T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ

Katmanlanmış Kompozit Yapılarda Periyodik Yükler Altında Hasar Oluşumu ve Gelişiminin Doğrusal Olmayan Bünye Modelleri ile Belirlenmesi

Proje No : FBA-06-08

ARAŞTIRMA PROJESİ

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü :

Prof.Dr. M. Kemal Apalak*

Araştırmacılar :

Doç.Dr. Z. Gül Apalak*
Yrd.Doç.Dr. Recep Ekici*
Yrd.Doç.Dr. Mustafa Yıldırım*

*Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü

Eylül 2013
KAYSERİ

TEŞEKKÜR

Proje yürütücüsü ve araştırmacıları **Katmanlanmış Kompozit Yapılarda Periyodik Yükler Altında Hasar Oluşumu ve Gelişiminin Doğrusal Olmayan Bünye Modelleri ile Belirlenmesi** başlıklı araştırma projelerine Erciyes Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından **FBA-06-08** nolu sözleşme altında verilen maddi desteğinden ve araştırma konusunun muhteviyatı nedeniyle uzayan araştırma süresinde gösterilen hoşgörüden dolayı teşekkür eder.

Araştırma Projesi: FBA-06-08
Sonuç Raporu

Katmanlanmış Kompozit Yapılarda Periyodik Yükler Altında Hasar Oluşumu ve Gelişiminin Doğrusal Olmayan Bünye Modelleri ile Belirlenmesi

Prof.Dr. M. Kemal APALAK* (Yürütücü)
Araştırmacılar :
Doç.Dr. Z. Gül Apalak, Yrd.Doç.Dr. Recep Ekici, Yrd.Doç.Dr. Mustafa Yıldırım

Erciyes Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Makina Mühendisliği Bölümü, Kayseri 38039, Türkiye

Özet

Bu projede katmanlı malzemelerin dinamik yükler altında gerilme ve şekil değiştirme davranışlarının doğrusal olmayan bünye denklemleri, geometrik bakımdan doğrusal olmayan elastisite denklemleri ile modellenmesi ve doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak çözümlenmesi hedeflenmiştir. Yapıştırıcı ile birleştirilmiş katmanlı kompozit plakalar uyarlanma problemi olarak seçilmiştir. Yapıştırıcı malzemesi doğrusal olmayan elasto-plastik davranış sergiler, bağlantı şekil değiştirir iken döner ve eğilme momenti oluşumuna neden olur ki, geometrik bakımdan doğrusal olmayan bir davranış gözlenir, ayrıca kompozit plakaların her bir katmanı matris ve fiber (iplikçik) malzemelerinden oluştuğundan hasar tipleri ve tespiti diğer malzemelerden farklılık arz eder. Görüldüğü üzere, seçilen problem yeterince doğrusal olmayan özelliği bünyesinde ihtiva etmektedir. Geometrik bakımdan doğrusal olmayan davranış küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi, yapıştırıcının doğrusal olmayan mekanik davranışı büyük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi ile modellenmiştir. Kompozit plakaların her bir katmanındaki fiber ve matris hasarları çekme ve basma yükleri altında değerlendirilmiştir. Ayrıca matrisin kayma yükü altında hasar davranışı incelenmiştir. Hashin'in söz konusu hasar tiplerine uygun hasar kriterleri bu amaçla kullanılmıştır. Geometrik bakımdan doğrusal olmayan davranışı modellemede küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisinin, sünek yapıştırıcı malzemesinin elasto-plastik (doğrusal olmayan) davranışını modellemede büyük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisinin yeterince başarılı olduğu belirlenmiştir. Katmanlanmış kompozit plakalarda oluşan hasar tipleri, çekme altında fiber ve çekme altında matris hasarı şeklinde gelişmektedir. Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterleri hasarın oluşumu ve gelişimini tahmin etmede başarılıdır. Katmanlanmış plakalarda hasar oluşumu ve gelişiminde fiber açısı etkin bir tasarım parametresidir, darbe enerjisi seviyesi hasarın oluşumunu ve gelişimini etkilemektedir. Şöyle ki, hasar gelişim hızı malzemenin şekil değiştirme hızı ile ilişkili olması nedeniyle yüksek darbe enerjisi seviyesinde bu ilişkinin

*İletişim bilgileri : Tel : +90 352 437 4901, Fax : +90 352 437 5784, Email : apalakmk@erciyes.edu.tr

etkinliği belirginleşmektedir. Proje raporunda belirtildiği üzere yürütülen diğer çalışmanın deneysel çıktıları teorik modelimizin ve sayısal çözümlemizin hasar oluşumu ve yayılma biçiminin doğru tespit edilebildiğine işaret etmektedir. Ancak, deneysel temas kuvvet seviyeleri ve temas sürelerinin farklılık (% 15) göstermesi, darbe sürecinde malzemelerin şekil değiştirme hızının ve malzemelerin mekanik özelliklerinde bozunumun dikkate alınmasına işaret etmiştir. Proje yürütücüsü Prof.Dr. M. Kemal Apalak ve Araştırmacı Yrd.Doç.Dr. Mustafa Yıldırım tarafından söz konusu teorik model bir başka proje kapsamında iyileştirilmeye halen çalışılmaktadır.

Anahtar kelimeler : Katmanlı kompozitler; tek bindirme bağlantıları; hasar; meso hacim yaklaşımı; doğrusal olmayan malzeme davranışı; gerilme analizi; paralel doğrusal olmayan sonlu eleman yöntemi

Research Project: FBA-06-08

Final Report

Determination of Damage Initiation and Formation in Layered Composite Structures under Dynamic Loads with Non-linear Constitutive Models

Prof.Dr. M. Kemal APALAK* (Director)
Researchers :
Assoc.Prof.Dr. Z. Gül Apalak, Assist.Prof.Dr. Recep Ekici,
Assist.Prof.Dr. Mustafa Yıldırım

Erciyes University Engineering Faculty
Department of Mechanical Engineering, Kayseri 38039, Turkey

Abstract

This project aims to model stress and strain behaviours of layered composite materials under dynamic loads with non-linear constitutive equations, geometrically non-linear elasticity equations, and to analyse them with non-linear finite element method. As an adaptation problem,adhesively bonded layered composite plates are selected. Adhesive material exhibits a non-linear elasto-plastic behaviour, as the joint deforms it also rotates; therefore, a geometrically non-linear behaviour is observed. In addition, since each layer of layered composite plate is composed of fiber and matrix materials damage modes and damage determination exhibits differences apart from other material types. Consequently, selected adaptation problem includes sufficiently non-linear behaviours. Geometrically non-linear behaviour is modelled with small strain-large displacement theory, non-linear material behaviour with large strain-large displacement theory. Fiber and matrix damages are evaluated under tensile and compressive loads for each layer of layered composite plates. In addition, the shear damage of matrix is evaluated. Hashin three-dimensional damage criteria are used suitably. As results, small strain-large displacement theory is succesful to model the geometrically non-linear behaviour, large strain-large displacement theory and plasticity theory for the material non-linear behaviour of the adhesive material. Damage modes in each layer of the layered composite plates developed in fiber-tension and fiber-matrix damages. Hashin's three-dimensional fibre-tension and matrix-tension damage criteria are succefull to predict the damage initiation and formation. The fiber angle is an effective design parameter to affect the damage initiation and formation in the layered composite plates. Thus, since the damage formation speed is related to the deformation speed of materials the effectiveness of this relationship becomes evident for especially high impact energy levels. As mentioned in the project report the experimental data of our other project indicated that our theoretical model and numerical analysis method are

*Corresponding author : Tel : +90 352 437 4901, Fax : +90 352 437 5784, Email : apalakmk@erciyes.edu.tr

succesful to predict accurately the damage mode and formation; however, experimental contact force levels and contact durations exhibited some differences by (15%). Therefore, it is evident to consider the deformation speed of the materials and the material degredation during the impactor penetration. Director Prof.Dr. M. Kemal Apalak and Researcher Assist.Prof.Dr. Mustafa Yıldırım have studied already to improve the present damage theory in the scope of another project.

Keywords : Layered composites; single lap joints; damage; meso-scale volume approach; non-linear material behaviour; stress analysis; parallel non-linear finite element technique

İçindekiler

1 Amaç ve Gerekçe **9**

2 Literatür Bilgisi **12**

3 Küçük Şekil Değiştirme-Büyük Yerdeğiştirme Teorisi **17**

3.1 Büyük Yer Değiştirme Teorisinin Sonlu Elemanlar Metoduna Uygulanması . 23

3.2 Doğrusal Olmayan Denge Denklemleri 28

3.3 Doğrusal Olmayan Denge Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri 29

4 Akma Kriterleri **32**

4.1 von Mises Akma Kriteri 32

4.2 Düzeltilmiş von Mises Akma Kriteri 33

4.3 Prandtl-Reuss Akma Kuralı 34

5 Malzemelerin Elasto-Plastik Davranışı İçin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları **34**

6 Doğrusal Olmayan Denge Denklemlerine Ek İfadeler **36**

7 Zaman Boyutunda Çözümleme (Dinamik Analiz) **36**

8 Katmanlı Kompozitler İçin Hasar Kriterleri **38**

8.1 Fiber Hasar Kriterleri 38

8.2 Matris Hasar Kriterleri 40

8.3 Kayma Hasar Kriteri 40

8.4 Katmanlararası Ayrılma (Delaminasyon) Hasar Kriteri 41

9 Yapıştırıcı İle Birleştirilmiş Katmanlı Kompozit Plakaların Dinamik Yük Altında Hasar Davranışı **41**

9.1 Motivasyon: Uygulama Araştırma Problemi 41
9.2 Teorik Model ve Deney Numunesi 43

10 Sayısal Analiz Sonuçları **44**

10.1 Yapıştırıcı Kalınlığı, Fiber Açısı ve Darbe Enerjisi 45
10.2 Yapıştırıcı Kalınlığı, Fiber Açısı ve Darbe Enerjisinin Yapıştırıcı Hasarı Üzerinde Tesiri 48
10.3 Darbe Sonrası Kompozit Katmanlarında Hasar Analizleri 49

11 Özet ve Sonuçlar **57**

1 Amaç ve Gerekçe

Kompozit malzemeler uygulama alanlarına bağlı olarak yüksek direngenlikli ve dayanımlı katmanlanmış yapıların tasarımını kolaylaştırmaktadır. Bu nedenle uzay ve hava taşıtlarında, deniz ve otomotiv yapılarında yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Katmanlı yapıların tasarım kolaylığı beraberinde bazı zorluklarıda getirmektedir. Şöyle ki, katmanlı kompozit yapının her bir katmanının farklı açıda yerleştirilmiş fiber dağılımlarına sahip olması nedeniyle dış yükler altında maruz kaldığı gerilme ve şekil değiştirme hallerini tarifleyen matematiksel modellerin kurulması ve sonuç diferensiyel denklem sistemlerinin sınır ve başlangıç şartları altında çözülmesi problemi yeterince karmaşık hale sokmaktadır. Yapısal ve ısıl dış yükler kompozit yapılarda bölgesel yük taşıma kabiliyetini kaybetmeye yada hasarlara neden olmaktadır. Kompozit yapılarda hasar genellikle matris hasarı (matrix failure), fiber kopması (fibre failure), fiber-matris arasında kaymadan dolayı ayrılma (matrix-fiber shear damage), ve tabakalar arası ayrılma (delamination) şeklinde ortaya çıkmaktadır. Yüksek direngenlikli ve dayanımlı kompozit yapıların tasarımını başarabilmek için kompozit yapılarda ortaya çıkan hasarın mekanizması, yani nasıl ve nerede başladığı ve yayıldığının iyi bir şekilde anlaşılması gerekmektedir. Kompozit yapılarda hasarın başlamasını ve ilerlemesini doğru bir şekilde tahmin edebilmek için geçerli bir teorik modelin geliştirilmesi önem kazanmaktadır. Dolayısıyla araştırmacılar tarafından bu alanda artan bir oranda teorik ve deneysel çalışmalar sunulmaktadır. Araştırmacılar arasında kabul gören yaklaşım "yayılan hasar model" idir [1-25]. Bu tür hasar modeli üç aşamada tatbik edilir : i) gerilme analizi [7–9], ii) kompozit malzemenin türüne uygun bir dayanım hipoteziyle tümleşik yayılan hasar modelinin tatbiki ve hasar tiplerinin tahmini [1–6], iii) bölgesel hasara maruz kalan kompozit malzeme bölgelerinde hasar tipine uygun tarzda malzemenin mekanik özelliklerinin düşürülmesi [10–13]. Kompozit yapıya tatbik edilen yapısal veya ısıl yük değerleri küçük adımlar ile artırılarak tatbik edilir. Dolayısıyla her bir yük arttırımı için bu üç aşama tekrar edilir. Tüm kom-

pozit yapının bu dış yükleri taşıma kabiliyetlerini kaybetmesi durumunda problemin çözümü sonuçlandırılır.

Kompozit malzemelerin mekanik özellikleri mikro-mekanik ve makro-mekanik yaklaşımlar kullanılarak değerlendirilebilmektedir [26–29]. Mikro-mekanik yaklaşım kompozit yapıların bütünleşik mekanik davranışını fiber ve matris malzemelerinin bireysel etkileşimlerini dikkate alarak tahmin eder. Bu nedenle fiber ile desteklenmiş kompozitlerde hasar ve kırılma matris ve fiber seviyesinde değerlendirilebilmektedir. Makro-mekanik yaklaşımda ise kompozit yapısal elemanın homojen özelliklerinin tümünü tespit edebilmek için fiber ve matris malzemelerinin mekanik özelliklerinin karışım kanunlarına uygun şekilde ortalama değerleri gözönüne alınır. Dış yükler tarafından neden olunan matris hasarı, fiber-matris ayrılması, fiber kopması ve tabakalar arası ayrılma gibi hasar tipleri katmanlı kompozitlerin katmanları arasındaki bağı bozar. Bu olay kompozit yapının yük taşıma kabiliyetini düşürür ve hatta tamamen kırılmasına da neden olabilir. Genellikle karmaşık gerilme haline maruz olan her bir tabakanın dayanımı değerlendirilir. Bu amaçla uygun bir dayanım hipotezi ile ilgili tabakanın dayanımı tahmin edilir. Ancak kompozit yapının basit olmayan bir geometriye sahip olması, dış yüklerin ve sınır şartlarının karmaşıklığı değişken hasar tiplerinin birleşik tesirlerinin tahminini oldukça zorlaştırır. Ancak basit geometrili ve basit sınır şartlarına maruz kompozit yapıların gerilme ve şekil değiştirme halleri problemine belirli kabuller altında analitik metotlar çözüm sunabilmiştir. Kompozit yapıların üretimi esnasında neden olunan gerilme ve şekil değiştirmeler, ısıl yükler ve nem toplama gibi temel sorunlarında dikkate alınması halinde analitik metotların probleme çözüm getirmesi mümkün değildir. Uygun bir dayanım hipotezi ile sayısal sonlu elemanlar yöntemi bir kompozit yapının kırılma davranışını tahmin etmede başarılı bir şekilde kullanılmaktadır [27]. Kompozit yapıların katmanlarında hasarın ortaya çıkması ve yayılmasının analiz edilebilmesi için hasar bölgelerinde malzeme bileşenlerinin mekanik özelliklerinin uygun bir şekilde düşürülmesi gerekmektedir. Bu amaçla bir kurallar seti geliştirilir (material degradation rules) ve kompozit malzeme bileşenlerine uygulanır.

Mevcut çalışmalar ilk tabaka hasarı yükü ve kompozit elemanın kopma yükünün tahmininin bu uygulanan kurallar setine doğrudan bağlı olduğunu göstermiştir [7–13].

Bu çalışmanın temel amacı dış yapısal yükler altında karbon veya cam fiberler ile desteklenmiş polimerik katmanlanmıs kompozit yapılarda hasar mekanizmasını araştırmaktır. Darbe yükü seviyesine bağlı olarak bu hasar mekanizmasının nasıl etkilendiği, ne tür hasar tiplerinin belirginleştiği tespit edilmeye çalışılacaktır. Katmanlı kompozitlerin her bir katmanının bileşenlerinin mekanik özellikleri için farklı hasar kriterleri tatbik edilip katmanda ilk hasar oluşumu yükünü en doğru şekilde tahmin eden hasar ktriterleri tespit edilecektir. Mevcut çalışmalar matris ve fiber malzemelerinin doğrusal elastik mekanik özelliklere sahip olduğunu kabul etmektedir. Ancak bu tür yapıların matris malzemeleri yüksek statik/dinamik yükler altında doğrusal olmayan davranışlar sergilemektedir. Ayrıca dış yük uygulanır iken yapı şekil değiştirmekte takip eden yük adımları şekil değiştirmiş geometriye tesir etmektedir. Doğrusal gerilme analizleri şekil değiştirme ve yer değiştirmelerin çok küçük olduğunu kabul etmektedir. Ortaya çıkan büyük yerdeğiştirme ve dönmeler dikkate alınmamaktadır. Dolayısıyla dış yüklerin yapının şekil değiştirmemiş ve değiştirmiş geometrilerine uygulanarak problem çözüldüğünde doğrusal olmayan çözümlerin daha gerçekçi sonuçlar verdiği aşikardır. Bu nedenle matris malzemesinin kayma, çekme ve basma yükleri altında doğrusal olmayan davranışları, ve de kompozit yapıların geometrik bakımdan doğrusal olmayan davranışları dikkate alınacaktır. Geçerli teorik hasar modelleri elde edildikten sonra yapıştırıcı ile birleştirilen bağlantılarda hasarın oluşumu ve gelişimini tahmin etmek amacıyla kullanılacaktır. Yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit-kompozit, kompozit-metal bağlantıların hasar mekaniği mühendislik yapılarında, uzay, hava ve deniz taşıtlarında kullanılan yapılarda oldukça önem kazanmaktadır.

Statik yükler altında katmanlı kompozit malzemelerin hasar oluşumu ve gelişimi için uygun bir teorik model geliştirildikten sonra dinamik yükler altında kompozit malzemelerin darbe davranışı bu modeller yardımıyla araştırılacaktır. Günümüzde uçaklarda, deniz taşıt-

larında, otomobillerde ve savunma sanayinde farklı maksatlarla kullanılan kompozit malzemeler darbe veya balistik yükler altında hizmet vermektedir. Uzun ömürlü yüksek dayanım ve direngenliğe sahip kompozit yapıların tasarımı hasar oluşumunun ve yayılımının mekanizmasının tespiti ile mümkündür. Bu özelliklere sahip bir kompozit yapı daha işlevsel olmakla birlikte ekonomikliği nedeni ile ülke ekonomisine katma değer oluşturacaktır. Bu araştırma projesi i) kompozit yapılarında düşük veya yüksek hızlarda darbe yükleri altında hasar gelişiminin ve ii) bir metalik yapının yüksek hızda kompozit katmanlı yapı içinde nüfuziyeti sürecinde ortaya çıkan hasarın gelişiminin incelenmesine alt yapıda oluşturacaktır.

Statik ve dinamik yükler altında kompozit yapılardaki hasar oluşumu ve yayılımını tarifleyen geliştirilmekte olan modeller doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin doğrusal sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler ile çözülmesini gerektirmektedir. Sayısal yöntemde belirlenmiş bir hata değerine kadar çözüm tekrarlanması ve hasar tiplerinin kontrolü gerekmektedir. Bu nedenle yüksek performanslı bilgisayarlara ihtiyaç vardır. Günümüzde bu tür hesaplamalar paralel işlemleri yapabilen ve paralel işlemlere uygun geliştirilmiş yazılımları gerektiren iişistasyonlarında yada bu tür bilgisayarlardan olusan sebekelerde (cluster) gerçekleştirilebilmektedir.

2 Literatür Bilgisi

Önceki bölümde belirtildiği gibi kompozit yapılarda hasarın başlamasını ve ilerlemesini doğru bir şekilde tahmin edebilmek için geçerli bir teorik modelin geliştirilmesine ihtiyaç vardır. Bu nedenle kompozit malzemelerde statik ve dinamik yükler altında hasar modelleri üzerine artan sayıda teorik ve deneysel çalışmalar sunulmaktadır [1-25]. Yayılan hasar modeli geniş bir kabul görmektedir. Ancak kompozit malzemelerin bileşenlerinin mikro-mekanik davranışları daha iyi anlaşıldıkça bu modelin kompozit yapılardaki ilk katman hasarı oluşumu yükünü ve yapının tümden kırılma yükünü tahmin edebilmesi iyileştirilebilmektedir. Ayrıca hasarın oluşum ve yayılma mekanizması daha açıklık kazanabilmektedir. Buna bağlı amaca yönelik

optimum kompozit yapı tasarımı yapılabilmektedir.

Tserpes ve diğerleri [7, 8] tabakalanmış grafit/epoxy kompozit yapılarının civata bağlantılarının çekme davranışı ve dayanımı üzerinde kırılma hipotezlerinin ve farklı malzeme özelliklerini indirgeme kurallar setlerinin tesirini incelemek amacıyla üç boyutlu yayılan hasar modelini geliştirmişlerdir. Farklı fiber açılarına sahip tabakalardan oluşan katmanlı kompozit plakaların kullanıldığı farklı geometriye sahip tek-bindirme tek civata bağlantıları için deneysel sonuçlarını teorik modellerinden elde ettikleri yük-yerdeğiştirme eğrileri ve kopma yükleri ile mukayese ettiler, tüm bağlantılar için bağlantı direngenliğini tatminkar bir şekilde tahmin edildiğini gösterdiler. Ayrıca Tserpes ve diğerleri [9] karbon fiber destekli plastik katmanlı yapılarda yorulmadan dolayı hasar oluşumunu ve artık dayanımını araştırdılar. Katmanlı yapının iç hatalara sahip olmadığı ve belirli tip katmanlı yapılar içinde iç hataları gözönüne alarak teorik sonuçlarını deneysel verileri ile doğruladılar. Tan ve diğerleri [10–13] çatlak içeren bir katmanlı yapının mikro-mekanik modelini temel alarak her bir hasar tipinin malzeme direngenliği üzerindeki tesirlerini incelediler.

Haj-Ali ve Kılıc [14–17] fiber destekli plastik kompozitlerin lineer olmayan davranışlarını dikkate alan mikro-mekanik modeller ile birleştirilmiş yapısal hasar modelleme yaklaşımları geliştirmişlerdir. Kwon ve Berner [18] katmanlanmış fiber destekli kompozitlerin hasar ve kırılma analizleri için bir mikro-mekanik model sundular. Bu mikro-mekanik modeli ve kırılma hipotezini sonlu elemanlar metodu ile birleştirerek hesaplanan kırılma yüklerinin ve hasar yayılma hattının deneysel sonuçlar ile uyumlu olduğunu gösterdiler. Bogettive diğerleri [19, 20] kompozit levhaların doğrusal olmayan davranışını ve hasarın yayılışını tespit edebilmek için tek katman üzerinden hasarın gelişimini üç boyutlu değerlendiren bir model geliştirdiler ve tahminleri deneysel sonuçlar ile uyumluydu. Spottswood ve diğerleri [21] basitleştirilmiş büyük yerdeğiştirme ve dönme teorisi ile Hashin kırılma hipotezini sonlu eleman metoduna tatbik ederek düşey yüklere dayanabilecek şekilde tasarlanmış bir ince eğrisel kompozit panelde hasar yayılımını incelediler. Deneysel sonuçları bu teorinin kabuk diren-

genliğini olduğundan büyük tahmin ettiğini ve bu tahminin kırılma hipotezi dikkate alınsın alınmasın değişmediğini tespit ettiler. Ayrıca hasar yayılım tarzının deneysel sonuçlara yakın olduğu ve çökme miktarı artar iken hasardan dolayı direngenliğin belirgin bir şekilde azaldığını gösterdiler.

