir. Tüm bu sonuçlar göze alındığında proje önerisinde belirtilen hedeflere zaman darlığı nedeniyle kısmen ulaşılmış olsa da dinamik denklem sistemi oluşturulması çalışmaları yapılmış ve alt yapı oluşturulmuştur.

Projenin yeni bir proje ile desteklenmesi önemlidir.

Bu nedenle proje başarı ile sonuçlanmıştır.

5.1. Öneriler

Proje konu ve yöntem açısından yeni olduğundan daha uzun süreli ve bütçeli bir proje yapılması bu projenin devamı olarak yapılması önemlidir. Çünkü konunun orijinal ve çalışılmamış olması önemlidir ve literatüre önemli bir katkı sağlayacağı açıktır. Bu modelleme de büyük bir eksiklik olduğu ortadadır. Özellikle son yıllarda kanser dünyada hızla yayılmakta insanlar için önemli bir sağlik sorunu haline gelmiştir. Devletler kanser tedavisi için önemli harcamalar yapmakta ama bu harcamalara ve çabalara rağmen insan ölüm oranı bu hastalıkta çok yüksektir. Bu nedenle tümör üzerinde yapılacak çalışmalar büyük bir önem kazanmaktadır.

Bu projenin desteklenmesi ileride yapılacak olan çalışmaların desteklenmesi açısından araştırmacıları cesaretlendirecektir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, R.P., Bohne M. O'Regan , D., Peterson, A. (2002). Dynamic equations on time scales: A survey, in: R.P. Agarwal,M. Bohner, D. O'Regan (Eds.), Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales" (Preprint in Ulmer Seminare 5), J. Comput. Appl. Math. 141 (1–2) 1–26.
2. Agarwal R. P., O'Regan D. and Saker S. H. 2007. Philos- type oscillation criteria for second order half linear dynamic equations, Rocky Mountain J. Math. 37 1085–1104.
3. Bohner, M. and . Peterson A, 2001. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston.
4. Bohner, M. and . Peterson, A. 2003. Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston.
5. Bohner, M., Gelles, G., Heim, J. 2010. Multiplier-accelerator models on time scales. Int. J. Stat. Econ. 4 ,no. S10, 1–12.
6. Bozkurt, F. 2013. Modeling a tumor growth with piecewise constant arguments. Discrete Dyn. Nat. Soc. Art. ID 841764, 8 .
7. Erbe, L., Peterson, A. and Saker, S. H. 2003. Oscillation criteria for second-order nonlinear dynamic equations on time scales, J. London Math. Soc. 76 ,701–714.
8. Erbe, L., Peterson, A. and Saker, S. H. 2007. Oscillation criteria for second-order nonlinear delay dynamic equations on time scales, J. Math. Anal. Appl. 333, 505–522.
9. Eggensperger, M. 2008. Mathematical models: A generalization from population biology and time scales.Thesis (Ph.D.)–University of Arkansas at Little Rock.
10. Guseinov, G.Sh., . Kaymakçalan, B. 2002. On a disconjugacy criterion fpp.or second-order dynamic equations on time scales, in: R.P. Agarwal,M. Bohner, D. O'Regan (Eds.), Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", J. Comput. Appl. Math. 141 187–196.
11. Hilger S. 1990. Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 , 18-56.
12. Kac, V. and Cheung, P. 2002. Quantum Calculus, Universitext.
13. Li, Y., Yang, L., Zhang, H. 2014. Permanence and uniformly asymptotical stability of almost periodic solutions for a single-species model with feedback control on time scales. Asian-Eur. J. Math. 7 , no. 1,1450004, 15 pp.
14. Manojlovic J. V. 1999. Oscillation criteria for second-order half-linear differential equations, Math. Comp. Mod. 30,109-119.