McCarthy ve diğerleri [22] çok civatalı çift bindirmeli kompozit bağlantılarda hasar oluşumunu tahmin etmek için bir üç boyutlu ilerleyen hasar modeli geliştirdiler. Bu model ile tahmin edilen yük-yerdeğiştirme davranışı ve yüzey şekil değiştirmelerinin profilini deneysel veriler ile doğruladılar. Civata gövdesi ile delik yüzeyi arasındaki boşluğun yük dağılımında ve hasar mekanizmasında büyük değişikliklere neden olduğunu buldular. Şöyle ki, delik yüzeylerinin bir tarafından yük taşınılması nedeniyle başlangıç hasarının oluştuğu yük seviyesinde belirgin düşmelere neden olmaktadır. Ayrıca McCarthy ve diğerleri [23, 24] civatalanmış grafit/epoxy kompozit bağlantıların mekanik davranışına civata-delik boşluğunun tesirlerini araştırmışlardır. Aradaki boşluğun artmasının artan bir civata dönmesine, azalan bir civata-delik temas yüzeyine ve katman fiber yönlerine bağlı olan katmanlı kompozit yapıda gerilme dağılımında üç boyutlu değişimler kadar azalan bir bağlantı direngenliğinede neden olduğunu göstermişlerdir. Ambur ve diğerleri [25] düzlem içi kayma yüklerine ve ileri aşamada burkulmaya maruz çentikli ve çentiksiz güçlendirilmiş kompozit panellerde hasar yayılımını incelediler. Malzeme özelliklerini indirgeyerek matris boyunca çatlak ilerlemesi, fiber matrisinin ayrılması ve fiber kopması gibi tabakaların birkaç hasar tiplerini dikkate aldılar. Deneysel sonuçları lineer olmayan sonlu eleman çözümleri ile uyuşmaktadır.

Yapıştırıcı ile birleştirme tekniği kullanılarak metaller ve kompozitler başarıyla bağlanmaktadır. Bu nedenle yapıştırıcı bağlantılarının gerilme ve deformasyon halleri araştırmacılar tarafından araştırılmıştır [30, 31]. İlk olarak Volkersen birleştirme bölgesinde plakaların dönme tesirlerini ihmal ederek çekme altında yapıştırıcı ile birleştirilmiş tek bindirme bağlantısının bindirme bölgesi boyunca kayma gerilme dağılımlarını inceledi [32, 33]. Goland ve Reissner yapıştırıcı ile birleştirilmiş tek bindirme bağlantıyı silindirik olarak eğilmiş bir

plaka kabul ederek çözümlerinde bu tesiri dikkate almışlardır [34]. Hart-Smith yapıştırıcı tabakasınınzayıf bir bağlantı kabul etti ve metalik ve kompozit bindirme bağlantılarda yapıştırıcı tabakasının doğrusal olmayan gerilme halleri üzerine birçok teorik ve deneysel çalışma sundu [35–38]. Goland ve Reissner, ve Hart-Smith' in teorilerinde dikkate alınmayan düşey kayma deformasyonlarının tesirlerini Reissner [39] ve Reddy [40] dikkate alarak yapıştırıcı ile birleştirilmiş tek bindirme bağlantısının bindirme bölgesinde gerilme dağılımları için çözümler geliştirdiler. Adams ve diğerleri [30] ve Kinloch [31] yapıştırıcı ile birleştirilmiş metal ve kompozit bindirme ve tüp bağlantılarının gerilme ve deformasyon hallerini doğrusal ve doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemleri ve kırılma mekaniği yardımıyla araştırdılar. Yapıştırıcı serbest uçlarında ve gerilme yığılmalarının ortaya çıktığını ve yapıştırıcı uç geometrisi ve büyüklüğünün en büyük gerilme seviyelerini etkilediğini göstermişlerdir. Nageswara ve diğerleri [41] yapıştırıcı ile birleştirilmiş bindirme bağlantısının bindirme bölgesi boyunca uygun bir yapıştırıcı kalınlığına erişerek uniform bir kayma gerilmesi dağılımının oluştuğunu ancak yapıştırıcı serbest uçlarında en yüksek değerlere eriştiğini göstermişlerdir. Ishii ve diğerleri [42, 43] üç tip yapıştırıcı ile birleştirilmiş bağlantı (alın, eğik alın ve kalın plakalı bindirme kesme bağlantıları) numunesinin bir seri yorulma testlerini yaptılar ve karbon fiber destekli plastik ve metal bağlantıların kırılma tiplerini araştırdılar. İlaveten, yapıştırıcı ile birleştirilmiş çatlaklı ve çatlaksız karbon fiber destekli plastik-aluminyum bindirme bağlantılarının gerilme tekilliği parametrelerini ve yorulma dayanımlarını tahmin eden bir yöntem sundular. Kam ve Lai [44] her bir katmanı farklı fiber açılarına sahip plakaların ilk katman kırılması dayanımı için deneysel ve teorik sonuçlar ortaya koymuşlardır. Kırılmadan dolayı plakalarda ortaya çıkan enerjiyi akustik emisyon tekniği yardımıyla ölçmüşlerdir. Terik çalışmalarında Tsai-Wu kırılma hipotezini kullanmışlardır. Tong [45] yapıştırıcı ile birleştirilmiş çift bindirme bağlantıların dayanımını araştırmışlardır. Tong basitleştirilmiş bir boyutlu model kullandı ve sonlu eleman modeli ile mukayese etti. Bu amaçla birkaç mevcut olan ve yeni tabakalararası kırılma kriterleri yardımıyla bağlantıların dayanımını

tahmin etti. İlk hasarın yapıştırıcıya bitişik reçine-fiber arayüzeyinde ortaya çıktığı ve ilerlediği gerçeğini ortaya koydu. Tong [46] doğrusal olmayan yapıştırıcı özelliklerini dikkate alarak yapıştırıcı ile birleştirilmiş tek bindirme ve bindirme-kesme bağlantılarının dayanımlarını tahmin etmek için basit bir çözüm yolu sundu. Düşey kesme kuvvetleri ile ilgili terimleri ihmal etmenin şekil değiştirme enerjisini tahmin etmede çok küçük bir tesire sahip olduğunu gösterdi. Bu tesirin yapışana izafeten sünek bir yapıştırıcı için küçük iken daha sert bir yapıştırıcı için belirgin olduğunu göstermiştir. Ayrıca Ton ve diğerleri [47] yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit ileri derecede burkulan panel-flanş bağlantılarında ileri derecede burkulmadan dolayı ortaya çıkan hasarları teorik ve deneysel olarak incelediler. Sheppard ve diğerleri [48] bağlantının serbest uçlarında ortaya çıkan gerilme tekilliklerini dikkate alarak yapıştırıcı ile birleştirilmiş bağlantıların kırılma analizi için uygun bir kırılma kriterinide içeren bir hasar bölgesi modeli sundular. Yapıştırıcı ile birleştirilmiş bağlantıların kırılma yükünü tahmin edebilmek için kritik hasar bölgesi alanı ve şekil değiştirme esaslı kırılma kriteri yaklaşımlarını dikkate alarak bir hasar bölgesi modeli kullandılar. Cheuk ve diğerleri [49] metal-kompozit çift bindirme bağlantılarında yorulmadan dolayı çatlak oluşumu ve büyümesi mekanizması üzerine deneysel ve sayısal sonuçlar sundular. Kim ve diğerleri [50] yapıştırıcı tabakası içeren ve içermeyen tek yönlü kompozit tek bindirme bağlantılarının kırılma tipleri ve dayanımlarını araştırdılar ve kompozitin iyileştirme sürecinde üretilen yapıştırıcısız bağlantılarda bindirme bölgesinde yapışan malzemelerin dönmesinin azalmasından dolayı en büyük kırılma dayanımına sahip olduğunu gösterdiler. Ayrıca bağlantı kırılma yükünün kompozit yapılarda tabakalar arası ayrılmanın neden olduğu zayıflamadan dolayı bağlantı kırılma yükünün yapıştırıcının yapışma dayanımıyla orantılı olmadığını buldular. Li ve diğerleri [51] bir kompozit tek bindirme bağlantıda yapıştırıcı kalınlığı boyunca yapıştırıcı gerilme ve şekil değiştirme dağılımları üzerinde geometrik bakımdan doğrusal olmayan tesirleri araştırdılar. Yapıştırıcının serbest uçlarında çekme soyulma ve kayma gerilmelerinin yapıştırıcı kalınlığı boyunca önemli bir ölçüde değiştiğini ve merkezden uzaklaştıkça oldukça

arttıkları ve yapıştırıcı plaka arayüzeyinde en büyük değere eriştiğini gösterdiler. Ayrıca Apalak ve Engin [52, 53] çekme ve eğilme yükleri altında yapıştırıcı ile birleştirilmiş alu-minyum tek bindirme bağlantılarında hasar oluşumu ve gelişimini incelediler, üç boyutlu bir modelin yanal şekil değiştirme tesirlerini (Poisson etkisi) dikkate almak için gerekli olduğunu, yapıştırıcı serbest uçlarında bırakılan yapıştırıcı birikintilerinin ilk hasar bölgesinin yeri ve yapıştırıcı tabakası boyunca ilerleme hattının oluşumunda önemli bir rol oynadığını göster-diler. Şu anda mevcut çalışmalar tipik bir bağlantı kırılmasının yapıştırıcı serbest uçlarındaki hasar oluşumunun kritik bir büyüklüğe erişmesinden sonra ortaya çıktığını işaret etmektedir [41-53]. Dolayısıyla gerek kompozit plakalarda gerekse yapıştırıcı tabakasında hasarın oluşu-munu ve yayılışını hasar modelleri ile tahmin edebilmek mümkündür. Ancak hasar oluşumu ve gelişimi mekanizmalarının tahmini malzemelerin doğrusal olmayan mekanik özelliklerinin doğru bir şekilde modellenmesine kuvvetle bağlıdır.

3 Küçük Şekil Değiştirme-Büyük Yerdeğiştirme Teorisi

Elastisitede mevcut cisim biçimi başlangıç cisim biçimi ile mukayese edilir ve şekil değiştirme tanımı başlangıç biçimi esas alınarak geliştirilir. Malzemenin başlangıç durumundan mevcut duruma geçtiğini kabul eden ayrıntılı yöntemin son cisim durumunu etkilemediği kabul edilir.

Yer değiştirmeler ve yer değiştirme gradyantları küçük değil ise şekil değiştirme halinin tariflenmesi basit değildir, hatta bu kabul ile bile kolay değildir. Gerçekte, bu küçük şekil değiştirme teorisi yalnızca yer değiştirmeler ve yer değiştirme gradyantları küçük olduğu za-man kesinlikle doğrudur. Küçük yer değiştirme-küçük şekil değiştirme yaklaşımı durumunda üç boyutlu olarak küçük şekil değiştirme ve dönme ifadelerini geliştirebilmek için başlangıç konumunda sonsuz küçük keyfi bir $d\underset{\sim}{X}$ çizgi vektörünü ele alalım ve izafi birim yer değiştirme vektörünün $\frac{d\,\underset{\sim}{u}}{dS}$ bileşenleri için bir ifade arayalım. İndis notasyonda

$$\frac{du_i}{dS} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\frac{dX_j}{dS} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dS} \\ \frac{du_2}{dS} \\ \frac{du_3}{dS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dS} \\ \frac{dX_2}{dS} \\ \frac{dX_3}{dS} \end{bmatrix} \tag{2}$$

veya x_1, x_2, x_3 notasyonunda

$$\frac{du}{dS} = J_u n \quad \text{veya} \quad \frac{d\underset{\sim}{u}}{dS} = \underset{\sim}{u} \overset{\leftarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} \tag{3}$$

yazılabilir. Burada $\frac{du}{dS}$ ve n sırasıyla $\frac{d\underset{\sim}{u}}{dS}$ ve $d\underset{\sim}{X}$ doğrultusunda $\underset{\sim}{\hat{n}}$ birim vektörünün kolon matris gösterimleridir. J_u kare matrisinin transpozunu alırsak $\overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} u$ matrisi ve denklem (3) ün diğer biçimi

$$\frac{d\underset{\sim}{u}}{dS} = \underset{\sim}{\hat{n}} \cdot \overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} \underset{\sim}{u} \tag{4}$$

elde edilir. J_u, 3×3 lük boyutlara sahip Jakobyen matrisi veya yer değiştirme gradyant matrisidir. Yer değiştirme gradyant matrisinin her bir satırı yer değiştirme vektörünün bir skaler bileşeninin gradyantının vektör bileşenlerini içerir. Jakobyen matrisi K ve M gibi iki komşu nokta arasındaki her bir $d\underset{\sim}{X}$ vektörü ile K ya izafeten M in izafi birim $\frac{d\underset{\sim}{u}}{dS}$ yer değiştirmesini ilişkilendiren bir operatördür, bu nedenle birim izafi yer değiştirme matrisi olarakta isimlendirilir.

J_u matrisi simetrik bir $\underset{\approx}{E}$ matrisi ve antisimetrik bir $\underset{\approx}{\Omega}$ matrisinin toplamı olarak yazılabilir. Genellikle, ε_{ij} notasyonu küçük-şekil değiştirme $\underset{\approx}{E}$ tensörünün bileşenlerini göstermek için kullanılır. Böylece, küçük-şekil değiştirme tensörü

$$\underset{\approx}{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\underset{\approx}{E} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{u} \overset{\leftarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} + \overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} \underset{\sim}{u}\right) \quad \text{veya} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

ve dönme (rotasyon) tensörü

$$\underset{\approx}{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\underset{\approx}{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{u}\overset{\leftarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} - \overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}}\underset{\sim}{u}\right) \quad \text{veya} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

elde edilir.

Görülebileceği gibi, yer değiştirme gradyant tensörünün tüm bileşenleri birim ile mukayese edildiğinde küçük olmalıdır. Böylece, bileşenler bir radyan ile mukayese edildiğinde küçük olduğu zaman denklem (8) bir rijit dönme hareketini ifade eder ve şekil değiştirme $\underset{\sim}{\varepsilon}$ vektörü, birim izafi yer değiştirme vektörünün başlangıçta K noktasındaki yerel rijit cisim dönmesine atfedilemeyen kısmını ifade eder.

Yer değiştirme-gradyant bileşenleri $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ nin karelerinin ve çarpımlarının doğrusal terimler ile mukayese edildiğinde ihmal edilmesi durumunda bu küçük şekil değiştirme-küçük yer değiştirme tanımlamaları ortaya çıkar. Bu nedenle, bir yaklaşık temsil metallerin olağan elastisite teorisinde çok faydalı olabilir, ama elastik şekil değiştirmelerin çok büyük olduğu polimerik malzemelerde daha az faydalı ve belki de katiyen faydalı olamayacaktır.

Yer değiştirme-gradyant bileşenlerinin birim ile mukayese edildiğinde küçük olmaması durumunda şekil değiştirmeyi başlangıç durumundan tarifleme problemi küçük şekil değiştirme halindekinden çok daha zordur. Sonlu şekil değiştirme ya deforme olmuş cisim biçimi yada deforme olmamış cisim biçimi esas alınarak tanımlanabilir. İlk yaklaşım deforme olmamış cisim biçimindeki malzeme koordinatlarını kullanır iken ikincisi deforme olmuş cisim biçimindeki uzaysal koordinatları kullanır. Deforme olmamış biçim cinsinden formülasyon genellikle Lagrange formülasyonu olarak isimlendirilir iken deforme olmuş biçim cinsinden olanı Euler formülasyonu olarak isimlendirilir.

Deformasyon gradyant tensörünü tanımlamanın en kolay yolu deformasyon denklemlerini

kullanmaktır. Deformasyon-gradyant tensörünün deformasyon ile birlikte dönmeyide içermesi nedeniyle onu kullanan bünye denklemleri rijit cisim dönmesinden dolayı bir gerilme değeri tahmin etmeyecek şekilde inşa edilmelidirler. Basit bir doğrusal homojen gerilme-şekil değiştirme denklemi rijit cisim dönmesinden dolayı ortaya çıkabilecek gerilmeyi tahmin etmeme şartını sağlamak zorundadır.

Lagrange formülasyonu elastisitede en uygunu görünmektedir, çünkü genellikle elastisitede yük kaldırıldığı zaman cismin döneceği bir doğal deforme olmamış hal mevcut olduğu kabul edilir. Ancak hareketin veya dengenin gerilme denklemleri deforme veya o anki cisim biçimi için sağlanmak zorundadır ve bu nedenle deforme olmuş biçimde gerilme hali tanımlanır. Bir gerilme- şekil değiştirme denklemi yazılmak zorunda ise denklemde görünen tüm tensörler için aynı koordinat sistemini kullanabilmek için ya gerilmeler deforme olmamış biçime atfedilmelidir yada şekil değiştirmeler deforme olmuş biçime atfedilmelidir. Biz iki seçenekten yalnızca ikincisini kullanacağız.

Bir maddesel noktanın başlangıç $\underset{\sim}{X}$ konumundan

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}\left(\underset{\sim}{X}, t\right) \quad \text{veya} \quad x_i = (X_1, X_2, X_3) \tag{9}$$

deformasyon denklemleri ile tanımlı mevcut $\underset{\sim}{x}$ konumuna yer değiştirdiğini farz edelim. Deformasyon gradyantları bu denklemlerin sağ tarafındaki fonksiyonların gradyantlarıdır. Gradyantların dik kartezyen bileşenleri malzeme koordinatlarına göre türevlerdir. Deforme olmamış biçimi esas alan deformasyon gradyantı $\underset{\sim}{F}$ veya $\underset{\sim}{x}\overset{\leftarrow}{\underset{\sim}{\nabla}}$ ile gösterilir ve transpozu $\underset{\sim}{F}^T = \overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}}\underset{\sim}{x}$ dir. Deformasyon gradyant tensörü $\underset{\sim}{F}$ kısmi türevleri $\dfrac{\partial x_k}{\partial X_k}$ olan ve $\underset{\sim}{X}$ de keyfi sonsuz küçük bir $d\underset{\sim}{X}$ malzeme vektörünü $\underset{\sim}{x}$ de bir $d\underset{\sim}{x}$ vektörü ile

$$d\underset{\sim}{x} = \left(\underset{\sim}{x}\overset{\leftarrow}{\underset{\sim}{\nabla}} \cdot d\underset{\sim}{X}\right) = d\underset{\sim}{X} \cdot \overset{\rightarrow}{\underset{\sim}{\nabla}}\underset{\sim}{x} \tag{10}$$

nedeniyle

$$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{X} \quad \text{veya} \quad d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{11}$$

şeklinde ilişkilendirecek bir işlev gören dik kartezyen bileşenleridir. Dik kartezyen bileşenleri

$$[dx_k] = [x_{k,M}]\,[dX_M] \quad \text{veya} \quad [dx_k] = [dX_M]\,[\partial_M x_k] \tag{12}$$

şeklinde gösterilebilir. Her iki gösterim şekli aynı indis notasyonu

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_M} dX_M \tag{13}$$

ile gösterilebilir. Deformasyon gradyantının bileşenleri denklem (5) de sonlu olmasına rağmen iki komşu maddesel nokta arasındaki sonsuz küçük bir çizgi elemanının deformasyonunu göz önüne alıyoruz. Malzeme vektörü $d\underset{\sim}{X}$ küçük fakat sonlu olmadığı zaman eşleştirildiği $d\underset{\sim}{x}$ vektörün malzeme $d\underset{\sim}{X}$ vektörünün deforme olmuş konumu ile tamamen çakışmaz. Malzeme $d\underset{\sim}{X}$ vektörünün boyunun karesindeki değişimi göz önüne alırsak bileşenleri dik kartezyen koordinatlarda tariflenen şekil değiştirme $\underset{\approx}{E}$ tensörü

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\approx}{E} \cdot d\underset{\sim}{X} \quad \text{veya} \quad (ds)^2 - (dS)^2 = 2dX_I E_{IJ} dX_J \tag{14}$$

şeklinde tanımlanır. Green deformasyon tensörü $\underset{\approx}{C}$ deforme olmamış biçimi esas alır ve karesi alınmış boydaki değişim yerine belirli $d\underset{\sim}{X}$ elemanın deforme olduğu yeni eleman boyunun karesini

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\approx}{C} \cdot d\underset{\sim}{X} \\ (ds)^2 &= dX_I C_{IJ} dX_J \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde verir. (14) ve (15) denklemlerini karşılaştırarak deformasyon tensörü ve şekil değiştirme tensörü arasında aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$2\underset{\approx}{E} = \underset{\approx}{C} - \underset{\approx}{I} \quad \text{veya} \quad 2E_{IJ} = C_{IJ} - \delta_{IJ} \tag{16}$$

Deformasyon gradyantı cinsinden şekil değiştirme ve deformasyon tensörleri için ifadeleri elde edebilmek için (10) denklemini kullanarak $(ds)^2$ terimini

$$(ds)^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x} = \left(d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{F}^T\right) \cdot \left(\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{X}\right) = d\underset{\sim}{X} \cdot \left(\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}\right) \cdot d\underset{\sim}{X} \tag{17}$$

şeklinde yazabiliriz. Deformasyon tensörü için tanımlanan denklemler ile denklem (17) ile karşılaştırırsak bu durumda denklem (15)

$$\underset{\approx}{C} = \underset{\approx}{F}^T \cdot \underset{\approx}{F} \quad \text{veya} \quad C_{IJ} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} \tag{18}$$

olduğunu gösterir. Şekil değiştirme tensörleri için ifadeler denklem (16) dan elde edilebilir:

$$\underset{\approx}{E} = \frac{1}{2}\left(\underset{\approx}{F}^T \cdot \underset{\approx}{F} - \underset{\approx}{I}\right) \quad \text{veya} \quad E_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_I}\frac{\partial x_k}{\partial X_J} - \delta_{IJ}\right) \tag{19}$$

Şekil değiştirme ve deformasyon tensörleri simetriktir ve her biri gerçek asal değerlere sahiptir. Bunları küçük şekil değiştirme bileşenleri ile mukayese edebilmek için E_{11} ve E_{12} için yazalım. x_i ve X_i nin her ikisi için aynı koordinat eksenlerini ve indisler için küçük harf kullanarak

$$x_i = X_i + u_i \tag{20}$$

ve yer değiştirme bileşenleri ile

$$u_i = u_i\left(X_1, X_2, X_3, t\right) \tag{21}$$

ifadelerine sahip oluruz. Bu nedenle,

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right] \tag{22}$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right] \tag{23}$$

Yerdeğiştirmeler cinsinden denklem (19) de E_{ij} için genel ifade

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right] \tag{24}$$

şeklini alır. u_1, u_2, u_3 yer değiştirmelerinin X_1, X_2, X_3 malzeme koordinatlarına göre kısmi türevleri birim ile mukayese edildiğinde tümü çok küçük olduğu zaman bu türevlerin kareleri ve çarpımlarının doğrusal terimler ile mukayese edildiğinde ihmal edilebileceğini görürüz. Geriye kalan terimler küçük şekil değiştirme bileşenleridir. Büyük yer değiştirme teorisinin

doğrusal olmayan tesirlere neden olan yer değiştirme gradyantlarının karelerini içeren küçük yer değiştirme teorisinin bir genişletilmiş hali olduğu açıktır. Yer değiştirme gradyantları birim ile mukayese edildiğinde küçük değiller ise yapıda doğrusal olmayan tesirleri içeren bu terimlerin dikkate alınması zorunludur, çünkü şekil değiştirme yer değiştirmeye artık orantılı olamayacaktır [54, 55].

3.1 Büyük Yer Değiştirme Teorisinin Sonlu Elemanlar Metoduna Uygulanması

İki boyutlu bir problem için yer değiştirme gradyant vektörleri ve matrisler $\underset{\sim}{x}$ in fonksiyonu olarak

$$\underset{\approx}{E_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

ve

$$\underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_{x_1}^T & \theta_{x_2}^T \end{bmatrix}^T \tag{26}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$\theta_{x_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T \quad \text{ve} \quad \theta_{x_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \tag{27}$$

ve yer değiştirme gradyantlarını içeren matris

$$\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \theta_{x_1}^T & 0 \\ 0 & \theta_{x_2}^T \\ \theta_{x_2}^T & \theta_{x_1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{28}$$

olur. Green şekil değiştirme olarak isimlendirilen doğrusal olmayan şekil değiştirme ve yer değiştirme bağıntısı denklem (24) de doğrusal $\underset{\approx}{E_0}$ ve doğrusal olmayan $\underset{\approx}{E_L}$ yer değiştirme gradyantları cinsinden aşağıdaki gibi matris biçiminde yazılabilir :

$$\underset{\approx}{E} = \underset{\approx}{E_0} + \underset{\approx}{E_L} \tag{29}$$

burada

$$\underset{\approx}{E_l} = \frac{1}{2}\,\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\underset{\sim}{\theta} \tag{30}$$

Şayet bir virtüel yerdeğiştirme $d\underset{\sim}{u}$

$$d\underset{\sim}{u} = \left[\begin{array}{cc} du_1 & du_2 \end{array} \right]^T \tag{31}$$

ise, o zaman sonlu eleman formülasyonu geliştirmek için gerekli olan Green şekil değiştirmesindeki değişim $d\underset{\approx}{E}$

$$d\underset{\approx}{E} = d\underset{\approx}{E}_0 + d\left[\frac{1}{2}\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right] = d\underset{\approx}{E}_0 + \frac{1}{2}I_1 \tag{32}$$

olur. Burada

$$I_1 = d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right]\underset{\sim}{\theta} + \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta} \tag{33}$$

dır. Denklem (33) ü ele alırsak

$$I_1 = \left[\begin{array}{cc} d\theta_{x_1}^T & 0 \\ 0 & d\theta_{x_2}^T \\ d\theta_{x_2}^T & d\theta_{x_1}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \theta_{x_1}^T \\ \theta_{x_2}^T \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \theta_{x_1}^T & 0 \\ 0 & \theta_{x_2}^T \\ \theta_{x_2}^T & \theta_{x_1}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} d\theta_{x_1}^T \\ d\theta_{x_2}^T \end{array} \right]$$

$$I_1 = \left[\begin{array}{c} d\theta_{x_1}^T \cdot \theta_{x_1}^T \\ d\theta_{x_2}^T \cdot \theta_{x_2}^T \\ d\theta_{x_2}^T \cdot d\theta_{x_1}^T + d\theta_{x_1}^T \cdot d\theta_{x_2}^T \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \theta_{x_1}^T \cdot d\theta_{x_1}^T \\ \theta_{x_2}^T \cdot d\theta_{x_2}^T \\ \theta_{x_2}^T \cdot d\theta_{x_1}^T + d\theta_{x_1}^T \cdot d\theta_{x_2}^T \end{array} \right]$$

$$I_1 = 2\left[\begin{array}{cc} \theta_{x_1}^T & 0 \\ 0 & \theta_{x_2}^T \\ \theta_{x_2}^T & \theta_{x_1}^T \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} d\theta_{x_1}^T \\ d\theta_{x_2}^T \end{array} \right] = 2\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta} \tag{34}$$

Denklem (34) denklem (32) de yerine yazılırsa

$$d\underset{\approx}{E} = d\underset{\approx}{E}_0 + \frac{1}{2}\left(2\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta}\right) = d\underset{\approx}{E}_0 + \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)d\underset{\sim}{\theta} \tag{35}$$

elde ederiz. Sonlu eleman formülasyonunda bir eleman bünyesinde yerdeğiştirme n tane ayrık düğüm yerdeğiştirmesi $\underset{\sim}{p}$ nin bir fonksiyonu olarak

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{N}\,\underset{\sim}{p} \tag{36}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\underset{\sim}{p} = \left[\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{array} \right]^T \tag{37}$$

ve $\underset{\approx}{N}$ katsayıları eleman içinde başlangıç $\underset{\sim}{x}$ konumunun fonksiyonları olan bir şekil fonksiyonu dizinidir. Örneğin, u_1 için

$$u_1 = \sum_i^n N_i \left(u_1\right)_i \tag{38}$$

Denklem (38) den virtuel yer değiştirmeler $\underset{\sim}{u}$ virtuel düğüm yer değiştirmeleri $d\underset{\sim}{p}$ cinsinden

$$d\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{N}\, d\underset{\sim}{p} \tag{39}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şöyle ki, u_1 için

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \sum_i^n \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \left(u_1\right)_i \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \sum_i^n \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \left(u_1\right)_i \end{aligned} \tag{40}$$

Benzer ifadeler diğer yer değiştirmeler ve türevleri için de yazılabilir. Denklem (26) nın yer değiştirme gradyantları $\underset{\sim}{\theta}$

$$\underset{\sim}{\theta} = \underset{\approx}{G}\, \underset{\sim}{p} \tag{41}$$

doğrusal bağıntısı ile düğüm yer değiştirmeleri $\underset{\sim}{p}$ cinsinden yazılabilir. Burada $\underset{\approx}{G}$ gradyant matrisinin katsayıları $\underset{\approx}{N}$ şekil fonksiyonları matrisinde içerilen şekil fonksiyonlarının kartezyen türevleridir. Şöyle ki

$$\underset{\approx}{G} = \begin{bmatrix} \cdots & \underset{\approx}{I_2} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} & \cdots \\ \cdots & \underset{\approx}{I_2} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} & \cdots \end{bmatrix} \tag{42}$$

veya matris biçiminde

$$\underset{\approx}{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{43}$$

yazılabilir ve düğüm yer değiştirmeler

$$\underset{\sim}{p} = \begin{bmatrix} \left(u_1\right)_1 & \cdots & \left(u_1\right)_n & \left(u_2\right)_1 & \cdots & \left(u_2\right)_n \end{bmatrix}^T \tag{44}$$

Burada n elemandaki düğüm noktası sayısıdır. Denklem (29) un $\underset{\approx}{E}_0$ Doğrusal Green şekil değiştirme vektörü $\underset{\sim}{p}$ cinsinden

$$\underset{\approx}{E}_0 = \underset{\approx}{B}_0 \underset{\sim}{p} \tag{45}$$

şeklinde veya matris biçiminde

$$\underset{\sim}{p} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1}(u_1)_1 + \cdots + \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1}(u_1)_n \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2}(u_2)_1 + \cdots + \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2}(u_2)_n \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1}(u_2)_1 + \cdots + \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1}(u_2)_n + \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2}(u_1)_1 + \cdots + \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2}(u_1)_n \end{bmatrix}^T \tag{46}$$

yazılabilir. Burada $\underset{\approx}{B}_0$ sabit şekil değiştirme matrisi $\underset{\approx}{N}$ şekil fonksiyonları matrisinin kartezyen türevlerini içerir; şöyle ki,

$$\underset{\approx}{B}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} \tag{47}$$

$\underset{\approx}{E}_0$ nın değişimi $d\underset{\approx}{E}_0$

$$d\underset{\approx}{E}_0 = \underset{\approx}{B}_0 \, d\underset{\sim}{p} \tag{48}$$

olur. Nihayet, düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler $\underset{\sim}{p}$ cinsinden Green şekil değiştirme vektörü $\underset{\approx}{E}$ nin bileşenleri şimdi

$$\underset{\approx}{E} = \left[\underset{\approx}{B}_0 + \frac{1}{2} \underset{\approx}{B}_L \right] \tag{49}$$

şeklinde yazılabilir. Burada doğrusal olmayan şekil değiştirme matrisi

$$\underset{\approx}{B}_L = \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \underset{\approx}{G} \tag{50}$$

dir. Ayrıca denklem (49)

$$\underset{\approx}{E} = \underset{\approx}{B}^* \underset{\sim}{p} \tag{51}$$

biçimine de indirgenebilir. Burada

$$\underset{\approx}{B}^* = \underset{\approx}{B}_0 + \frac{1}{2} \underset{\approx}{B}_L \tag{52}$$

dir. Benzer şekilde denklem (35) den $\underset{\approx}{E}$ nin değişimi $\underset{\approx}{dE}$

$$\underset{\approx}{dE} = \underset{\approx}{B}\, \underset{\sim}{dp} \tag{53}$$

şeklinde yazılabilir. Burada şekil değiştirme matrisi

$$\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{B_0} + \underset{\approx}{B_L} \tag{54}$$

$\underset{\approx}{B_0}$ yalnızca şekil fonksiyonlarının bir fonksiyonudur, buna karşın $\underset{\approx}{B_L}$ şekil fonksiyonlarının vede yer değiştirmelerin bir fonksiyonudur. Bu nedenle, $\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)$ ifadesinin $\underset{\sim}{\theta}$ nın bir fonksiyonu olması nedeniyle $\underset{\approx}{E}$ de $\underset{\sim}{p}$ in bir doğrusal olmayan fonksiyonudur.

Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarının ilaveten faydalı bir basitleştirmesi $\underset{\approx}{B_0}$ matrisinin

$$\underset{\approx}{B_0} = \underset{\approx}{H}\, \underset{\approx}{G} \tag{55}$$

şeklinde yazarak yapılabilir. Burada mantık matrisi

$$\underset{\approx}{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

dir. Bu yolla, (52) ve (54) denklemlerinde tanımlanmış olan $\underset{\approx}{B}$ ve $\underset{\approx}{B_0}$ matrisleri

$$\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{H}\, \underset{\approx}{G} + \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \underset{\approx}{G} = \left[\underset{\approx}{H} + \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right] \underset{\approx}{G} \tag{57}$$

veya

$$\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{A_L}\, \underset{\approx}{G} \tag{58}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde

$$\underset{\approx}{B^*} = \underset{\approx}{H}\, \underset{\approx}{G} + \frac{1}{2}\, \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \underset{\approx}{G} = \left[\underset{\approx}{H} + \frac{1}{2}\, \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right] \underset{\approx}{G} \tag{59}$$

veya

$$\underset{\approx}{B^*} = \underset{\approx}{A^*_L}\, \underset{\approx}{G} \tag{60}$$

burada

$$\underset{\approx}{A}_L = \underset{\approx}{H} + \underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \tag{61}$$

$$\underset{\approx}{A}^*_L = \underset{\approx}{H} + \frac{1}{2}\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \tag{62}$$

3.2 Doğrusal Olmayan Denge Denklemleri

Şekil değiştirmiş cisim için denge denklemi virtüel dahili ve harici işler yardımıyla Lagrange koordinat sistemi cinsinden virtüel iş denkleminden [56–59].

$$\int_V \delta\underset{\approx}{E}^T \underset{\approx}{\sigma}\, dV = \int_V \rho\, \delta\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{q}\, dV + \int_A \delta\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{q}^\circ\, dA \tag{63}$$

şeklinde kurulabilir. Burada harici iş, başlangıçta şekil değiştirmemiş yüzey A üzerinden hesaplanan ve yüzey sınırlarına tesir eden

$$\underset{\sim}{q}^\circ = \begin{bmatrix} q_1^\circ & q_2^\circ & q_3^\circ \end{bmatrix} \tag{64}$$

şeklinde ifade edilen yüzey kuvvetlerinin $\underset{\sim}{\delta u}$ dan dolayı neden olduğu iştir ve şekil değiştirmemiş hacim V içinde birim kütlede cisim kuvvetleri

$$\underset{\sim}{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \tag{65}$$

ve de ρ şekil değiştirmemiş cisimin yoğunluğudur. Denklem (63) ile ifade edilen toplam Lagrange virtüel iş ifadesi (39) ve (53) nolu denklemler kullanılarak sonlu eleman bölümlemesi yardımıyla

$$\delta\underset{\sim}{p}^T \int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{\sigma}\, dV = \delta\underset{\sim}{p}^T \int_V \rho\underset{\approx}{N}^T \underset{\sim}{q}\, dV + \delta\underset{\sim}{p}^T \int_A \underset{\approx}{N}^T \underset{\sim}{q}^\circ\, dA \tag{66}$$

şeklinde yaklaşık ifade edilebilir. $\underset{\sim}{\delta p}^T$ teriminin keyfi olması nedeniyle (66) nolu denklem

$$\int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{\sigma}\, dV = \int_V \rho\underset{\approx}{N}^T \underset{\sim}{q}\, dV + \int_A \underset{\approx}{N}^T \underset{\sim}{q}^\circ\, dA \tag{67}$$

şeklinde yazılabilir. Kolaylık için (67) denkleminin sağ tarafını $\underset{\approx}{R}$ ile ifade edersek doğrusal olmayan denge denklemleri

$$\underset{\approx}{\psi}\left(\underset{\sim}{p}\right) = \int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{\sigma}\, dV - \underset{\approx}{R} = \underset{\approx}{\omega} - \underset{\approx}{R} = \underset{\approx}{0} \tag{68}$$

şeklini alır. Burada $\underset{\approx}{\psi}\left(\underset{\sim}{p}\right)$ artık terim olarak isimlendirilir, ve $\underset{\approx}{\psi}\left(\underset{\sim}{p}\right)$ artık terimi sıfır veya daha önceden belirlenen bir yakınsama değerini sağladığı zaman çözüm başarılmış kabul edilir. Çözüm adım adım yaklaşılır, şöyle ki bir yer değiştirme değeri hesaplanır ve sonra çözümün doğruluğu takip eden bu konum için artık değeri hesaplanarak değerlendirilir.

3.3 Doğrusal Olmayan Denge Denklemlerinin Çözüm Yöntemleri

Her bir adımda yeni bir yer değiştirme vektörünü elde edebilmek için aşağıdaki denklemin çözümünü elde etmek gereklidir :

$$\underset{\approx}{\psi} = \int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D}\, \underset{\approx}{B}^*\, \underset{\sim}{p}\, dV - \underset{\approx}{R} = \underset{\approx}{K_s}\, \underset{\sim}{p} \tag{69}$$

Burada $\underset{\approx}{K_s}$ secant direngenlik matrisi olarak isimlendirilir, simetrik değildir ve

$$\underset{\approx}{K_s} = \int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D}\, \underset{\approx}{B}^*\, dV \tag{70}$$

şeklinde tanımlanır. $\underset{\approx}{D}$ bünye katsayılarının simetrik bir matrisidir.

Birleştirilmiş (69) nolu doğrusal olmayan denklemler için doğrusal artımlı denge denklemlerine bir seri çözüm elde edilmesiyle alakalı çözüm algoritmalarında Newton-Raphson yöntemi kullanılır. Tam dengeli bir yol bulabilmek için $\underset{\approx}{R}$ bir seri yük arttırımı şeklinde uygulanır. Ardışık yaklaştırmalar bir yük attırımı ile $\underset{\approx}{\psi}\left(\underset{\sim}{p}\right) = 0$ oluncaya veya verilen bir yakınsama değeri sağlana dek devam ettirilir. Toplam yer değiştirmelere yeni bir yaklaşım

$$\underset{\sim i+1}{p} = \underset{\sim i}{p} - \underset{\approx}{\psi_i} \left.\frac{d\,\underset{\approx}{\psi}}{d\,\underset{\sim}{p}}\right|_i \tag{71}$$

şeklinde elde edilir. Yükler yer değiştirmeler ile değişmemek şartıyla (68) denkleminin değişimi $d\,\underset{\approx}{\psi}$ yi dikkate alırsak

$$d\,\underset{\approx}{\psi} = d \int_V \underset{\approx}{B}^T\, \underset{\approx}{\sigma}\, dV \tag{72}$$

veya

$$d\,\underset{\approx}{\psi} = \int_V \left(\underset{\approx}{B}^T d\,\underset{\approx}{\sigma} + d\,\underset{\approx}{B}^T\, \underset{\approx}{\sigma} \right) dV \tag{73}$$

elde ederiz. Bu ifade tekrar yazılarak

$$d\underset{\approx}{\psi} = \int_V \left(\underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{B}\, d\underset{\sim}{p} + d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \underset{\approx}{G} \right]^T \underset{\approx}{\sigma} \right) dV \tag{74}$$

veya

$$d\underset{\approx}{\psi} = \int_V \left(\underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{B}\, d\underset{\sim}{p} + \underset{\approx}{G}^T d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right) \right]^T \underset{\approx}{\sigma} \right) dV \tag{75}$$

şekline indirgenebilir. (75) nolu denklemin sağ tarafındaki ifadede $d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right]^T \underset{\approx}{\sigma}$ terimini dikkate alalım:

$$d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right]^T \underset{\approx}{\sigma} = d\begin{bmatrix} \theta_{x1}^T & 0 \\ 0 & \theta_{x2}^T \\ \theta_{x2}^T & \theta_{x1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\theta_{x1}^T & 0 & d\theta_{x2}^T \\ 0 & d\theta_{x2}^T & d\theta_{x1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{76}$$

veya

$$\begin{aligned} d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right]^T \underset{\approx}{\sigma} &= \begin{bmatrix} d\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} & 0 & d\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ 0 & d\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} & d\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \\ d\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ d\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. x_1 ve x_2 koordinat değişkenlerine göre yer değiştirmelerin türevlerinden

$$\begin{aligned} d\left[\underset{\approx}{A}\left(\underset{\sim}{\theta}\right)\right]^T \underset{\approx}{\sigma} &= [S] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} d\left(u_1\right)_1 \\ d\left(u_1\right)_2 \\ \vdots \\ d\left(u_1\right)_n \\ d\left(u_2\right)_1 \\ d\left(u_2\right)_2 \\ \vdots \\ d\left(u_2\right)_n \end{bmatrix} = \underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{G}\, d\underset{\sim}{p} \end{aligned}$$

Bu son ifadeyi (75) denkleminde yerine yazarak

$$d\underset{\approx}{\psi} = \int_V \left(\underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{B}\, d\underset{\sim}{p} + \underset{\approx}{G}^T \underset{\approx}{S} \underset{\approx}{G}\, d\underset{\sim}{p} \right) dV \tag{77}$$

elde edilir. Burada Piola-Kirchhoff gerilme matrisi, $\underset{\approx}{S}$,

$$\underset{\approx}{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \underset{\approx}{I}_2 & \sigma_{12} \underset{\approx}{I}_2 \\ \sigma_{12} \underset{\approx}{I}_2 & \sigma_2 \underset{\approx}{I}_2 \end{bmatrix} \tag{78}$$

dir. Şimdi (77) denklemini

$$d\underset{\approx}{\psi} = \underset{\approx}{K}_T\, d\underset{\sim}{p} \tag{79}$$

yazabiliriz. Burada

$$\underset{\approx}{K}_T = \int_V \left(\underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{B} + \underset{\approx}{G}^T \underset{\approx}{S} \underset{\approx}{G} \right) dV \tag{80}$$

integrali teğetsel direngenlik matrisi olarak isimlendirilir. (80) denklemini (71) denkleminde yerine yazarak, Newton-Raphson formulü

$$\triangle \underset{\sim i+1}{p} = \underset{\sim i+1}{p} - \underset{\sim i}{p} = -\left[\underset{\approx}{K}_T \right]_i^{-1} \underset{\approx}{\psi}_i \tag{81}$$

elde edilir.Teğetsel direngenlik matrisinin $\underset{\approx}{K}_T$ simetrik olması nedeniyle $\triangle \underset{\sim i+1}{p}$ bilinen çözüm yöntemleri ile belirlenebilir. Artık $\underset{\approx i}{\psi}$ değerinin sıfıra yaklaştırılması nedeniyle yer değiştirmeleri düzeltmek gereklidir. $\underset{\approx}{B}$ için (58) denklemini kullanarak $\underset{\approx}{K}_T$ matrisi

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{K}_T &= \int_V \left[\left[\underset{\approx}{A}_L \underset{\approx}{G} \right]^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{A}_L \underset{\approx}{G} + \underset{\approx}{G}^T \underset{\approx}{S} \underset{\approx}{G} \right] dV \\ \therefore \underset{\approx}{K}_T &= \int_V \underset{\approx}{G}^T \underset{\approx}{D}_G \underset{\approx}{G}\, dV \end{aligned} \tag{82}$$

Burada

$$\underset{\approx}{D}_G = \underset{\approx}{A_L}^T \underset{\approx}{D} \underset{\approx}{A}_L + \underset{\approx}{S} \tag{83}$$

(69) matris denklemi önceden belirlenmiş yakınsama kriteri başarılana dek, aşağıda tariflenen adımları tekrarlayarak ve artık değer matrisi değerlendirilerek çözülebilir:

1. Yer değiştirme artırımı aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\underset{\sim i+1}{\triangle p} = -\left[\underset{\approx}{K_T}\right]_i^{-1} \underset{\approx}{\psi_i} \tag{84}$$

2. Yeni yer değiştirme vektörü aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\underset{\sim i+1}{p} = \underset{\sim i}{p} + \underset{\sim i+1}{\triangle p} \tag{85}$$

3. Yeni konumdaki artık değer matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\underset{\approx i+1}{\psi} = \underset{\approx}{R} - \int_V \left[\underset{\approx}{B}\right]_{i+1}^T \underset{\approx i+1}{\sigma} dV \tag{86}$$

4. Yakınsama kriteri sağlanmadı ise (1-3) adımları tekrarlanır.

Tam Newton-Raphson yaklaşımı kullanıldığı zaman teğetsel direngenlik matrisi $\underset{\approx}{K_T}$, yukarıda tanımlanan her bir adımda değerlendirilecektir. Tercihi olarak, doğrusal olmayan davranışın gözlenilmediği adımlarda teğetsel direngenlik matrisi sabit alınabilir. Bu yöntem değiştirilmiş Newton-Raphson yaklaşımı olarak bilinir. Tam Newton-Raphson yaklaşımı durumunda, her yeni bir adımda teğetsel direngenlik matrisinin tekrar hesaplanılmasının çok daha fazla çaba gerektirmesi nedeniyle yakınsama çok daha hızlı gerçekleştirilir.