15. Öztürk, I.; Bozkurt, F.; Gurcan, F. Stability analysis of a mathematical model in a microcosm with piecewise constant arguments. Math. Biosci. 240 (2012), no. 2, 85–91.
16. Ozturk, I.; Bozkurt, F. Stability analysis of a population model with piecewise constant arguments.Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011), no. 3, 1532–1545.
17. Došlý, O., Hilger, S.2002. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm–Liouville dynamic equation on time scales, in: R.P. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan (Eds.), Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", J. Comput. Appl. Math. 141 (1–2) 147–158.
18. Sahiner, Y. 2005. Oscillation of second-order delay dynamic equations on time scales, Nonlinear Analysis: Th. Meth. Appl. 63, 1073–1080.
19. Saker, S. H. 2005. Oscillation criteria of second-order half-linear dynamic equations on time scales, J. Comp. Appl. Math. 177, 375–387.
20. Şenel , M. T., 2012. Kamenev-type oscillation criteria for the second order nonlinear dynamic equations with damping on time scales, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 253107, 18 pages , DOI: 10.1155/2012/253107 .
21. Şenel , M. T.,, T. Candan, 2012. Oscillation of second order nonlinear neutral differential equation, Journal of computational Analysis and Applications, 14(6), 1112-1117.
22. Şenel , M. T. 2012. Oscillation theorems for second-order damped dynamic equation on time scales, AIP Conference Proceedings, 251-254, 2012 , DOI: 10.1063/1.4747688.
23. Şenel , M. T., Temtek, P. 2009. On Behaviour of Solutions for Third Order Nonlinear Ordinary Differential Equations with Damping Terms , Journal of computational Analysis and Applications, 11(2), 346-355.
24. Şenel , M. T. 2013. Behavior of solutions of a third-order dynamic equation on time scales, Journal of Inequalities and Applications, 2013:47, DOI: 10.1186/1029-242X-2013-47.
25. Şenel , M. T. 2011. Oscillation Theorems for Dynamic Equation on the Time Scales , Bulletin of Mathematical Analysis and Applications , 3(4), 101-105.
26. Şenel , M. T. 2010. On Oscillation of Second-Order Functional Differential Equations with Damping Term, Pacific Journal of Applied Mathematics V 2. No 2, 1-5.
27. Şenel , M. T.,2013. Oscillation results of second order damped non-linear dynamic equation on time scales, Applied Math. Inf. Sciences Letters, 1, No. 1, 29-34.
28. Şenel , M. T. 2013. Oscillation Theorems for Second-Order Nonlinear Dynamic Equation on Time Scales, Appl. Math. Inf. Sci. 7, No. 6, 2057-2061.
29. Şenel , M. T., 2013. On the Behavior of Solutions of a Third-Order Nonlinear Dynamic Equation on Time Scales , Ukrainian Mathematical Journal, Volume: 65 Issue: 7 Pages: 1111-1121.

30. Şenel , M. T. 2013. Oscillation theorems for the second order damped nonlinear dynamic equation on time scales ,Contemporary Analysis and Applied Mathematics , Vol.1, No.2, 167-180.
31. Şenel , M. T., Utku, N., 2014. Oscillation criteria for third-order neutral dynamic equations with continuously distributed delay, Advances in Difference Equations 2014, 2014:220. Doi:10.1186/1687-1847-2014-220.
32. Thandapani, E., Ravi, K. and Graef, J. 2001. Oscillation and comparison theorems for half-linear second order difference equations, Comp. Math. Appl. 42 , 953–960.
33. Zhang B. G. and Zhu, S. 2005. Oscillation of second-order nonlinear delay dynamic equations on time scales, Comp. Math. Appl. 49 (2005) 599–609.
34. Li, T., Senel, M. T., Zhang, C.2013. Oscillation of Solutions to Second-Order Half-Linear Differential Equations with Neutral Terms, Electronic Journal of Differential Equations, Article Number: 229.
35. Zhang, C., Şenel, M.T., Li, T. 2014. Oscillation of second-order half-linear differential equations with several neutral terms , Journal of Applied Mathematics and Computing, Volume 44, Issue 1-2, February , Pages 511-518.
36. Zhuang, K. 2007 Periodic solutions for a stage-structure ecological model on time scales. Electron. J. Differential Equations ,No. 88, 7 pp.
37. Wang, Y. L., Ai, L. 2007. Cobweb models on time scales. (Chinese) J. Shandong Univ. Nat. Sci. 42 (2007), no. 7, 4 pp.
38. Zhuang, K. 2008. Periodicity for a food chain model with functional responses on time scales. Int. J. Comput. Math. Sci. 2 , no. 3, 157–160.
39. Zhuang, K., Wen, Z. 2010. Periodic solutions for a delayed population model on time scales. Int. J. Comput. Math. Sci. 4 , no. 3, 166–168.
40. Gatenby RA. 1995. Models of tumor–host interaction as competing populations: implications for tumor biology and treatment, J Theor.Biol;176:447–55.
41. Gurcan,F.; Kartal, S.; Öztürk, I.; Bozkurt, F. ,2014.Stability and bifurcation analysis of a mathematical model for tumor–immune interaction with piecewise constant arguments of delay, Chaos, Solitons & Fractals 68, 169–179.
42. Li X, Mou C, Niu W, Wang D., 2011.Stability analysis for discrete biological models using algebraic methods. Math Comput Sci., 5:247–62.