4 Akma Kriterleri

Akma kriteri katı içinde bir noktadaki gerilme haline bağlıdır, ve gerilme tensörünün bir fonksiyonudur. Noktadaki akma kriteri

$$F\left(\sigma_{ij}\right) = \kappa \tag{87}$$

sağlanırsa akma beklenilebilir. Burada σ_{ij} gerilme bileşenleridir ve κ bilinen bir sabitedir.

4.1 von Mises Akma Kriteri

von Mises kriteri

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2\right] \tag{88}$$

şeklinde ifade edilir. Burada σ_0 tek eksenli çekme akma gerilmesidir. Eşdeğer gerilmeler

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{S_{ij}S_{ij}} \tag{89}$$

şeklinde tariflenir. Burada deviatorik gerilme S_{ij}

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{90}$$

dir. Bu nedenle

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \tag{91}$$

ifadesi eşdeğer gerilme tek eksenli çekme akma gerilmesine eşit olduğu zaman akmanın başlayacağını ifade eder. Deviatorik gerilmeyi ölçmesi ve hidrostatik gerilmeden bağımsız olması nedeniyle sünek aluminyum gibi metallerde akmayı tahmin etmede kullanılabilir.

4.2 Düzeltilmiş von Mises Akma Kriteri

Yapıştırıcıların basma ve çekme altında farklı davranışlar sergilemesi nedeniyle hidrostatik gerilmeler deviatorik gerilmeler kadar önemlidir. Raghava ve Cadell [60] yapıştırıcıların akma davranışı için

$$\sigma_1\sigma_c = 3J_2 + (\sigma_0 - \sigma_c)\, J_1 \tag{92}$$

ifadesini önermişlerdir. Burada σ_c basma halinde akma gerilmesidir ve gerilme invaryantları

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \tag{93}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2\right) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \tag{94}$$

Crocombe ve Moult [61] bu ifadeyi

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\psi}\left[J_1(\psi - 1) + \left[J_1^2(\psi - 1)^2 + 12J_2\psi\right]^{\frac{1}{2}}\right] \tag{95}$$

şeklinde düzenlemiştir. Burada

$$\psi = \frac{\sigma_c}{\sigma_0} \tag{96}$$

4.3 Prandtl-Reuss Akma Kuralı

Prandtl-Reuss akma kuralı her bir yük adımında plastic şekil değiştirme artımının anlık gerilme deviatörüne orantılı olmasını gerektirir. Şöyle ki,

$$\frac{\varepsilon_{11}^p}{S_{11}} = \frac{\varepsilon_{22}^p}{S_{22}} = \frac{\varepsilon_{33}^p}{S_{33}} = \frac{\gamma_{12}^p}{S_{12}} = \frac{\gamma_{23}^p}{S_{23}} = \frac{\gamma_{31}^p}{S_{31}} = d\lambda \qquad \text{veya} \qquad d\varepsilon_{ij}^p = S_{ij} d\lambda \tag{97}$$

dir. Burada $d\lambda$ bir orantılık sabitidir. Eşdeğer plastik şekil değiştirme artımı $d\bar{\varepsilon}^p$

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} \tag{98}$$

şeklinde tanımlanır. O halde, (97) nolu denklem

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_{11}^p}{S_{11}} = \cdots = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tag{99}$$

olur ve Prandtl-Reuss gerilme-şekil değiştirme (97-99) denklemlerini kullanarak

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij} \qquad \text{veya} \qquad \{d\varepsilon^p\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} d\bar{\varepsilon}^p \tag{100}$$

şeklinde tekrar yazılabilir.

5 Malzemelerin Elasto-Plastik Davranışı İçin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları

Bir elasto-plastik malzeme için eşdeğer gerilme $\bar{\sigma}$ ve eşdeğer şekil değiştirme $\bar{\varepsilon}$ arasında bağıntı kurmak için genellikle tek eksenli çekme testine ihtiyaç duyulur. Bu durumda katı içinde herhangi bir noktada eşdeğer gerilme $\bar{\sigma}$ akma gerilmesine erişir ise o noktanın akmaya başladığı kabul edilir ve eşdeger gerilme $\bar{\sigma}$ artırılırsa plastik şekil değiştirme yükselir. Bu nedenle, toplam şekil değiştirme elastik şekil değiştirme $\bar{\varepsilon}^e$ ve plastik şekil değiştirme $\bar{\varepsilon}^p$ den oluşur:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p \tag{101}$$

ve toplam şekil değiştirme artırımı

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \tag{102}$$

Bu nedenle eşdeğer gerilme artırımı

$$\{d\bar{\sigma}\} = \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} \tag{103}$$

Gerilme artırımı $\{d\bar{\sigma}\}$ şekil değiştirme artırımı $\{d\bar{\varepsilon}\}$ cinsinden

$$\{d\bar{\sigma}\} = \underset{\approx}{D} \{d\varepsilon^e\} = \underset{\approx}{D} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) \tag{104}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\underset{\approx}{D}$ elastiklik modulü matrisidir. Akma noktasının ilerisinde eşdeğer gerilme-şekildeğiştirme eğrisinin eğimi

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \tag{105}$$

şeklinde bulunabilir ve plastik şekil değiştirme artırımı

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{1}{H} \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \{d\sigma\} \tag{106}$$

şeklinde yazılabilir. (100) denklemini (104) denkleminde yerine yazmak ve (106) denklemi ile birleştirmek

$$\{d\sigma\} = \frac{H \underset{\approx}{D}}{H + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \underset{\approx}{D} \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \{d\varepsilon\} \tag{107}$$

ifadesini verir. (107) denklemi (106) denklemini yerine yazılırsa

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \underset{\approx}{D}}{H + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \underset{\approx}{D} \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \{d\varepsilon\} = \underset{\approx}{W} \{d\varepsilon\} \tag{108}$$

elde edilir. Nihayet, gerilme artırımı ve şekil değiştirme artırımı arasındaki bağıntı

$$\{d\sigma\} = \left\{\underset{\approx}{D} - \underset{\approx}{D} \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} \underset{\approx}{W}\right\} \{d\varepsilon\} = \underset{\approx}{D_{ep}} \{d\varepsilon\} \tag{109}$$

olur. Burada $\underset{\approx}{D_{ep}}$ elasto-plastik modül matrisidir. Şekil değiştirme pekleşme parametresi H nin $\underset{\approx}{D_{ep}}$ de eşdeğer gerilme-eşdeğer plastik şekil değiştirme $(\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}^p)$ eğrisinin eğimi olması nedeniyle şekil değiştirme pekleşme parametresinin değerlendirilmesi elasto-plastik problemin çözümünde gereklidir. Bu maksatla, deneysel belirlenmiş eşdeğer gerilme-eşdeğer şekil değiştirme eğrisini temel alan orantılık sınırı ötesinde çoklu pekleşme modeli kolaylıkla kullanılabilir [58].

6 Doğrusal Olmayan Denge Denklemlerine Ek İfadeler

Malzemenin (yapıştırıcı veya metal) doğrusal olmayan davranışları doğrusal olmayan denge denklemlerinde dikkate alınması gerekli ifadeleri doğurur. Şöyle ki, (68) nolu

$$\underset{\approx}{\psi}\left(\underset{\sim}{p}\right) = \int_V \underset{\approx}{B}^T \underset{\approx}{\sigma}\, dV - \underset{\approx}{R} = \underset{\approx}{\omega} - \underset{\approx}{R} = \underset{\approx}{0}$$

denkleminde küçük şekil değiştirme-küçük yerdeğiştirme teorisi

$$\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{B_0} \text{ ve } \underset{\approx}{\sigma} = \underset{\approx}{D}\,\underset{\approx}{B_0}\,\underset{\sim}{p} \tag{110}$$

olmasını gerektirir. Burada $\underset{\approx}{B_0}$ şekil fonksiyonlarının türevlerini içeren bir matristir. Ancak, küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi

$$\underset{\approx}{B} = \underset{\approx}{B_0} + \underset{\approx}{B_L} \text{ ve } \underset{\approx}{\sigma} = \underset{\approx}{D}\left(\underset{\approx}{B_0} + \frac{1}{2}\,\underset{\approx}{B_L}\right)\underset{\sim}{p} \tag{111}$$

olmasını gerektirir. Burada $\underset{\approx}{B_L}$ şekil fonksiyonlarının ve yerdeğiştirmelerin türevlerini içeren bir matristir. Plastisite problemlerinde $\underset{\approx}{D}$ modül matrisinin sabit olmaması nedeniyle bu matris gerilmede bir artışı şekil değiştirmede bir artışa ilişkilendiren elastik-plastik $\underset{\approx}{D_{ep}}$ modül matrisine dönüşür. Bu doğrusal olmayan (68,110,111) denklemleri (1.3) bölümünde belirtilen yöntemler ile çözülür. Ayrıntılı sayısal çözüm yöntemleri [56–58] nolu referanslarda bulunabilir.

7 Zaman Boyutunda Çözümleme (Dinamik Analiz)

Belirgin (explicit) dinamik analiz bir açık integrasyon işlemine dayanır. Yerdeğiştirme vektörü cinsinden cismin hareket denklemlerinin sonlu merkezi farklar yöntemini kullanarak zamana göre integrali alınır:

$$\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+\frac{1}{2})} = \underset{\sim}{\dot{u}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2}\underset{\sim}{\ddot{u}}^{(i)} \tag{112}$$

$$\underset{\sim}{u}^{(i+1)} = \underset{\sim}{u}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)}\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+\frac{1}{2})} \tag{113}$$

Burada $\underset{\sim}{\dot{u}}$ hız vektörünü ve $\underset{\sim}{\ddot{u}}$ ivme vektörünü ifade eder. $^{(i)}$ üsteli artırım numarasını ve $^{(i-\frac{1}{2})}$ ve $^{(i+\frac{1}{2})}$ ara artış değerlerini göstermektedir. Merkezi farklar integral operatörü açıktır; şöyle ki, önceki zaman arttırımından bilinen $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i-\frac{1}{2})}$ ve $\underset{\sim}{\ddot{u}}^{(i)}$ vektörleri kullanılarak kinematik durum/hal ilerletilebilir. Belirgin integrasyon kuralı basittir ve belirgin dinamik yöntemi ile ilgili hesaplama etkinliğini kendiliğinden oluşturmaz. Belirgin dinamik yöntemi ile ilişkili hesaplama etkinliğini sağlayabilmek için diagonal eleman kütle matrisini kullanmak çözümdür. Şöyle ki, attırımın başındaki ivme vektörünü hesaplamak için kullanılan kütle matrisinin tersi üç eksenlidir:

$$\underset{\sim}{\ddot{u}}^{(i)} = \underset{\approx}{M}^{-1} \cdot \left(\underset{\approx}{F}^{(i)} - \underset{\approx}{I}^{(i)} \right) \tag{114}$$

Burada $\underset{\approx}{M}$ kütle matrisi, $\underset{\approx}{F}^{(i)}$ uygulana yük vektörünü ve $\underset{\approx}{I}^{(i)}$ iç kuvvet vektörünü ifade eder. Belirgin analiz iterasyon ve teğet direngenlik matrisi gerektirmez. Ancak, özel bir itina başlangıç şartları olan ortalama $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+\frac{1}{2})}$ ve $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i-\frac{1}{2})}$ vb. için gereklidir. Hız vektörleri

$$\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+1)} = \underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2}\Delta t^{(i+1)} \underset{\sim}{\ddot{u}}^{(i+1)} \tag{115}$$

şeklinde ortalama hızların bir doğrusal interpolasyonu olarak hesaplanır ve kullanılır. Merkezi farklar operatörü niğinden bir noktadan başlamaz, çünkü $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(-\frac{1}{2})}$ ortalama hız vektörünün değerinin tanımlanmasını gerektirir. Hız ve ivme vektörlerinin ($t = 0$) anındaki başlangıç değerlerini sıfıra eşitleriz. Takip eden şartları savunabiliriz:

$$\underset{\sim}{\dot{u}}^{(+\frac{1}{2})} = \underset{\sim}{\dot{u}}^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta t^{(1)} \underset{\sim}{\ddot{u}}^{(0)} \tag{116}$$

Takip eden zaman adımındaki $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i+\frac{1}{2})}$ hız vektörünü elde etmek için (116) denklemi (112) denkleminde yerine yazılırsa $\underset{\sim}{\dot{u}}^{(i-\frac{1}{2})}$ vektörü için

$$\underset{\sim}{\dot{u}}^{(-\frac{1}{2})} = \underset{\sim}{\dot{u}}^{(0)} - \frac{1}{2}\Delta t^{(0)} \underset{\sim}{\ddot{u}}^{(0)} \tag{117}$$

sonucuna varılır. Belirgin dinamik yöntemin birçok küçük zaman adımı arttırımlarını gerektirdiği ve zaman integrasyonunun kararlılığı için stabilite şartlarını gerektirdiği açıktır [26, 56–58].

8 Katmanlı Kompozitler İçin Hasar Kriterleri

Fiber takviyeli kompozit yapılar sünek (metal) malzemelerin davranışlarından farklı mekanik davranışlar sergilerler. Bir matris ve fiber malzemesinin tek bir malzemeyi teşkil etmeleri ve faydalı mekanik özelliklerini yeni malzeme yapısına yansıtmalarından dolayı bu davranış farklılığı ortaya çıkar. Dinamik yükler altında kompozit malzemede oluşan hasar tipleri matris, fiber ve matris-fiber arayüzeylerinde olmak üzere farklı mekanizmalar sergiler. Çekme ve basma altında fiber veya matrisin deformasyonu veya matris malzemesinin çekme, basma ve kayma yüklerine gösterdiği deformasyon davranışı birbirinden farklı mekanizmalara sahiptir. Bu alanda araştırmacıların otuz yılı aşkın teorik ve deneysel çalışmaları iki veya üç boyutlu deformasyon tipine bağlı kullanılabilir hasar modelleri ve kriterlerini geliştirmesine imkan sağlamıştır. Bu kriterler, kırılma mekaniği temelli teorilere, genel ya da özel hasar tiplerinin belirlenmesi üzerine kurulan teorilere ve düzlem içi ya da tabakalar arası hasarların tespitine yönelik teorilere dayanarak sınıflandırılabilir. Bu proje kapsamındaki çalışmamızda yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli kompozit plakaların düşük hızlı darbe davranışları incelenirken, kompozit plakalarda meydana gelebilecek hasar tiplerinden düzlem içi ve tabakalar arası hasar tipleri dikkate alınmıştır. Bu hasar tiplerine yönelik daha çok tek bir tabakanın tüm gerilme bileşenlerini dikkate alan hasar modelleri kullanılmıştır.

8.1 Fiber Hasar Kriterleri

Fiber takviyeli plastik esaslı kompozit plakalarda ortaya çıkabilecek fiber hasarları çekme ve basma yüküne maruz kalmalarına göre sınıflandırılabilir. Her bir kompozit tabakada fiberlerde çekmeden kaynaklanan hasarların sebebi fiberin yük taşıma kabiliyetini kaybetmesidir. Şayet yükü taşıyacak yeterli hasarsız fiber demeti tabaka içinde kalmaz ise, çekme yükü altında fiber kritik durumdadır. Çekme altında fiber hasarlarını tahmin edebilmek için birçok araştırmacı çekme deneylerinden elde edilen en büyük gerilme ya da en büyük şekil değiştirme

değerlerini esas almışlardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde en iyi sonuç veren teorilerden birisini Hashin 1980 yılında yaptığı çalışma ile bilim dünyasına sunmuştur [1]. Hashin çekme altında üç boyutlu fiber hasar kriterinde

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2}\left(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2\right) \geqslant 1 \tag{118}$$

1, 2 ve 3 yönleri sırasıyla fiber ekseni, düşey ve kalınlık boyunca yönü tarif etmektedir. X_T fiber yönünde en büyük normal gerilme, S_{12} laminanın kayma gerilmesi değeri olup deneysel olarak tespit edilen sabit değerlerdir. σ_1, τ_{12} ve τ_{13} analizler sırasında çözüm adımlarından elde edilen gerilmeler olup sırasıyla fiber yönündeki normal gerilme değerini, 1-2 ve 1-3 düzlemlerindeki kayma gerilmelerini temsil etmektedir. Bu hasar kriterinin uygulanabilmesi için $\sigma_1 > 0$ olması gerekmektedir. Aksi takdirde fiber basma altında olacaktır ve uygulanacak kriter değişecektir.

Fiber basma yükü altında ortaya çıkan diğer bir hasar tipine maruz kalabilir. Basma altında fiberde meydana gelebilecek hasarın sebebi mikro-burkulma (*micro-buckling*) ve kıvrılma (*kinking*) bandının oluşmasıdır. Aslında bu iki sebep bir birinden farklı hasar tiplerini ifade ederler. Mikro-burkulma genel bir hasar tipi iken, kıvrılma daha yerel mikroyapı kusurlardan oluşan hasar tipi olarak ortaya çıkar. Mikroburkulma hasar modellerinden olan literatürde kabul görmüş 1974 yılında Greszczuk [62], tarafından geliştirilen hasar kriteri analizlerimizde kullanılmıştır. Greszczuk tarafından geliştirilen hasar kriteri

$$\sigma_1 \geq \frac{G_{12}^m}{1 - V_f} \tag{119}$$

şeklindedir. Burada G_{12}^m matrisin kayma modülü, V_f fiber hacimsel oranını temsil etmektedir. Çözüm adımında kompozit plakanın her bir elemanında elde edilen 1 yönündeki normal gerilme σ_1 değeri $\frac{G_{12}^m}{1-V_f}$ değerini aştığı zaman ilgili elemanda fiber, basma altında hasara uğramış kabul edilmektedir.

8.2 Matris Hasar Kriterleri

Katmanlı kompozit yapılarda matris hasarları karmaşık bir yapıya sahiptir. Matrisdeki çatlak genel olarak kusurlu bölgede ya da matris fiber arayüzeyinde başlar, tabaka boyunca yığılır ve kritik çatlak bölgesi boyunca hasar oluşmasına öncülük eder. Fiber takviyeli kompozit yapılarda matrisin çekme ve basma altında maruz kalabileceği hasar başlangıcını tahmin etmek için hasar kriteri yine Hashin tarafından 1980 yılında ortaya atılmış ve günümüze kadar bir çok gerçek deneyde başarılı tahminler sergileyen Hashin'in çekme altında üç boyutlu (3B) matris, Hashin'in basma altında üç boyutlu (3B) matris hasar kriterleri sayısal analizlerde yaygın kullanılmıştır [1]. Hashin'in çekme altında üç boyutlu matris hasar kriteri

$$\frac{(\sigma_2+\sigma_3)^2}{Y_T^2}+\frac{(\tau_{23}^2-\sigma_2\sigma_3)}{S_{23}^2}+\frac{(\tau_{12}^2-\tau_{13}^2)}{S_{12}^2}\geqslant 1 \tag{120}$$

ve Hashin'in basma altında üç boyutlu matris hasar kriteri

$$\frac{\sigma_2}{Y_C}\left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2-1\right]+\left(\frac{\sigma_2}{2S_{23}}\right)^2+\left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2\geqslant 1 \tag{121}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada σ_1, σ_2, σ_3, τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} her bir noktadaki gerilme bileşenleri, Y_T, S_{12}, S_{23} deneysel olarak tespit edilen sabit üst dayanım değerleri olup sırasıyla matrisin çekme altındaki en büyük gerilme değeri, 1-2 ve 2-3 düzlemlerindeki laminanın kayma gerilmesi değerlerini temsil etmektedirler. (121) eşitliği farklı olarak matrisin basma altındaki en büyük gerilme Y_C değerini içerir.

8.3 Kayma Hasar Kriteri

Çekme ve basma yüklerine maruz fiber ve matris için toplam dört hasar kriteri analizlerimizde kullanılmıştır. Ayrıca, düzlem içi matris hasarını kayma gerilmelerine dayanarak değerlendiren ve 1980 yılında Hashin tarafından önerilen düzlem içi matris hasar kriteri

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2+\left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2\geqslant 1 \tag{122}$$

dikkate alınmıştır [1].

8.4 Katmanlararası Ayrılma (Delaminasyon) Hasar Kriteri

Katmanlı kompozitlerin hasar tipleri arasında her bir katmanın diğer komşu katmanlardan ayrılması sıkça karşılaşılan bir durumdur. Katmanlar arası arayüzeyler boyunca normal ve kayma gerilme bileşenlerinin değerlerine bağlı olarak ayrılma başlamasını tahmin edebilmek üzere bir çok çalışma literatürde mevcuttur. Mevcut çalışmaların çoğunda kalınlık boyunca normal ve kayma gerilme seviyeleri, bir kısmında ise fiber yönündeki gerilme değerleri kullanılmıştır. Analizlerimizde Hashin tarafından önerilen

$$\left(\frac{\sigma_3}{Z_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{S_{31}}\right)^2 \geqslant 1 \tag{123}$$

ayrılma kriteri kullanılmıştır [1]. Burada diğer hasar kriterlerinden farklı olan Z_T parametresi kalınlık boyunca matrisin çekme altında en büyük gerilme değerini temsil etmektedir. $Z_T = Y_T$ olarak analizlerde kullanılmıştır.

9 Yapıştırıcı İle Birleştirilmiş Katmanlı Kompozit Plakaların Dinamik Yük Altında Hasar Davranışı

9.1 Motivasyon: Uygulama Araştırma Problemi

Katmanlı kompozit yapılar fonksiyonellikleri nedeniyle, otomotiv, uzay ve denizcilik alanlarında bir mühendislik yapı elemanı olarak tercih edilmektedir. Kompozit malzemeler iki veya daha fazla temel malzemenin özgün özelliklerini birleştirmek ve daha iyi özelliklerde bir malzeme elde edebilmek amacıyla geliştirilmektedir. İnsan kemiği ve bambu ağacı doğadaki kompozit malzemelere, kerpiç ise insanoğlunun yıllar önce geliştirdiği ve halen kullandığı kompozit malzemeye en güzel örnekler olarak verilebilir [63].

Farklı endüstri alanlarında kompozit malzemelerin başlıca tercih sebepleri; hafif olmaları, yüksek mukavemet/ağırlık oranı, korozyon direnci, yüksek yorulma ömrü, v.b. gibi özelliklere sahip olmalarıdır. Yapılan tüm mühendislik tasarımlarında enerji verimi ve hafiflik ortak temel faktördür. Yüksek mukavemetli taşıyıcı malzeme fiberler (iplikçikler) ve bunları bir

arada tutan nispeten daha düşük mukavemetli fakat sünek malzemeler tipik kompozit yapının bileşenleridir. Matris malzemesinin düşük yoğunluklu olması fiber takviyeli kompozitlerin hafif olmasını sağlar. Bu özellik enerji verimi ve hafiflik açısından kompozit yapıları diğer malzemelerden yapılmış yapılara üstün kılar [63, 64].

İdeal mühendislik tasarımları içerdikleri yapının hiçbir eklenti veya birleştirmeye sahip olmamasını gerektirir. Geometrik süreksizlik ve birleştirme bölgeleri yükün yapı içinde düzenli dağıtılmasını ve aktarılmasını engellemesi ve tersine gerilme yığılmalarına neden olması nedeniyle genelde bu bölgeler yüke zayıf bölgeler olarak değerlendirilir. Şöyle ki, yerel hasarların oluşması bu bölgelerde beklenir. Ancak uygulamada süreksiz, eklentisiz veya birleştirmesiz yekpare büyük boyutlarda yapı inşa etmek mümkün değildir. Bu nedenle söz konusu olumsuzlukları mümkün olduğunca azaltan çeşitli imalat ve konstrüksiyon yöntemleri kullanılarak bu yapılar inşa edilir. Son yıllarda kimya alanındaki gelişmeler yapıştırıcıların yüksek güvenlik gerektiren mühendislik yapıların elemanlarını birleştirmekte kullanımasını mümkün kılmıştır. Bu yapıştırıcılar statik, dinamik yükler altında ve sert çevre şartlarında hizmet verebilecek şekilde geliştirilmiş ve özellikleri sürekli iyileştirilmektedir [30, 31, 65, 66]. Yapıştırıcı bağlantılarının en önemli iyi özellikleri: yükü geniş bir yapışma alanına yayar ve bu alan üzerinden iletilmesini sağlar, alışılmış birleştirme yöntemlerindeki delik açma ve dolayısıyla mukavemet zayıflamasını ortadan kaldırır, farklı malzemelerden imal edilmiş yapı elemanlarının birleştirilmesine, farklı geometride birleştirilmesine imkan tanır. Özellikle kompozit malzemelerin birleştirilmesinde katmanların delme işlemi esnasında zarar görmesini ortadan kaldırır ve alanda ciddi deneysel ve teorik araştırma gerçekleştirilmiştir [67–69].

Yapıştırıcı malzemesi yük altında elastik ve plastik tarzda deforma olma eğilimi gösterir. Aynı zamanda viscoelastik bir bünyesel davranışada sahiptir. Yapıştırıcının elasto-plastik davranışı önceki bölümlerde geliştirilen doğrusal olmayan malzeme davranışı modelleri incelenebilir. Ayrıca yapıştırıcı bağlantıları şekil değiştirir iken dönerler, dolayısıyla yük ve şekil değiştirme ilişkisi doğrusal olmaktan uzaklaşır. Kısaca geometrik bakımdan doğrusal ol-

mayan bir davranış sergilenir ki, bu davranışın bünyesel doğrusal olmayan malzeme davranışıyla ilişkisi yoktur, fakat malzeme üzerindeki yük dağılımını belirgin etkiler. Bünyesel doğrusal olmayan davranış büyük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi, geometrik bakımdan doğrusal olmayan bağlantı davranışıda küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi ile çözümlenebilir. Ancak katmanlı kompozit plakaların davranışı farklılık arz eder, hasar tiplerini tahmin edebilmek için fiber ve matris malzemeleri için ayrı ayrı uygun hasar kriterlerinin uygulanması gereklidir. Literatürde halen bakir olan yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit plakaların dinamik (düşük hızda darbe) yükleri altındaki davranışı araştırma projesine temel teşkil eden teorik modellemenin uygulama problemi olarak seçilmiştir. Deformasyonların çok kısa zaman aralığında ve yüksek hızda gelişmesi doğrusal olmayan bünye davranışlarını bu problem için daha belirgin kılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemini ileri mühendislik problemlerine uyarlamamıza fırsat veren günümüz matematik yazılımlarının birçoğu kapalı kodlar olup kullanıcının etkin kullanımına ve kod gövdesine müdahaleye izin vermemektedir. ABAQUS® sonlu elemanlar yazılımı açık kod geliştirilmesine ve bu kodun kendi gövdesine eklenmesine izin vermektedir. Kullanıcı ilgilendiği sınır ve/veya başlangıç değer problemlerini kendi geliştirdiği teorik modeli FORTRAN dilinde hazırladığı UMAT ve VMAT modülleri yardımıyla ABAQUS® yazılımına uyarlayabilmekte ve ABAQUS® de mevcut çözüm algoritmaları yardımıyla problemini çözebilmektedir. Bu nedenle ABAQUS® yazılımı bahsedilen teorinin araştırma problemine uyarlanmasında sayısal çözümleme aracı olarak tercih edilmiştir.

9.2 Teorik Model ve Deney Numunesi

Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakaların düşük hızlı darbe davranışı analizleri üç farklı yapıştırıcı kalınlığında (t_2 = 0.2, 0.5 ve 1.0 mm), beş farklı fiber açısında (α = 0, 30, 45, 60 ve 90°) ve vurucu kütlesi sabit olup (m = 5.045 kg) ve (v = 2, 3 ve 4 m/s) üç farklı vurucu hızına tekabül eden enerji seviyelerinde (E = 10,

23 ve 40 J) ABAQUS® sonlu elemanlar yazılımına teori uyarlanarak gerçekleştirilmiştir. Kompozit plakalar ve yapıştırıcı tabakası üç boyutlu (3B) solid (katı) eleman kullanılarak modellenmiştir. Yapıştırıcı tabakası için Araldite 2015, endüstriyel yapıştırıcı kullanılmış olup izotropik elasto-plastik (Şekil 1), kompozit plakalar ortotropik elastik malzeme modeline sahiptir (Tablo 1). Vurucunun şekil değiştirmediği kabul edilerek, işgal ettiği hacim rijit elemanlar ile modellenmiştir.

Yapıştırıcı tabakası kalınlığı boyunca 4 katmana bölünmüş ve her katman kalınlığı boyunca bir eleman kullanılmıştır. Katmanlı kompozit plaka her biri standart 0.125 mm kalınlıkta olan sekiz katmandan imal edildiği farz edilmiştir. Bu nedenle katmanlı kompozit plakanın sonlu elemanlar modeli oluşturulurken kompozit plakalar sabit $t_1 = t_3 = 2$ mm kalınlığında sekiz katmanlı olarak modellenmiştir. Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakaların teorik modeli oluşturulurken ASTM D7136 standartları temel alınmıştır [70]. ASTM D7136 standartlarına göre numune boyutlarına uygun hazırlanan teorik modelin geometrisi Şekil 2 de gösterilmiştir. ABAQUS® sonlu elemanlar yazılımı kullanarak modellenen sistemin ağ yapısının üstten ve yandan görünüşleri ile yapıştırıcı tabakası ve kompozit plakaların kalınlık boyunca ayrıntı görünüşleri Şekil 3 de gösterilmektedir. ABAQUS® yazılımında modellenmesi Python programlama dili kullanılarak parametrik olarak gerçekleştirilmiştir. Kompozit plakaların her biri 47984, yapıştırıcı tabaka 23992 elemana sahip iken bağlantının tamamı 145727 düğüm noktasından oluşmaktadır. Katmanlı kompozit plakanın her bir tabakasının hasar tipini değerlendirmek üzere FORTRAN dilinde geliştirdiğimiz UMAT ve VMAT alt programlarında kullanılan fiber ve matrisin mekanik özellikleri Tablo 2 de verilmiştir.

10 Sayısal Analiz Sonuçları

Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakalardan üretilen katmanlı bağlantıların düşük hızlı darbe davranışlarından elde edilen sayısal sonuçlar; yapıştırıcı

kalınlığı, fiber açısı ve darbe enerjisi, kinetik enerji, plastik kayıp enerjisi, temas kuvveti gibi temel parametrelerin kalıcı deformasyonlar, yapıştırıcı tabakasındaki elasto-plastik şekil değiştirmeler, kompozit plakaların kalınlığı boyunca her katmanında ortaya çıkan hasarın tipi ve ilerleyişi, hasar alanlarının yayılımı üzerine etkileri dikkate alınarak incelenmiştir. Takib eden alt bölümler bu sayısal sonuçların sunulması ve değerlendirilmesini kapsamaktadır. Temel tasarım parametrelerinin hasar tipi üzerindeki tesirleri analiz edilmektedir.

10.1 Yapıştırıcı Kalınlığı, Fiber Açısı ve Darbe Enerjisi

Fiber açısının yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların darbe davranışları üzerine etkisini incelemek amacıyla $\alpha = 0, 30, 45, 60, 90^\circ$ fiber açıları, $t_2 = 0.2,\ 0.5,\ 1.0$ mm yapıştırıcı kalınlıklarına sahip numunelerin darbe analizleri gerçekleştirilmiştir. İlk analizlerde vurucu hızı $v = 2$ m/s, kütlesi $m = 5.045$ kg, darbe enerjisi $E = 10$ J değerlerinde sabit tutulmuştur. Darbe analizlerinden elde edilen toplam kinetik enerji, plastik kayıp enerjisi, temas kuvveti ve alt plaka arka yüzey orta noktasından alınan düşey yer değiştirmenin zamana göre değişim grafikleri Şekil 4 de gösterilmiştir. Genel olarak üç farklı yapıştırıcı kalınlığı için söz konusu büyüklüklerin zamana göre değişimleri benzerdir ve seviyelerinde belirgin bir farklılık gözlenmemektedir. Fiber açısının 0° değerinde fiberler kompozit plakaların uzun kenarı boyunca (1 yönünde) yönlendirilmiş durumdadırlar. Plakaların kare olmayıp dikdörtgen olmaları fiberlerin 0° ile 90° açılarda farklı davranışlar göstermesine sebep olmuştur. Bu netice plakaların en ve boy doğrultularında farklı direngenliklere sahip olmasındandır. Fiberlerin 90° fiber açısına sahip oldukları durumda, fiberler kompozit plakaların kısa kenarı (2 yönünde) boyunca yönlenmiş durumda olduklarından dolayı, vurucunun çarptığı orta noktadan alınan moment kolu 0° fiber açısına göre kısalmakta, kompozit plaka 90° fiber açısında daha rijit bir yapıya sahip olmaktadır.

90° fiber açısında kompozit plakalar daha rijit olduklarından yapıştırıcı tabakası üzerinde oluşan kalıcı deformasyonların artmasına, dolayısı ile daha rijit iki plaka arasında kalan

yapıştırıcı tabakasının diğer fiber açısı değerlerine göre fazladan ezilmesine sebep olmuştur. Her üç yapıştırıcı kalınlığı için fiber açısının 90° değeri için oluşan plastik kayıp enerjileri artmakta, darbe sonrası sistemde kalan kinetik enerji değerleri azalmaktadır. Her üç yapıştırıcı kalınlığı için en büyük temas kuvveti ve en düşük yerdeğişmeler yine 90° fiber açısında oluşmaktadır (Şekil 4a). Yapıştırıcı tabakası tarafından harcanan plastik kayıp enerji değeri $t_2 = 0.2$ mm yapıştırıcı kalınlığında, 90° fiber açısında 3.5 J iken 0° fiber açısında 2.6 J değerindedir. Yapıştırıcı kalınlığı $t_2 = 0.5$ mm için sırasıyla 3.2 J, 2.4 J, $t_2 = 1.0$ mm için sırasıyla 3 J, 2.2 J olarak gerçekleşmiştir (Şekil 4b). Fiber açısının 90° ile 0° değerlerinin temas kuvveti üzerine etkileri incelenecek olur ise, $t_2 = 0.2$ mm yapıştırıcı kalınlığında 90° fiber açısında en büyük temas kuvveti 9 kN, 0° fiber açısında temas kuvveti 7.8 kN olarak gerçekleşmiştir. Yapıştırıcı kalınlığının diğer iki değeri içinde temas kuvvetlerinde durum aynıdır. 90° fiber açısında en büyük temas kuvveti oluşurken, 0° fiber açısında düşük temas kuvveti görülmektedir (Şekil 4c). Fiber açısının etkileri en iyi olarak yer değiştirme grafiklerinde görülmektedir. Yapıştırıcı kalınlığının $t_2 = 0.2$ mm değerinde beş farklı fiber açısı için elde edilen sonuçlar incelenecek olur ise, 0° den 90° ye sırasıyla beş farklı fiber açısı için elde edilen en büyük yer değiştirme değerleri sırasıyla 2.5, 2.4, 2.2, 2.0 ve 1.8 mm olmuştur. 0° fiber açısında plakalar en büyük çökmeye sahip iken fiber açısının artması ile plakaların rijitlikleri artmış ve çökme miktarları azalmıştır. 90° fiber açısında en düşük çökme elde edilmiştir. Aynı durumu diğer iki yapıştırıcı kalınlığında da görmek mümkündür (Şekil 4d).

Fiber açısının artması ile plakaların elastikiyeti artmaktadır. Dolayısı ile fiber açısının artması yapıştırıcı tabakasının daha fazla deforme olmasına ve kalıcı deformasyonların artmasına, plastik kayıp enerjilerinin artmasına, bağlantıda kalan kinetik enerji değerlerinin azalmasına, temas kuvvetlerinin artmasına, en büyük çekme değerlerinin azalmasına sebep olmuştur. Üç farklı yapıştırıcı kalınlığı için benzer sonuçlar elde edilmiştir; şöyle ki, yapıştırıcı kalınlığı kinetik enerji, plastik kayıp enerjisi, temas kuvveti ve yerdeğiştirmenin zaman göre değişim karekteristiğini belirgin etkilememektedir. Ancak bu parametrelerin

seviyelerinde yapıştırıcı kalınlığının tesiri belirgin gözlemlenmektedir. Yapıştırıcı kalınlığı artarken, plastik kayıp enerjisi ve temas kuvvet seviyeleri artmakta, en büyük yerdeğiştirme seviyeleri düşmektedir (Şekil 4). Yapıştırıcı kalınlığının artması tek bir yapı olarak birleştirilmiş katmanlı plakaların darbe enerjisi yutma/tutma kabiliyetini iyileştirmektedir. Temas kuvvetlerindeki artş ihmal edilir olsa da yerdeğiştirme seviyeleri belirgin azalmaktadır.

İkinci aşamada, vurucu hızı $v = 4$ m/s, kütlesi $m = 5.045$ kg, darbe enerjisi $E = 40$ J değerlerinde sabit tutulmuş ve yukarıda belirtilen fiber açıları ve yapıştırıcı kalınlıklarına sahip yapıştırılmış katmanlı plakalar için analizler tekrarlanmıştır. Şekil 5 de en yüksek darbe enerjisi seviyesi ($E = 40$ J) de gerçekleştirilen analiz sonuçlarına dayanarak fiber açısının üç farklı yapıştırıcı kalınlığında kinetik enerji, plastik kayıp enerjisi, temas kuvveti ve yer değiştirmeler üzerine etkileri gösterilmiştir. $E = 10$ J olduğu gibi 0° fiber açısında en düşük temas kuvveti seviyeleri elde edilmiş, fiber açısının artması ile temas kuvvetleri artmış ve en büyük temas kuvveti 90° fiber açısında gerçekleşmiştir (Şekil 5c). En yüksek temas kuvvet değerleri yapıştırıcı kalınlığı $t_2 = 0.2$ mm için 90° fiber açısında 24.5 kN, 0° fiber açısında 19 kN şeklinde oluşmuştur. Fiber açısının 0° den 90° ye değişmesi ile temas kuvvetinde $\sim$ %25'lik bir artış gözlenmektedir. Yerdeğiştirmeler için benzer durum değişmemiş, fiber açısının artması ile kalıcı çökme değerleri azalmıştır. $t_2 = 0.2$ mm için 0° fiber açısında 4.8 mm olan kalıcı çökme, 90° fiber açısında 3.6 mm olarak gerçekleşmiştir (Şekil 5d). Fiber açısının 0° den 90° ye değişmesi ile kalıcı çökme değerlerinde %25'lik bir düşüş gözlenmektedir. Benzer durum diğer iki yapıştırıcı kalınlığı için geçerlidir.

Darbe enerji seviyesinin artışı fiber açısının temas kuvveti ve kalıcı deformasyonların üzerine tesirinin karakteristiğini değiştirmemiştir. Ancak plastik kayıp enerjisi ve kinetik enerjinin darbe süresince değişimi üzerinde ihmal edilebilir farklılıklar oluşmuştur (Şekil 5a,b). $E = 40$ J için en büyük plastik kayıp enerjisi her üç yapıştırıcı kalınlığında 45° fiber açısında gerçekleşmiştir. Darbe sonrası kinetik enerji değerleri arasındaki farklar çok fazla değişim göstermemiştir. Ancak, kinetik enerji değişimlerinden görülmektedir ki, fiber açısının art-

ması ile bağlantının enerjisinin yutulması yani vurucunun plakalar üzerinde yapabileceği en büyük yer değiştirmeye ulaşma (nüfuziyet) zamanı azalmıştır. Her üç yapıştırıcı kalınlığı içinde aynı davranış sergilenmiştir. Yüksek darbe enerjisinde yapıştırıcı kalınlığını arttırmak, düşük darbe enerjisi durumuna benzer şekilde, plastik kayıp enerjisini ve temas kuvveti seviyelerini artırmakta, en büyük yerdeğiştirme seviyelerini düşürmektedir (Şekil 5). Darbe enerjisi yutma kabiliyeti iyileşmektedir. Temas kuvvetleri ihmal edilir artar iken, yerdeğiştirme seviyeleri belirgin azalmaktadır.

10.2 Yapıştırıcı Kalınlığı, Fiber Açısı ve Darbe Enerjisinin Yapıştırıcı Hasarı Üzerinde Tesiri

Yapıştırıcı tabakasının kalınlığı boyunca hasarın nasıl geliştiğini belirlemek amacıyla, yapıştrıcı kalınlığı ($t_2 = 0.2$ mm) boyunca yeterli sayıda eleman kullanmak önemlidir. Analizlerde yapıştırıcı tabakası kalınlığı boyunca dört eleman (dört katman) ile modellenmiştir. Bir seri analiz kalınlık boyunca dört elemanın tatminkar doğrulukta hesaplamalar için yeterli olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, takip eden analizlerde yapıştırıcı kalınlığı boyunca dört eleman kullanılmıştır. $t_2 = 0.2$ mm kalınlığında yapıştırıcı tabakasını dört tabakaya bölmek kalınlık boyunca $z = 0, 0.0667, 0.1333, 0.2$ mm lik konumlarda yapıştırıcı katmanlarını inceleme fırsatı vermektedir. Daha fazla eleman ile modelleme yapmak iş istasyonlarına çok fazla hesaplama yükü getirmektedir. Eleman sayısı arttıkça çözüm süreleri orantısız artmaktadır. Çözüm için kullanılan iş istasyonu 4 çekirdekli, 32 GB hafızaya, paralel çalışan dört disk özelliklerine sahip güçlü bir iş istasyonu olmasına rağmen mevcut verilerin elde edildiği 119960 elemandan oluşan her bir modelin bağımsız çözümü 110-140 duvar saati sürmektedir. Yapıştırıcı kalınlığı boyunca $z = 0, 0.0667, 0.1333, 0.2$ mm lik konumlardaki $1, 2, 3, 4$ nolu katmanların her birinde kalıcı şekil değiştirmelerin nasıl oluştuğu ve geliştiği Şekil 6 da gösterilmiştir. Düşük (10 J) ve yüksek (40 J) darbe enerji seviyesinin üç temel ($\alpha = 0$, 45, 90°) fiber açılı birleştirilmiş plakalarda vurucu ile temas eden üst plaka-

yapıştırıcı arayüzeyinden yapıştırıcı-alt plaka arayüzeyine doğru yapıştırıcı kalınlığı boyunca kalıcı şekil değiştirmelerin oluşumu ve yayılışı üzerindeki tesiri Şekil 6 da görülmektedir. Yapıştırıcı tabakasında meydana gelen kalıcı şekil değiştirmeler fiber açısına uyum göstermektedir ve fiber açısının değişimi ile kalıcı şekil değiştirmeler yön ve konum değiştirmektedir. Düşük darbe enerjisi seviyesinde kalıcı şekil değiştirmeler orta bölgede toplanırken, yüksek darbe enerjisi seviyesinin 0° fiber açısından başka fiber açılarında kalıcı şekil değiştirmeler yapıştırıcı tabakasının yan kenarlarına kadar ilerlemekte ve buralarda yığılma göstermektedir. Darbe enerji seviyesinin 10 J den 40 J e çıkarılması ile yapıştırıcı üzerinde oluşan kalıcı şekil değiştirmelerin yayıldığı alanlarda 2 ile 4 katı arasında artış gözlenmektedir. Düşük darbe enerjisi seviyesinde yapıştırıcının 1. ve 2. üst katmanlarında ($z = 0.1333, 0.2$ mm) vurucunun temas ettiği bölgenin hizasındaki kısımda yapıştırıcıda oluşan plastik şekil değiştirme seviyeleri $\varepsilon_{yap}^{hasar} = 0.16566$ değerinin üstüne çıkmamıştır, ve yapıştırıcı tabakası vurucu tarafından düşey sıkıştırılarak yanal olarak hareket etmeye zorlanmıştır. Vurucu temas noktasında da oluşan plastik şekil değiştirme seviyelerinin 0.16566 değerinin altında kaldığı gözlenmektedir. Diğer yapıştırıcı kalınlıklarında ($t_2 = 0.5$ ve 1.0 mm) yapıştırıcının dikkate alınan katmanlarındaki $\varepsilon_{yap}^{hasar} = 0.16566$ değerinin üzerinde gerçekleşen plastik kalıcı şekil değiştirme seviyeleri, $t_2 = 0.2$ mm yapıştırıcı kalınlığında gerçekleştiği kadar belirgin değildir. Yapıştırıcı kalınlığının artması ile yapıştırıcı kütlesi artmakta, birim hacim üzerine düşen şekil değiştirme enerji miktarı azalmaktadır. Dolayısı ile, yapıştırıcı tabaka elastik olarak daha fazla enerjiyi depolayabilmekte, kendisi üzerinde oluşan kalıcı şekil değiştirmeler azalmaktadır.

10.3 Darbe Sonrası Kompozit Katmanlarında Hasar Analizleri

Fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların darbe analizlerinde basma ve çekme altında fiber, basma ve çekme altında matris, tabakalar arası ayrılma ve matris kayma hasar kriterleri kullanılmıştır (Tablo 3). Hasar kriterleri şu usul ile uygulanmıştır:

hasar kriterleri tek FORTRAN kod dosyasında ABAQUS yazılımına uygun *vusdfld*() alt kodu olarak yazılmıştır. ABAQUS ilk yük iterasyonu sonunda hasar kriterlerinde kullanılacak parametre değerleri hesaplanmış durumdadır. Malzemeye ait olan deneysel olarak tespit edilmiş ve mukayese için gerekli parametrelerin sabit değerleri FORTRAN programına girilmiştir. Hasar kriterleri alt programı ilk iterasyon ve takip eden her bir iterasyon sonunda ABAQUS ana yazılımı tarafından çağrılır. Hasar kriterleri her bir elemanın her bir integrasyon noktasında gerekli parametreleri kullanarak hesaplanır ve hasar kontrol edilir. ABAQUS tarafından SDV* (*: değişken numarasını ifade eder) olarak her bir elemanın her integrasyon noktası için tanımlanan değişkenler matris biçiminde kayıt edilir ve her bir hasar kriterine ait değeri ayırt edebilmek için * yerine $[0, 1, 2, 3..]$ şeklinde değişen indeks numarası atanır ve her bir değişken kendine ait hasar tipinin değerini $[0 - 1]$ arasındaki değerle temsil eder. SDV* nin 1 olması ait olduğu elemanın ilgili integrasyon noktasındaki temsil ettiği hasar kriterine göre hasara uğradığını ifade eder. Hasar kriterleri kompozit plakaların malzeme modelinde tarifli olduğu için bu malzeme tipine sahip tüm sonlu elemanların tüm integrasyon noktalarında her yük adımı ve alt iterasyonlarının sonunda kontrol edilir, bu nedenle hesaplama işlemlerine belirgin bir yük getirir.

Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakaların bindirme bağlantılarının düşük $E = 10$ J ve yüksek $E = 40$ J darbe enerji seviyelerinde, üç farklı yapıştırıcı kalınlığında ($t_2 = 0.2, 0.5, 1.0$ mm) gerçekleştirilen analizlerinde hasar tipi kontrolleri, fiber ve matris malzemesinin çekme altında hasara uğramasının diğer dört hasar kriterine göre daha baskın olduğunu göstermiştir. Hashin'in fiberin çekme (eşitlik 118) ve matrisin çekme (eşitlik 120) altındaki hasar kriterlerine göre düşük darbe ($E = 10$ J) enerji seviyesinde, yapıştırıcı kalınlığı $t_2 = 0.2$ mm, fiber açısı $\alpha = 0^\circ$ değeri için alt ve üst kompozit plakaların kalınlık boyunca her bir katmanında tespit edilen hasar alanları Şekil 7 de sunulmuştur. Kompozit plakaların sekiz katmanı 1, 2, ..., 8 ile tariflenmektedir. Vurucu üst plakanın 1 nolu katmanı ile temas etmektedir. Kalınlık boyunca aşağı 8 nolu katmana doğru ilerlemektedir.

Üst plakanın 8. katmanı ile yapıştırıcı arayüzeyi bulunmaktadır. Alt plakanın yapıştırıcı ile arayüzeyi 1. katmandır ve yine alt plakanın kalınlığı alttaki 8 numaralı katmana doğru ilerlemektedir. Tariflenen usule göre hasarların kalınlık boyunca katmanlarda ilerleyişi şekilde görülmektedir (Şekil 7). Düşük darbe enerjisi ($E = 10$ J) seviyesinde üst plakanın ilk üç katmanında ve alt plakanın 1., 2. ve 8. katmanlarında Hashin fiber çekme (eşitlik 118) kriterine göre hasar oluşmaz iken, üst ve alt plakanın tüm katmanlarında fiber açısı ile aynı yönde, yani ($\alpha = 0°$) lik fiber doğrultusunda çekme altında fiber hasarlarının oluştuğu görülmektedir (Şekil 7). Fiber çekme hasar kriterine göre fiberde oluşan en büyük hasar alanı üst plakada 5. katmanda 92 mm^2 ve alt plakada 4. katmanda 81 mm^2 dir. Üst plakanın 5., 6., 7. ve 8. katmanlarında fiberde oluşan hasar alanlarında düzenli bir azalış vardır. Alt plakada 4. katmanda ortaya çıkan en büyük hasar alanı takip eden 5., 6., 7. ve 8. katmanlarında düzenli bir şekilde azalmıştır ve alt plakanın en alt katmanı olan 8. katmanda fiber hasar alanı görülmemektedir. $E = 10$ J ve $E = 40$ J enerji seviyelerinde kompozit bindirmenin kalınlığı boyunca üst plaka 1. katmanından itibaren başlayıp alt plaka 8. katmanına kadar olan çekme altındaki fiber hasar kriterine göre hasar alanlarının değişimi Şekil 8 de görülmektedir.

Matrisin çekme altında (eşitlik 120) uğradığı hasar alanları fiber hasar alanlarına göre oldukça büyüktür. Fiberlerin plakaların boyuna yönünde yük taşımasından dolayı ($\alpha = 0°$) matrisin taşıdığı yük daha düşüktür. Tersine matris üst plakanın tüm katmanlarında fiber açısına dik yani, enine yönde daha fazla yük taşıdığından bu yönde belirgin hasara uğradıkları görülmektedir. Alt plakada çekme altında matris hasarları yön değiştirmeye başlamış, plakaların enine doğrultusundan boyuna doğrultusuna fiber yönünde hasar alanları gelişmiştir. Üst plakanın 1. katmanında yan yüzeylerde başlayıp orta noktaya doğru ilerleyen çekme altında matris hasarı alt katmanlarda orta noktada yığılma göstermiştir. Alt plakada ise matrisin hasar gelişimi tavrı değişmiştir: fiberin orta noktada yük taşıyamamasından ve çekme altında alt plakanın orta noktasında hasara uğramasından dolayı alt plakanın özellikle

6., 7. ve 8. katmanlarında belirgin olarak matris fiber yönünde hasara uğramıştır. Çekme altında matris hasarı vurucunun temas ettiği üst plaka 1. katmanında en büyük alana (2240 mm^2) sahip olup, yapıştırıcı arayüzeyine doğru düzenli olarak azalmakta, alt plakanın yapıştırıcı ile arayüzeyi olan 1. katmanından itibaren tekrar artış göstermekte, alt plakanın en alt katmanı olan 8. katmanda 1529 mm^2 olarak gerçekleşmektedir. Kompozit bindirmenin kalınlığı boyunca üst plaka 1. katmanından itibaren başlayıp alt plaka 8. katmanına kadar olan çekme altındaki matris hasar kriteri alanlarının değişimi düşük ve yüksek enerji seviyesi için Şekil 8 de görülmektedir. Üst plakanın vurucu ile temas eden 1. katmanında en büyük değere sahip olan hasar alanı üst plaka kalınlığınca azaldığı, alt plakaya geçtikten sonra alt plakanın 8. katmanına doğru düzenli olarak arttığı görülmektedir.

$t_2 = 0.2$ mm yapıştırıcı kalınlığı, $\alpha = 0^\circ$ fiber açılı kompozit plakaların bindirme bağlantılarının $E = 40$ J lük yüksek darbe enerjisi seviyesindeki darbe testi analizlerine dayanarak darbe sonrası Hashin'in çekme altında fiber ve matris hasar kriterleri sonucu elde edilen hasar alanları Şekil 9 da gösterilmiştir. Yüksek darbe enerjisi seviyesinde üst ve alt plakaların tüm katmanlarında fiber ve matrisin hasara uğradığı, oluşan hasar alanlarının düşük darbe enerji seviyesine göre oldukça büyük olduğu görülmektedir. Düşük darbe enerjisi $E = 10$ J seviyesinde üst plakanın ilk üç katmanında fiber çekme altında hasara uğramaz iken (Şekil 7), yüksek darbe enerjisi seviyesinde alt ve üst plakaların tüm katmanlarında fiber çekme altında hasara uğramıştır (Şekil 9). Plakalarda 1. katmandan kalınlık boyunca aşağı doğru 8. katmana kadar hasar alanlarının düzenli azaldığı görülmektedir. En büyük fiber hasarı 1096 mm^2 olarak vurucu ile temas eden üst plakanın 1. katmanında oluşmuştur. Alt plakada oluşan en büyük fiber hasar alanı ise yine 1. katmanda 540 mm^2 olarak gerçekleşmiştir. Her iki plakanın en küçük hasar alanları 8. katmanlarında ve yaklaşık olarak 135 mm^2 değerinde gerçekleşmiştir. Üst plaka ve alt plakada fiber hasarları kelebek kanadı biçiminde ve fiber açısına diyagonal yönde başlayıp gelişmiştir. Ancak, katmanlarda ilerledikçe yerel orta noktalara doğru toplanarak öbekleşmiştir. Darbe enerjisinin dört kat artırılması ile, çekme

altındaki fiber hasar alanı en büyük alan değeri bakımından 92 mm^2 den 1096 mm^2 ye artmıştır, yani 11.9 kat artış göstermiştir. En büyük fiber hasarının oluştuğu katman, düşük darbe enerjisi seviyesinde üst plakada 5. katman iken yüksek darbe enerjisi seviyesinde yine üst plakada 1. katman olmuştur.

Yüksek darbe enerji seviyesi ve $\alpha = 0°$ fiber açısında bağlantılarda oluşan matris hasar alanları bakımından incelenecek olursa, toplam plaka alanı $125 \times 75 = 9375$ mm^2 olan üst plakanın 1. katmanının %47 si yani (4430 mm^2) lik alanı hasara uğramıştır. Plakaların matris kısmının yüksek enerji seviyesinde oldukça zorlandığını söylemek mümkündür. Matris hasarlarının kalınlık boyunca değişim karakteristiği düşük darbe enerjisi seviyesindeki gibidir. Üst plakanın 1. katmanında en büyük değerinde olup, kalınlık boyunca aşağı 8. katmana doğru ilerledikçe azalmış, alt plakanın 8. katmanına doğru tekrar artmaya meyletmiştir (Şekil 10). Normal şartlarda iki kompozit plaka yapıştırılmadan tek parça 4.2 mm kalınlığında kullanılmış olsaydı, Şekil 10 da görülen yapıştırıcı tabakasından hemen sonra alt plakanın 1. katmanında meydana gelen matris hasar alanındaki artışın olmaması gerekirdi. Yapıştırıcı tabakasından dolayı malzemedeki süreksizlikler ve yapıştırıcı tabakasının mekanik özelliklerinin kompozit plakanın mekanik özelliklerinden zayıf olmasından dolayı, alt plakanın yapıştırıcı ile temas eden 1. katmanını oluşturan matris üst plakanın 8. katmanına göre daha fazla çekmeye maruz kaldığı anlaşılmaktadır. Dolayısı ile alt plakanın 1. katmanında meydana gelen matrisin çekme altındaki hasar alanı üst plakanın yapıştırıcı ile arayüzeyi olan en alt katmanında meydana gelen hasar alanından daha fazladır.

İki farklı fiber açısında ($\alpha = 45°$,$90°$) yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit plakaların düşük ($E = 10$ J) ve yüksek ($E = 40$ J) darbe enerjisi seviyelerinde çekme altında Hashin'in fiber ve matris hasar kriterlerine göre matriste ve fiberlerde oluşan hasar alanlarının kompozit plakaların kalınlıkları boyunca değişimleri sırasıyla Şekil 11-14 de gösterilmiştir.

Şekil 11 düşük darbe enerjisi ($E = 10$ J) seviyesinde $\alpha = 45°$ fiber açılı yapıştırıcı ile birleştirilmiş plakalar için hem matris hem de fiber hasarının fiber yönüne göre şekillendiğine

işaret etmektedir. Fiber açısının 45° değeri için oluşan fiber hasar alanlarının 0° de (Şekil 7) oluşan fiber hasarlarından büyük olduğu, en büyük fiber hasar alanının üst plakanın 5. katmanında 110 mm^2 olduğu görülmektedir. $\alpha = 0°$ fiber açısında da en büyük fiber hasar alanı üst plaka 5. katmanında 92 mm^2 olarak gerçekleşmiştir (Şekil 7). Fiber açısının 45° olması ile oluşan en büyük fiber hasar alanı değerinde %20 artış ortaya çıkmıştır. Fiber hasarlarının kalınlık boyunca değişim karakteristiği 0° fiber açısındaki hasar alanlarının değişim karakteristiğine benzemektedir (Şekil 7). En büyük matris hasar alanı üst plakanın 1. katmanında ortaya çıkmaktadır, kalınlık boyunca alt katmana doğru ilerledikçe hasar alanlarının daralmaktadır, üst plakanın 5. ve 6. katmanlarında matriste hasara ortaya çıkmamaktadır (Şekil 11). Alt plakada oluşan en büyük matris hasar alanı, alt plakanın en alt katmanı yani, 8. katmanında 1202 mm^2 erişmektedir.

$\alpha = 45°$ fiber açılı birleştirilmiş kompozit plakalara yüksek darbe enerji seviyesi $E = 40$ J uygulanması neticesinde oluşan fiber ve matris hasarları Şekil 12 de görülmektedir. Darbe enerji seviyesinin artması ile oluşan hasar alanlarının fiber açısına göre biçimlenmeleri alt ve üst plakanın tüm katmanlarında oldukça belirgindir. Darbe enerjisi seviyesinin 4 kat artışı çekme altında fiberlerde oluşan en büyük hasar alanını yaklaşık 15 kat artarak 110 mm^2 den 1644 mm^2 değerine taşımıştır. En büyük fiber hasarının oluştuğu katman değişmiştir. Düşük darbe enerjisi ($E = 10$ J) seviyesinde en büyük hasar alanı üst plakanın 5. katmanında oluşur iken yüksek darbe enerji ($E = 40$ J) seviyesinde vurucu ile temas eden üst plakanın 1. katmanında ortaya çıkmıştır. Fiber hasar alanları alt ve üst plakaların her ikisinde 1. katmandan 8. katmana doğru azalma göstermiştir. Alttaki katmanların (7. ve 8. katmanlar) fiber hasar alanları vurucu hizasındaki bölgede yığılmıştır ve bu katmanlarda ortalama hasar alanı 220 mm^2 ye erişmiştir. Matris hasar alanları $\alpha = 45°$ de $\alpha = 0°$ e göre üst plakanın 1. katmanında %7.5 artışla 4760 mm^2, üst plakanın 8. katmanında %65 düşüş ile 764 mm^2 olmuştur. $\alpha = 45°$ de oluşan en büyük hasar alanı $\alpha = 0°$ de oluşan en büyük hasar alanından büyük olmasına rağmen, üst plaka için 3. katmandan sonra $\alpha = 0°$ de

matris daha çok zorlanmış ve oluşan hasar alanları $\alpha = 45^\circ$ fiber açısında oluşan hasar alanlarından daha büyük olmuştur. Alt plakanın tüm katmanları $\alpha = 0^\circ$ fiber açısında $\alpha = 45^\circ$ fiber açısına göre çok daha fazla hasara uğramıştır. Fiber açısının artması ile kompozit plakalarda her bir katmanın mukavemetinin arttığı temas kuvvetleri değişimlerinden ve oluşan hasar alanlarından görülmektedir. Fiber daha çok yük taşımakta, matris daha az hasara uğramaktadır. $\alpha = 45^\circ$ fiber açısı ve $E = 40$ J lük darbe enerjisi seviyesinde alt plakada oluşan matris hasarları kompozit plaka katmanları esas alınarak $\alpha = 0^\circ$ fiber açısı ve $E = 40$ J enerji seviyesinde oluşan hasar alanları ile kıyaslandığında $\alpha = 45^\circ$ nin daha düşük olduğu görülmektedir. Hatta $\alpha = 45^\circ$ de en alt plakada oluşan en büyük matris hasar alanı 2403 mm^2 ile 1. katmandadır ve $\alpha = 0^\circ$ de 2. katmanda oluşan en küçük hasar alanı 2411 mm^2 den küçüktür. $\alpha = 0^\circ$ fiber açısında matris hasarları bakımından alt plakanın en çok zorlanan plaka olduğu görülmektedir.

$\alpha = 90^\circ$ fiber açılı birleştirilmiş plakaların düşük ve yüksek darbe enerji ($E = 10, 40$ J) seviyelerinde darbe testleri neticesinde oluşan hasar alanları sırasıyla Şekil 13-14 de gösterilmiştir. Fiber açısının artması ile fiberin daha çok hasara zorlandığı, matriste oluşan hasar alanlarının daraldığı görülmektedir. $E = 10$ J düşük darbe enerjisi seviyesinde ortaya çıkan fiber hasar alanları incelendiği zaman, en büyük hasar alanının alt plakanın 4. katmanında 137 mm^2 olarak gerçekleştiği, diğer iki fiber açısında üst plakanın ilk üç katmanında fiberde hasar oluşmaz iken, $\alpha = 90^\circ$ fiber açısında üst plakanın 1. ve 3. katmanında belirsiz bir hasarın oluştuğu, oluşan hasar alanlarının sırasıyla 22 mm^2 ve 7 mm^2 ye eriştiği gözlenmektedir. Diğer iki fiber açısının alt plakasının son katmanında hasar oluşmaz iken, $\alpha = 90^\circ$ fiber açısında son katmanda noktasal olarak plakanın orta noktasında 3 mm^2 lik bir hasar alanının oluştuğu görülmektedir. Düşük enerji seviyesinde üst plakada oluşan en büyük matris hasar alanı 1144 mm^2 olup, diğer iki fiber açısında oluşan hasar alanından küçüktür. Genel olarak $\alpha = 90^\circ$ fiber açısında oluşan matris hasar alanları diğer fiber açılarında oluşan hasar alanlarına nispeten küçüktür. Üç farklı fiber açısında düşük enerji seviyesi için oluşan en büyük

matris hasar alanları $\alpha = 0^\circ$ için 2240 mm^2, $\alpha = 45^\circ$ için 2026 mm^2 ve $\alpha = 90^\circ$ için 114 mm^2 şeklindeki oluşmuştur. Genellikle en büyük matris hasar alanları üst plakanın 1. katmanda ortaya çıkmıştır. Alt plakada matrisin en çok 8. katmanda zorlandığı gözlenmiştir ve fiber açıları için sırasıyla matris hasar alanları: 1529, 1202 ve 786 mm^2 olarak gerçekleşmiştir ve $\alpha = 0^\circ$ fiber açılı plakaların birleştirildiği bağlantıların alt plakası en çok bu fiber açısında zorlanmıştır.

$E = 40$ J darbe enerjisi seviyesi için hasar alanları incelenilir ise, farklı fiber açılarında fiberde en büyük hasar alanları sırasıyla, 1096 mm^2 (üst plaka 1. katman), 1644 mm^2 (üst plaka 1.katman) ve 1518 mm^2 (üst plaka 3. katman) olarak gerçekleştiği, fiber açısının artması ile fiberlerde oluşan hasar alanlarının arttığı, fiberin daha çok zorlandığı ve daha çok yük taşımak zorunda kaldığı gözlenmektedir. Fiber demetleri en çok $\alpha = 45^\circ$ fiber açısında tehdit altında olduğu görülmektedir. Matrisde ise durumun tam tersi olduğu gözlenmektedir. Sadece $\alpha = 45^\circ$ fiber açısında üst plakanın ilk bir-iki katmanının en büyük hasar alanına sahip olmasına rağmen, fiber açısının artması ile genel olarak katmanlarda matris üzerinde oluşan hasar alanlarının ciddi düşüş gösterdiği görülmektedir. Özellikle fiber açısının artması ile alt plakanın tüm katmanlarında matriste oluşan hasar alanları düzenli azalmaktadır. 0, 45 ve 90° fiber açıları için alt plaka üzerinde 1. katmanda oluşan hasar alanları sırasıyla 2758, 2403 ve 1579 mm^2 dir.

Yapıştırıcı ile birleştirilmiş katmanlı kompozit plakaların düşük ve yüksek darbe yükü altında mekanik davranışlarının doğrusal olmayan elastisite ve plastisite denklemlerinin doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmesi, kompozit plakaların hasar tiplerinin tespiti ve hasar oluşma yük seviyelerinin tespiti üzerine gerçekleştirilen çalışmamızın rapor edilen sonuçları uzun bir teorik çalışmanın ürünüdür. Doğrusal olmayan denklemlerin kurulumu ve çözümlemede uyarlanan sayısal yöntemlerin başarısı deneysel sonuçlar ile mukayese edilmiştir. Deneysel çalışma bu proje kapsamının dışında araştırma grubumuzun yürüttüğü diğer araştırma projelerinin kabiliyetlerine dayanarak gerçekleştirilmiştir. Bahsedilen deneysel çalışmalar

hasar alanı biçimlenmesinin teorik modelimizle tespit edilen model ile uyumlu olduğuna işaret etmiştir. Ancak alan seviyeleri, hasar oluşumu esnasında temas kuvveti seviyelerinde, temas sürelerinde en fazla (% 15) lik bir farklılık oluştuğu belirlenmiştir. Proje kapsamında geliştirilen teorik model ve çözümlemelerin ilaveten hasar başlangıcı sonrası, hasarın yayılması sürecinde malzeme mekanik özellik bozulumu (degredation) modellerinin de dikkate alınmasının gerektiğine işaret etmiştir. Proje yürütücüsü Prof.Dr. M. Kemal Apalak ve Araştırmacı Yrd.Doç.Dr. Mustafa Yıldırım tarafından söz konusu teorik modelin iyileştirilsine halen çalışılmaktadır.

11 Özet ve Sonuçlar

Bu projede katmanlı malzemelerin dinamik (darbe) yükleri altında gerilme ve şekil değiştirme davranışlarının doğrusal olmayan bünye denklemleri, geometrik bakımdan doğrusal olmayan elastisite denklemleri ile modellenmesi ve doğrusal olmayan sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak çözümlenmesi hedeflenmiştir. Yapıştırıcı ile birleştirilmiş katmanlı kompozit plakalar uyarlanma problemi olarak seçilmiştir. Yapıştırıcı malzemesi doğrusal olmayan elasto-plastik davranış sergiler, bağlantı şekil değiştirir iken döner ve eğilme momenti oluşumuna neden olur ki, geometrik bakımdan doğrusal olmayan bir davranış gözlenir, ayrıca kompozit plakaların her bir katmanı matris ve fiber malzemelerinden oluştuğundan hasar tipleri ve tespiti diğer malzemelerden farklılık arz eder. Görüldüğü üzere, seçilen problem yeterince doğrusal olmayan özelliği bünyesinde ihtiva etmektedir. Geometrik bakımdan doğrusal olmayan davranış küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi, yapıştırıcının doğrusal olmayan mekanik davranışı büyük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi ile modellenmiştir. Kompozit plakaların her bir katmanındaki fiber ve matris hasarları çekme ve basma yükleri altında değerlendirilmiştir. Ayrıca matrisin kayma yükü altında hasar davranışı incelenmiştir. Hashin'in söz konusu hasar tiplerine uygun hasar kriterleri bu amaçla kullanılmıştır. Şu sonuçlara varılmıştır:

1. Geometrik bakımdan doğrusal olmayan davranışı modellemede küçük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi yeterince başarılıdır,

2. Sünek yapıştırıcı malzemesinin elasto-plastik (doğrusal olmayan) davranışını modellemede büyük şekil değiştirme-büyük yerdeğiştirme teorisi yeterince başarılıdır,

3. Katmanlanmış kompozit plakalarda oluşan hasar tipleri, çekme altında fiber ve çekme altında matris hasarı şeklinde gelişmektedir. Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterleri hasarın oluşumu ve gelişimini tahmin etmede başarılıdır,

4. Katmanlanmış plakalarda hasar oluşumu ve gelişiminde fiber açısı etkin bir tasarım parametresidir,

5. Darbe enerjisi seviyesi hasarın oluşumunu ve gelişimini etkilemektedir. Şöyle ki, hasar gelişim hızı malzemenin şekil değiştirme hızı ile ilişkili olması nedeniyle yüksek darbe enerjisi seviyesinde bu ilişkinin etkinliği belirginleşmektedir.

6. Proje raporunda belirtildiği üzere yürütülen diğer çalışmanın deneysel çıktıları teorik modelimizin ve sayısal çözümlemizin hasar oluşumu ve yayılma biçiminin doğru tespit edilebildiğine işaret etmektedir. Ancak, deneysel temas kuvvet seviyeleri ve temas sürelerinin farklılık (% 15) göstermesi, darbe sürecinde malzemelerin şekil değiştirme hızının ve malzemelerin mekanik özelliklerinde bozunumun dikkate alınmasına işaret etmiştir. Proje yürütücüsü Prof.Dr. M. Kemal Apalak ve Araştırmacı Yrd.Doç.Dr. Mustafa Yıldırım tarafından söz konusu teorik model bir başka proje kapsamında iyileştirilmeye halen çalışılmaktadır.

Kaynakça

[1] Hashin, Z. (1980). Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites, Journal of Applied Mechanics, 47(2):329-334.

[2] Liu, K.S. and Tsai S.W. (1998). A Progressive Quadratic Failure Criterion for a Laminate, Composites Science and Technology, 58(7):1023-1032.

[3] Lessard, L.B. and Shokrieh, M.M. (1991). Two-dimensional Modeling of Composite Pinned-joint Failure, Journal of Composite Materials, 25:556-577.

[4] Shokrieh, M.M. and Lessard, L.B. (2001). Progressive Fatigue Damage Modeling of Composite Materials. Part I: Modeling. Journal of Composite Materials, 34:1056–1080.

[5] Camanho, P.P. and Matthews, F.L. (2000). A Progressive Damage Model for Mechanically Fastened Joints in Composite Laminates, Journal of Composite Materials, 33:906–27.

[6] Camanho, P.P. and Matthews, F.L. (1997). Stress Analysis and Strength Prediction of Mechanically Fastened Joints in FRP: A Review, Composites: Part A, 28:529–547.

[7] Tserpes, K.I. Papanikos, P. Kermanidis, T.H. (2002). A Three-dimensional Progressive Damage Model for Bolted Joints in Composite Laminates Subjected to Tensile Loading, Fatigue and Fracture Engineering Materials and Structures, 24(10):673-686.

[8] Tserpes, K.I. Labeas, G., Papanikos, P. and Kermanidis, Th. (2002). Strength Prediction of Bolted Joints in Graphite/Epoxy Composite Laminates, Composites:Part B, 33:521–529.

[9] Tserpes, K.I. Papanikos, P. Labeas, G. and Pantelakis SP. (2004). Fatigue Damage Accumulation and Residual Strength Assessment of CFRP Laminates, Composite Structures, 63:219–230.

[10] Tan, S.C. (1991). A Progressive Failure Model for Composite Laminates Containing Openings. Journal of Composite Materials, 25:556–577.

[11] Tan, S.C. and Perez, J. (1993). Progressive Failure of Laminated Composites with a Hole under Compressive Loading, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 18:255–278.

[12] Nuismer, R.J. and Tan S.C. (1988). Constitutive Relations of a Cracked Composite Lamina, Journal of Composite Materials, 22:306–21.

[13] Tan, S.C. and Nuismer, R.J. (1989). A Theory of Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates, Journal of Composite Materials, 23:1029–1047.

[14] Haj-Ali, R. and Kilic, H. (2002). Non-linear Behavior of Pultruded FRP Composite, Composites: Part B, 33:173-191.

[15] Kilic, H. and Haj-Ali, R. (2003). Progressive Damage and Nonlinear Analysis of Pultruded Composite Structures, Composites: Part B, 34:235-250.

[16] Kilic, H. and Haj-Ali, R. (2003). Elastic-degrading Analysis of Pultruded Composite Structures, Composite Structures, 60:43-55.

[17] Haj-Ali, R. and Kilic, H. (2003). Nonlinear Constitutive Models for Pultruded FRP Composites, Mechanics of Materials, 35:791-801.

[18] Kwon, Y.W. and Berner, J.M. (1995). Micromechanics Model for Damage and Failure Analyses of Laminated Fibrous Composites, Engineering Fracture Mechanics, 52:231-242.

[19] Bogetti, T.A. Hoppel, C.P.R. Harik, V.M. Newill, J.F. and Burns B.P. (2004). Predicting the Nonlinear Response and Progressive Failure of Composite Laminates, Composite Science and Technology, 64:329-342.

[20] Bogetti, T.A. Hoppel, C.P.R. Harik, V.M. Newill, J.F. and Burns, B.P. (2004). Predicting the Nonlinear Response and Failure of Composite Laminates: Correlation with Experimental Results, Composite Science and Technology, 64:477-485.

[21] Spottswood, S.M. and Palazotto, A.N. (2001). Progressive Failure Analysis of a Composite Shell, Composite Structures, 53:117-131.

[22] McCarthy, C.T. McCarthy, M.A. and Lawlor, V.P. (2005). Progressive Damage Analysis of Multi-bolt Composite Joints with Variable Bolt-hole Clearances, Composites: Part B, 36:290-305.

[23] McCarthy, M.A. McCarthy, C.T. Lawlor, V.P. and Stanley, W.F. (2005). Three-dimensional Finite Element Analysis of Single-bolt, Single Lap Composite Bolted Joints: Part I - Model Development and Validation, Composite Structures, 71(2):140-158.

[24] McCarthy, C.T. and McCarthy, M.A. (2005). Three-dimensional Finite Element Analysis of Single-bolt, Single-lap Composite Bolted Joints: Part II – Effects of Bolt-hole Clearance, Composite Structures, 71(2):159-175.

[25] Ambur, D.R. Jaunky, N. and Hilburger M.W. (2004). Progressive Failure Studies of Stiffened Panels subjected to Shear Loading, Composite Structures, 65:129–142.

[26] Reddy JN. Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis. Boca Raton, Florida: CRC Press Inc, (1997).

[27] Ochoa, O.O. and Reddy, J.N. (1992). Finite Element Analysis of Composite Laminates, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[28] Jones, R.M. (1999). Mechanics of Composite Materials, Taylor and Francis, New York.

[29] Tsai, S.W. and Hahn, H.T. (1980). Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing Co., Westport, Connecticut.

[30] Adams R.D. and Wake W.C. (1984). Structural Adhesive Joints in Engineering, Elsevier Applied Science, London.

[31] Kinloch A.J. (1987). Adhesion and Adhesives, Chapman and Hall, London.

[32] Volkersen, O. (1938). Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nieverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten, Luftfahrtforschung, 15:41-47.

[33] Volkersen, O. (1965). Construction Metallique, 4:3-13.

[34] Goland, M. and Reissner, E. (1944). The stresses in Cemented Joints, Journal of Applied Mechanics, 11:A-17-27.

[35] Hart-Smith, L.J. (1973). Adhesive-Bonded Single-Lap Joints, Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112236.

[36] Hart-Smith, L.J. (1973). Adhesive-Bonded Double-Lap Joints, Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112235.

[37] Hart-Smith, L.J. (1973). Adhesive-Bonded Scarf and Stepped-Lap Joints, Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112237.

[38] Hart-Smith, L.J. (1974). Analysis and Design of Advanced Composite Bonded Joints, Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR-2218.

[39] Reissner, E. (1945). The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, 12:A-69-77.

[40] Reddy, J.N. (1984). A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, International Journal of Solids Structures, 20:881-896.

[41] Nageswara, R.B. Sadasiva, R.Y.V.K. and Yadagiri, S. (1982). Analysis of Composite Bonded Joints, Fibre Science and Technology, 17:77-90.

[42] Ishii, K. Imanaka, M. Nakayama H. and Kodama H. (1998). Fatigue Failure Criterion of Adhesively Bonded CFRP/Metal Joints under Multiaxial Stress conditions, Composites: Part A, 29(4): 415-422.

[43] Ishii, K. Imanaka, M. Nakayama, H. and Kodama, H. (1999). Evaluation of The Fatigue Strength of Adhesively Bonded CFRP/Metal Single and Single-Step Double-Lap Joints, Composites Science and Technology, 59(11):1675-1683.

[44] Kam, T.Y. and Lai, F.M. (1999). Experimental and Theoretical Predictions of First-Ply Failure Strength of Laminated Composite Plates, International Journal of Solids and Structures, 36(16):2379-2395.

[45] Tong, L. (1997). An Assessment of Failure Criteria to Predict the Strength of Adhesively Bonded Composite Double Lap Joints, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 16(8):698-713.

[46] Tong, L. (1998). Strength of Adhesively Bonded Single Lap and Lap-Shear Joints, International Journal Solids and Structures, 35(20):2601-2616.

[47] Tong, L. Sheppard, A., Kelly, D. and Chalkley, P. (1998). Effect of Joint Flexibility in Adhesively Bonded Composite Panel-to-Flange Joints, Composites: Part B, 29(3):287-298.

[48] Sheppard, A. Kelly, D. and Tong, L. (1998). A Damage Zone Model for the Failure Analysis of Adhesively Bonded Joints, International Journal of Adhesion & Adhesives, 18(6): 385-400.

[49] Cheuk, P.T. Tong, L. Wang, C.H. Baker, A. and Chalkley, P. (2002). Fatigue Crack Growth in Adhesively Bonded Composite-Metal Double-Lap Joints, Composite Structures, 57(1-4): 109-115.

[50] Kim, K. Yoo, J. Yi, Y. and Kim, C. (2006). Failure Mode and Strength of Unidirectional Composite Single Lap Bonded Joints with Different Bonding Metho8ds, Composite Structures, 72(4):477-485.

[51] Li, G. Lee-Sullivan, P. and Thring, R.W. (1999). Nonlinear Finite Element Analysis of Stress and Strain Distributions across the Adhesive Thickness in Composite Single-lap Joints, Composite Structures, 46(4): 395-403.

[52] Apalak, M.K. and Engin, A. (2003). An Investigation on the Initiation and Propagation of Damaged Zones in Adhesively Bonded Lap Joints, Journal of Adhesion Science and Technology, 17(14): 1889-1921.

[53] Apalak, M.K. and Engin, A. (2004). Effect of Adhesive Free-end Geometry on the Initiation and Propagation of Damaged Zones in Adhesively Bonded Lap Joints, Journal of Adhesion Science and Technology, 18(5): 529-560.

[54] Malvern, L.E. (1969). Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs,N.J.

[55] Saada, A.A. (2009). Elasticity: Theory and Applications, Second edition, Ross Publishing, Inc., Fort Lauderdale.

[56] Crisfield M.A. (1991). Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1: Essentials, John Wiley & Sons, New York.

[57] Kleiber M. (1989). Incremental Finite Element Modelling in Non-linear Solid Mechanics, Ellis Horwood, John Wiley & Sons, PWN-Polish Scientific Publishers, New York.

[58] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.C. (1991). The Finite Element Method (Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity), Vol. 2. New York, NY: McGraw-Hill, (1991).

[59] Wood R.D. and Zienkiewicz O.C. (1997). Geometrically Non-linear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells, Computers & Structures, 7(6):725-735.

[60] Raghava, R. Caddell, R. M. and Yeh, G.S.Y.; (1973). The Macroscopic Yield Behaviour of Polymers, Journal of Materials Science, 8(2):225-232.

[61] Crocombe A.D. and Moult A.C. The Effect of the Adhesive Thickness on the Strength of a Bonded Joint. In: Adhesion 12, Allen, K.W. (Editor), elsevier Applied Science, London (1988).

[62] Greszczuk L.B. (1974). Microbuckling of Lamina Reinforced Composites, Composite Materials: Testing and Design (Third Conference), vol 546 pp. 5-29, ASTM STP.

[63] Matthews F.L. and Rawlings R.D. (1999). Composite Materials: Engineering and science, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, England.

[64] Gay D., Hoa S.V. and Tsai S.W. (2007). Composite Materials: Design and Applications, Second Edition. CRC Press, Boca Raton, Florida.

[65] Semerdjiev S. (1970). Metal to Metal Adhesive Bonding, Business Books, London, (1970).

[66] Tong L. and Steven G.P. (1999). Analysis and Design of Structural Bonded Joints, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[67] Matthews F.L., Kilty P.P.F. andGodwin E.W.(1982). A Review of the Strength of Joints in Fiber-reinforced Plastics: Adhesively Bonded Joints. Composites, 13(1):29-37.

[68] Banea M.D. and Silva L.F.M. (2009). Adhesively Bonded Joints in Composite Materials: An Overview. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: J. Mater. Design Appl., 223:1-18.

[69] Kumar S. and Mittal K.L. (Eds.), Advances in Modeling and Design of Adhesively Bonded Systems, Scrivener Publishing LLC (2013).

[70] ASTM D 7136/D 7136M-05, Standard Test Method of Measuring the Damage Resistance of a Fiber-reinforced Polymer Matrix Composite to a Drop-Weight Impact Event.

[71] IM6-3501, Anon, Properties for Graphite/Epoxy IM-6/3501-6, Fiber Volume fraction = 63.5%, University of California, San Diego, http://casl.ucsd.edu/oldindex.html, (2005).

Tablo 1: Katmanlı kompozit plakanın bir katmanının (grafit-epoksi IM-6/3501-6) mekanik özellikleri ($V_f = 0.635$).

Fiber mekanik özellikleri										Matris mekanik özellikleri			
Yoğunluk ρ,kg/m^3	E_{11} GPa	E_{22} GPa	E_{33} GPa	G_{12} GPa	G_{13} GPa	G_{23} GPa	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	Yoğunluk ρ,kg/m^3	E GPa	G GPa	ν
1743.834	259.105	13.927	13.927	50.952	50.952	8.274	0.26	0.26	0.33	1264.972	4.344	1.597	0.36

Tablo 2: Grafit-epoksi kompozit fiber (IM-6) ve matris (3501-6) için mikro-mekanik özellikler [71].

Özellik	Birim	Sembol	Değer
Fiber çekme mukavemeti	GPa	X_T	2.56
Matris çekme mukavemeti	MPa	$Y_T = Z_T$	42.54
Matris basma mukavemeti	MPa	$Y_C = 3.2 \times Y_T$	136.13
Matris kayma mukavemeti	GPa	G_{12}^m	1.597
Lamina kayma mukavemeti	MPa	$S_{12} = S_{13} = S_{23}$	77.08

Tablo 3: Katmanlı kompozitler için güncel hasar kriterleri.

Hasar kriteri	Eşitsizlik
1980-Hashin-3B-fiber-çekme [1]	$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2}\left(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2\right) \geqslant 1$
1974-Greszczuk-fiber-basma [62]	$\sigma_1 \geqslant \left(\frac{G_{12}^m}{1 - V_f}\right)$
1980-Hashin-3B-matris-çekme [1]	$\frac{\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)^2}{Y_T^2} + \frac{\left(\tau_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3\right)}{S_{23}^2} + \frac{\left(\tau_{12}^2 - \tau_{13}^2\right)}{S_{12}^2} \geqslant 1$
1980-Hashin-2D-matris-basma [1]	$\frac{\sigma_2}{Y_C}\left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{\sigma_2}{2S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geqslant 1$
1980-Hashin-kayma [1]	$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geqslant 1$
1980-Hashin-tabaka ayrılması [1]	$\left(\frac{\sigma_3}{Z_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{S_{31}}\right)^2 \geqslant 1$

Şekil Listesi

1 Fiber takviyeli katmanlı kompozit plakaların yapıştırılmasında kullanılan Araldite 2015'in gerilme-şekil değiştirme ($\sigma - \varepsilon$) diyagramı. 69

2 Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakalar için teorik model geometrisi. 70

3 Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakanın sonlu elemanlar modeli, a) üstten görünüş, b) yan görünüş, c) yapıştırıcı ve kompozit plaka kesiti. 70

4 Fiber açısının ($\alpha = 0, 30, 45, 60, 90^\circ$) ve yapıştırıcı kalınlığının ($t_2 = 0.2, 0.5, 1.0$ mm) yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların a) kinetik enerji, b) plastik kayıp enerji, c) temas kuvveti, d) yer değiştirme davranışları üzerine etkisi (Darbe enerjisi $E = 10$ J). 71

5 Fiber açısının ($\alpha = 0, 30, 45, 60, 90^\circ$) ve yapıştırıcı kalınlığının ($t_2 = 0.2, 0.5, 1.0$ mm) yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların a) kinetik enerji, b) plastik kayıp enerji, c) temas kuvveti, d) yer değiştirme davranışları üzerine etkisi (Darbe enerjisi $E = 40$ J). 72

6 Farklı fiber açıları ($\alpha = 0,\ 45,\ 90^\circ$) ve darbe enerjilerinde ($E = 10, 40$ J) yapıştırıcı kalınlığı boyunca dört katmanda oluşan kalıcı hasar bölgeleri (yapıştırıcı tabakası boyutları $125 \times 75 \times 0.2$ mm). 73

7 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fibre ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 0^\circ$). 74

8 Hashin'in 3B çekme altında fiber hasar kriterine göre hasar alanlarının bağlantı kalınlığı boyunca değişimi ($E = 10, 40$ J, $t_2 = 0.2$ mm, $\alpha = 0^\circ$) 75

9 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 0°$). 76

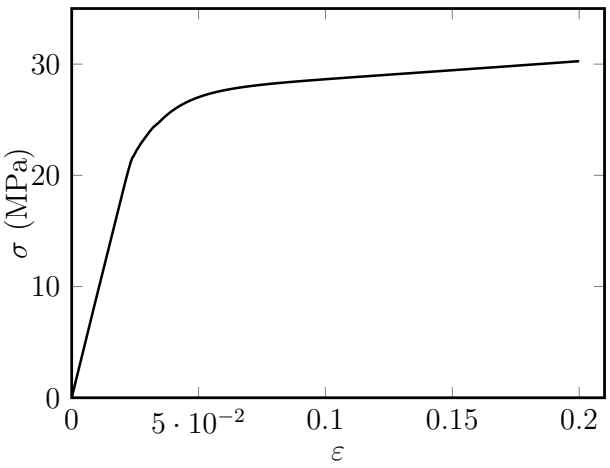
10 Hashin'in 3B çekme altında matris hasar kriterine göre hasar alanlarının bağlantı kalınlığı boyunca değişimi ($E = 10, 40$ J, $t_2 = 0.2$ mm, $\alpha = 0°$) . . . 77

11 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 45°$) 78

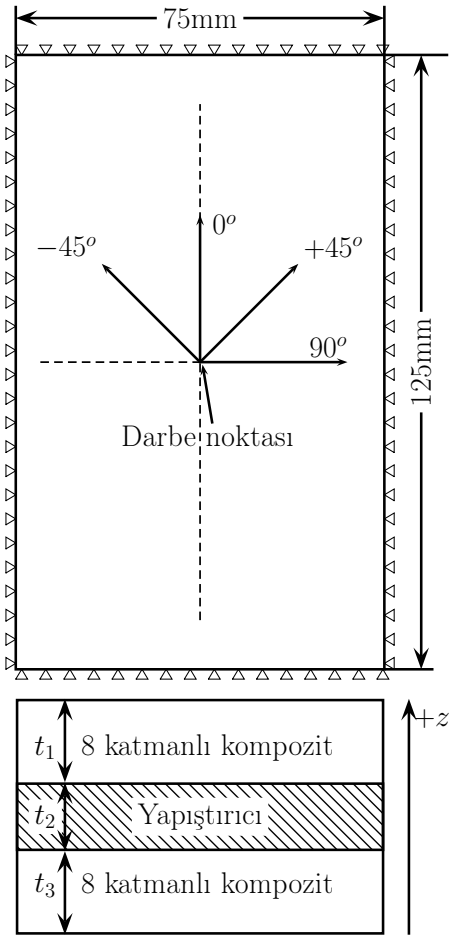
12 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 45°$). 79

13 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 90°$). 80

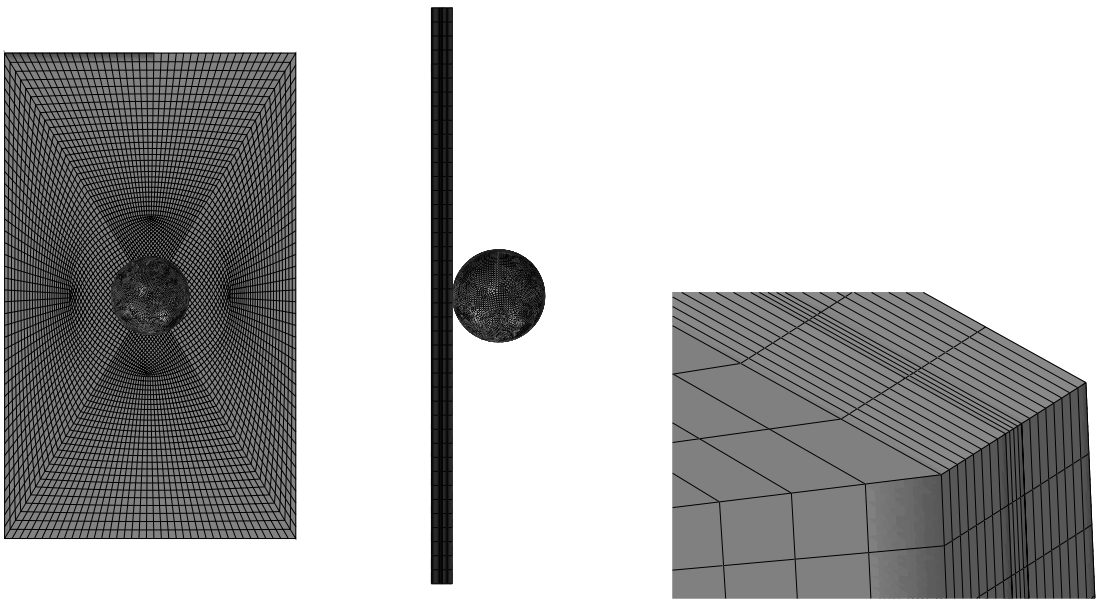
14 Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 90°$). 81



Şekil 1: Fiber takviyeli katmanlı kompozit plakaların yapıştırılmasında kullanılan Araldite 2015'in gerilme-şekil değiştirme ($\sigma - \varepsilon$) diyagramı.

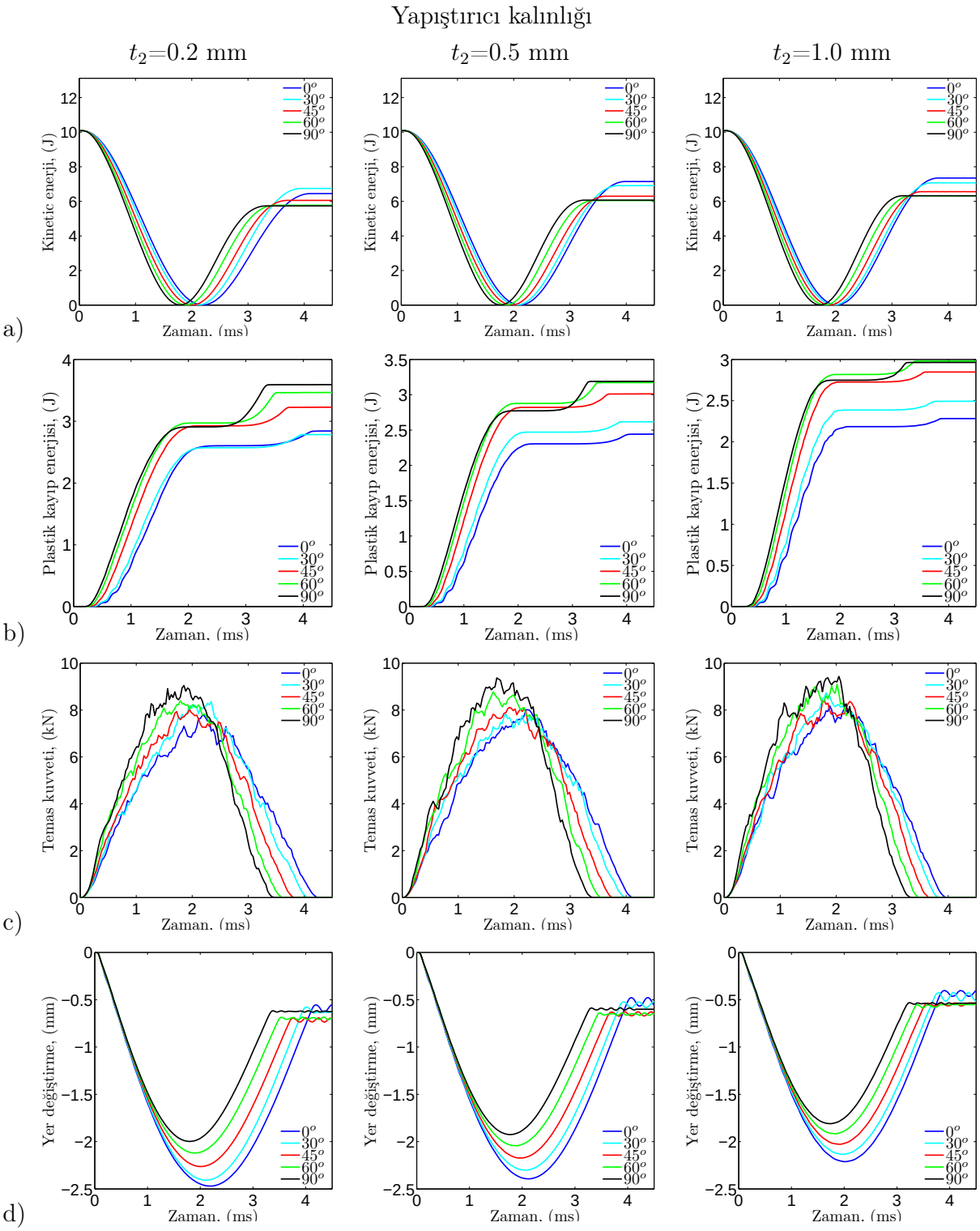


Şekil 2: ASTM D 7136D standartlarına uygun olarak yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli kompozit plakalar için teorik model geometrisi [70].

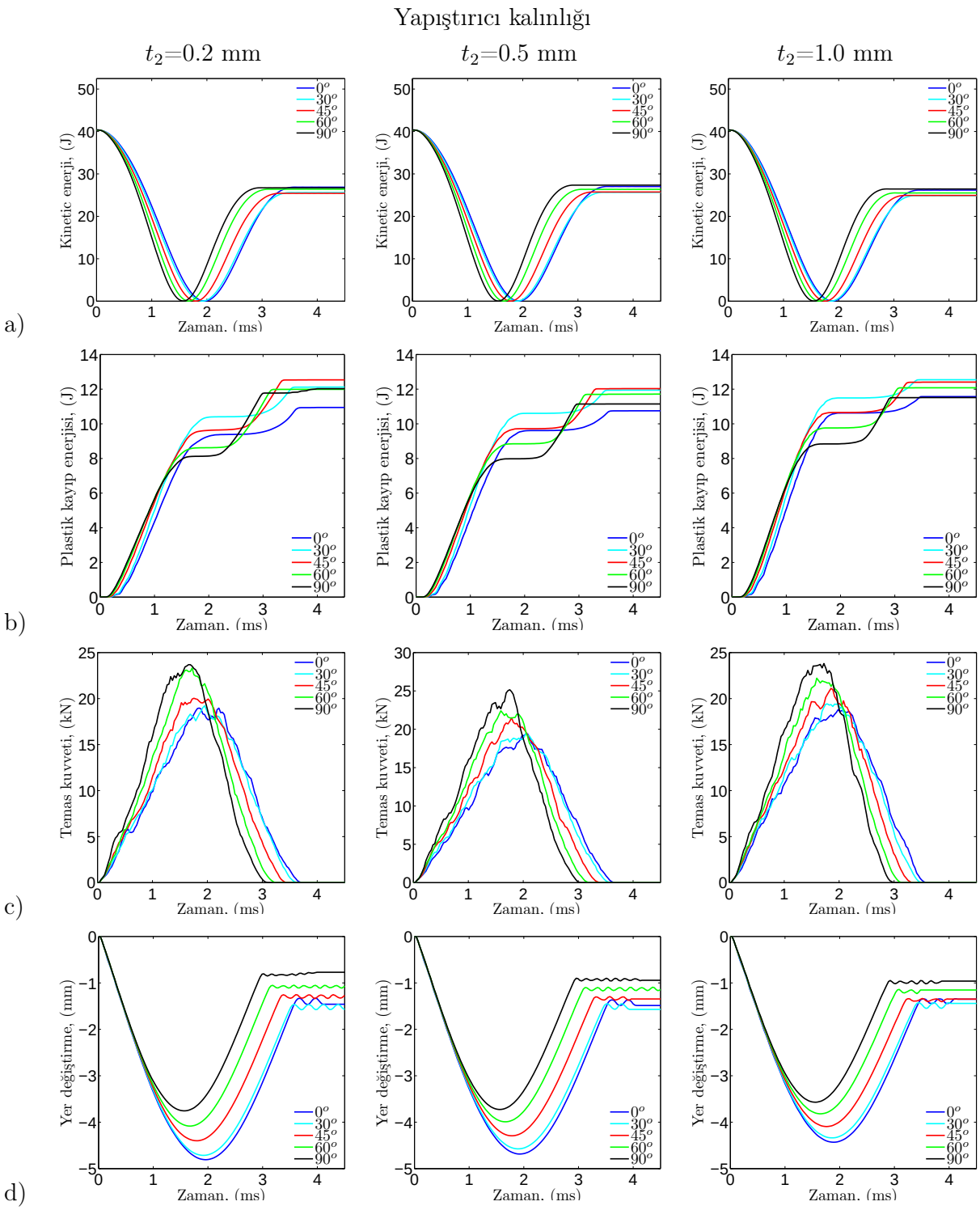


a) üstten görünüş b) yan görünüş c) yapıştırıcı ve kompozit plaka kesiti

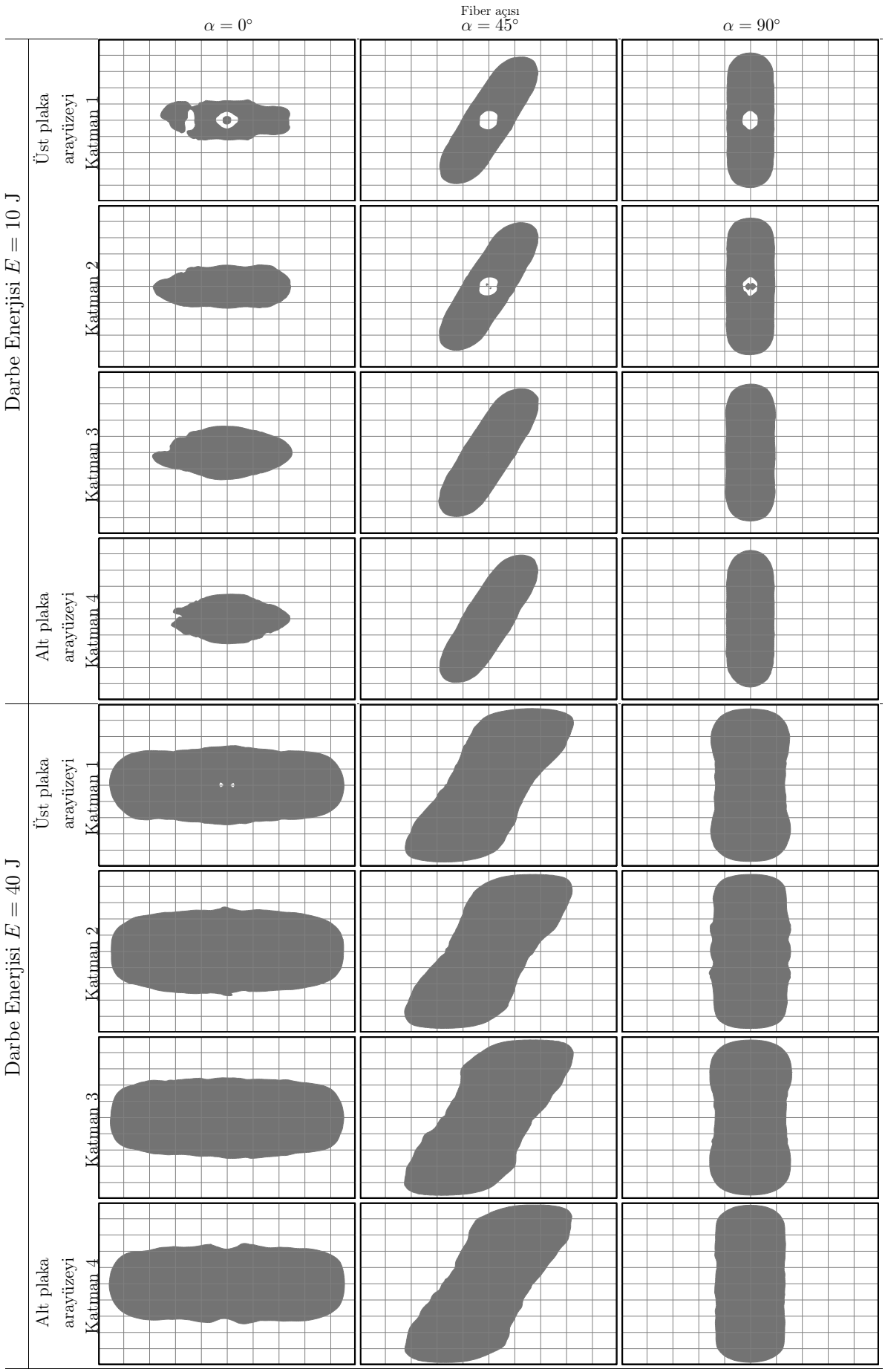
Şekil 3: Yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli katmanlı kompozit plakanın sonlu elemanlar modeli, a) üstten görünüş, b) yan görünüş, c) yapıştırıcı ve kompozit plaka kesiti.



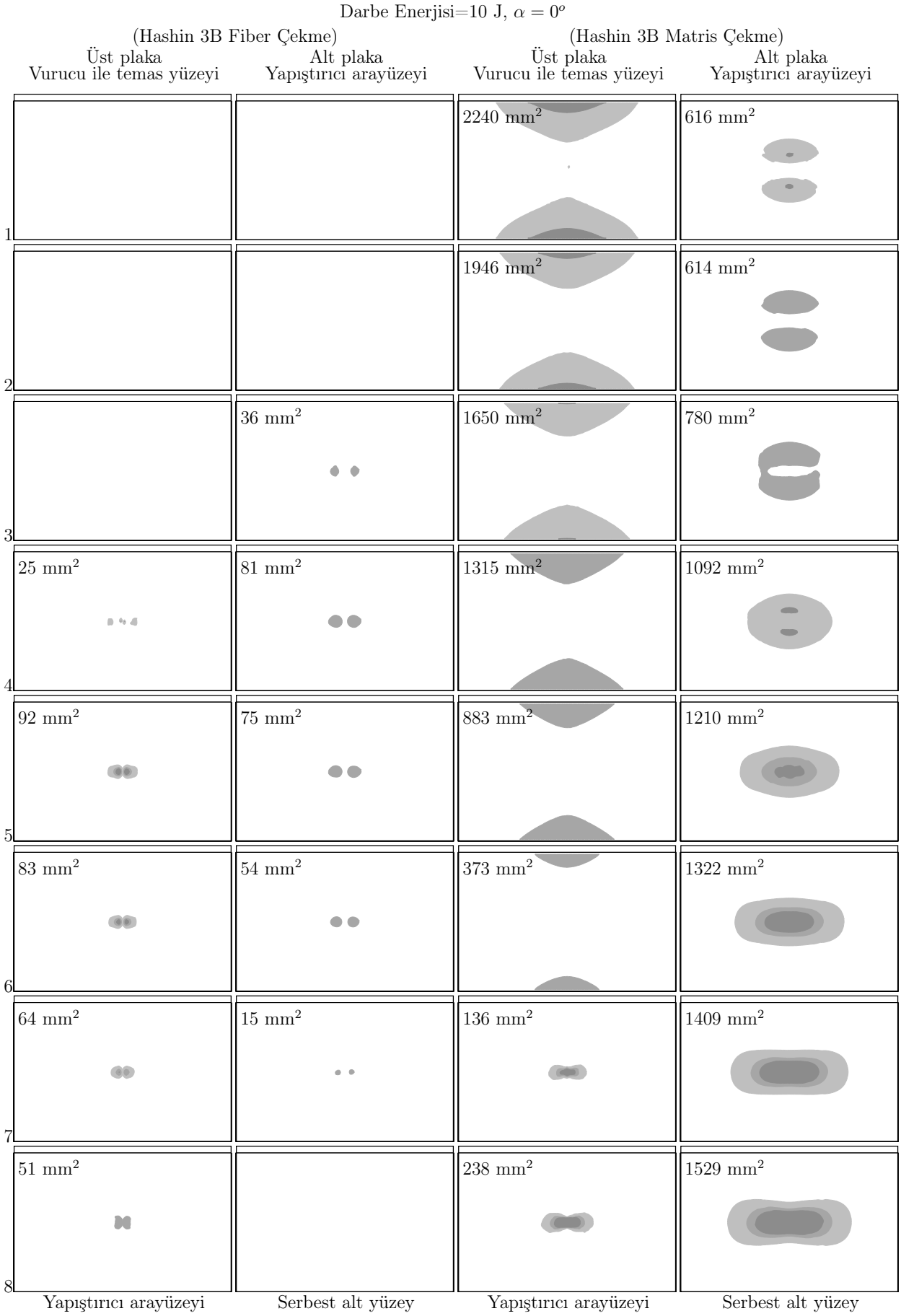
Şekil 4: Fiber açısının ($\alpha = 0, 30, 45, 60, 90°$) ve yapıştırıcı kalınlığının ($t_2 = 0.2, 0.5, 1.0$ mm) yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların a) kinetik enerji, b) plastik kayıp enerji, c) temas kuvveti, d) yer değiştirme davranışları üzerine etkisi (Darbe enerjisi $E = 10$ J).



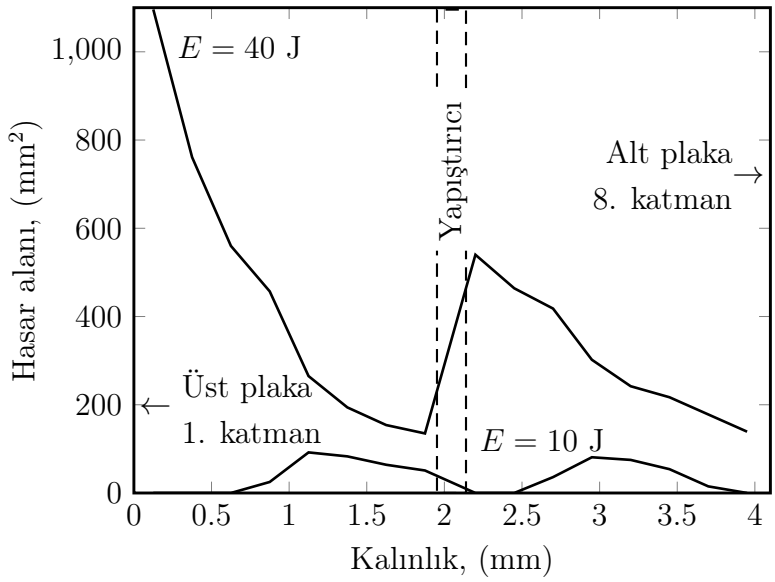
Şekil 5: Fiber açısının ($\alpha = 0, 30, 45, 60, 90°$) ve yapıştırıcı kalınlığının ($t_2 = 0.2, 0.5, 1.0$ mm) yapıştırıcı ile birleştirilmiş fiber takviyeli plastik esaslı katmanlı kompozit plakaların a) kinetik enerji, b) plastik kayıp enerji, c) temas kuvveti, d) yer değiştirme davranışları üzerine etkisi (Darbe enerjisi $E = 40$ J).



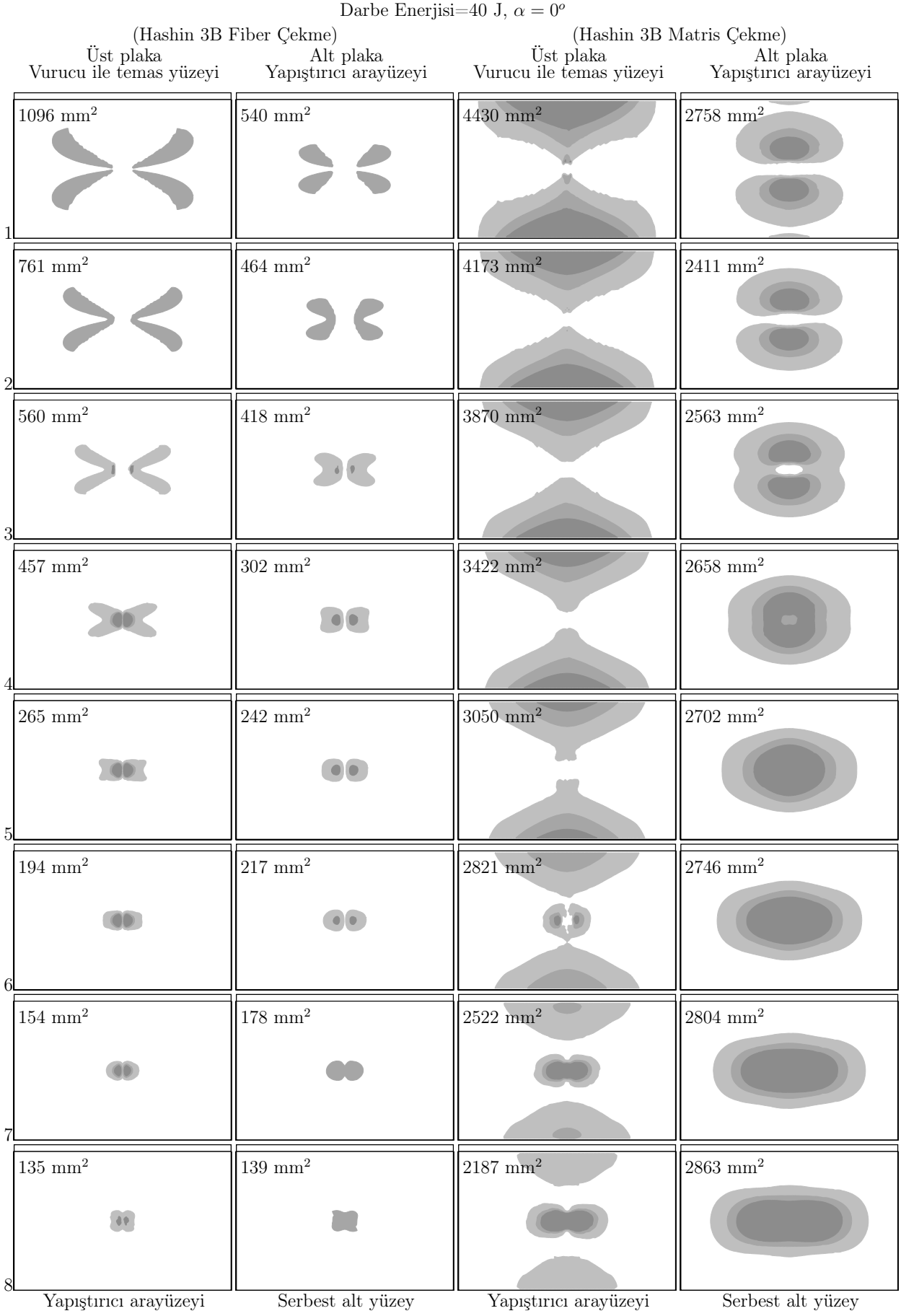
Şekil 6: Farklı fiber açıları ($\alpha = 0,\ 45,\ 90°$) ve darbe enerjilerinde ($E = 10, 40$ J) yapıştırıcı kalınlığı boyunca dört katmanda oluşan kalıcı hasar bölgeleri (yapıştırıcı tabakası boyutları $125 \times 75 \times 0.2$ mm).



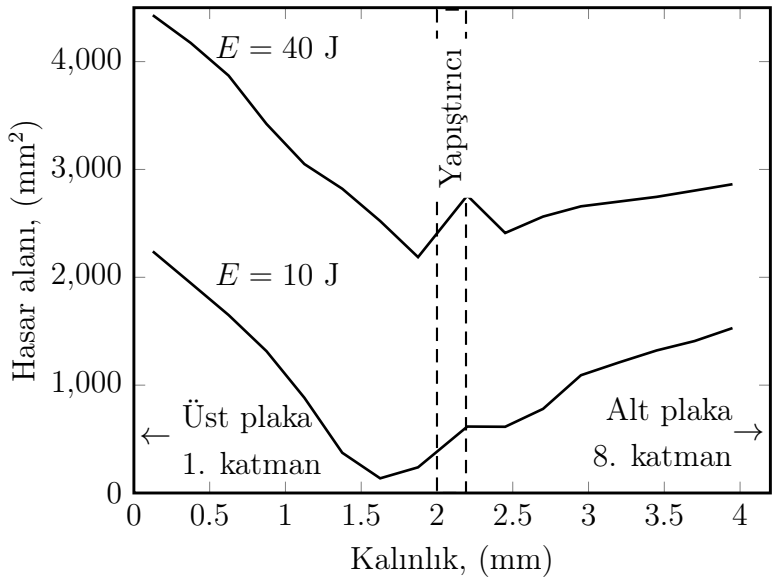
Şekil 7: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fibre ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 0°$).



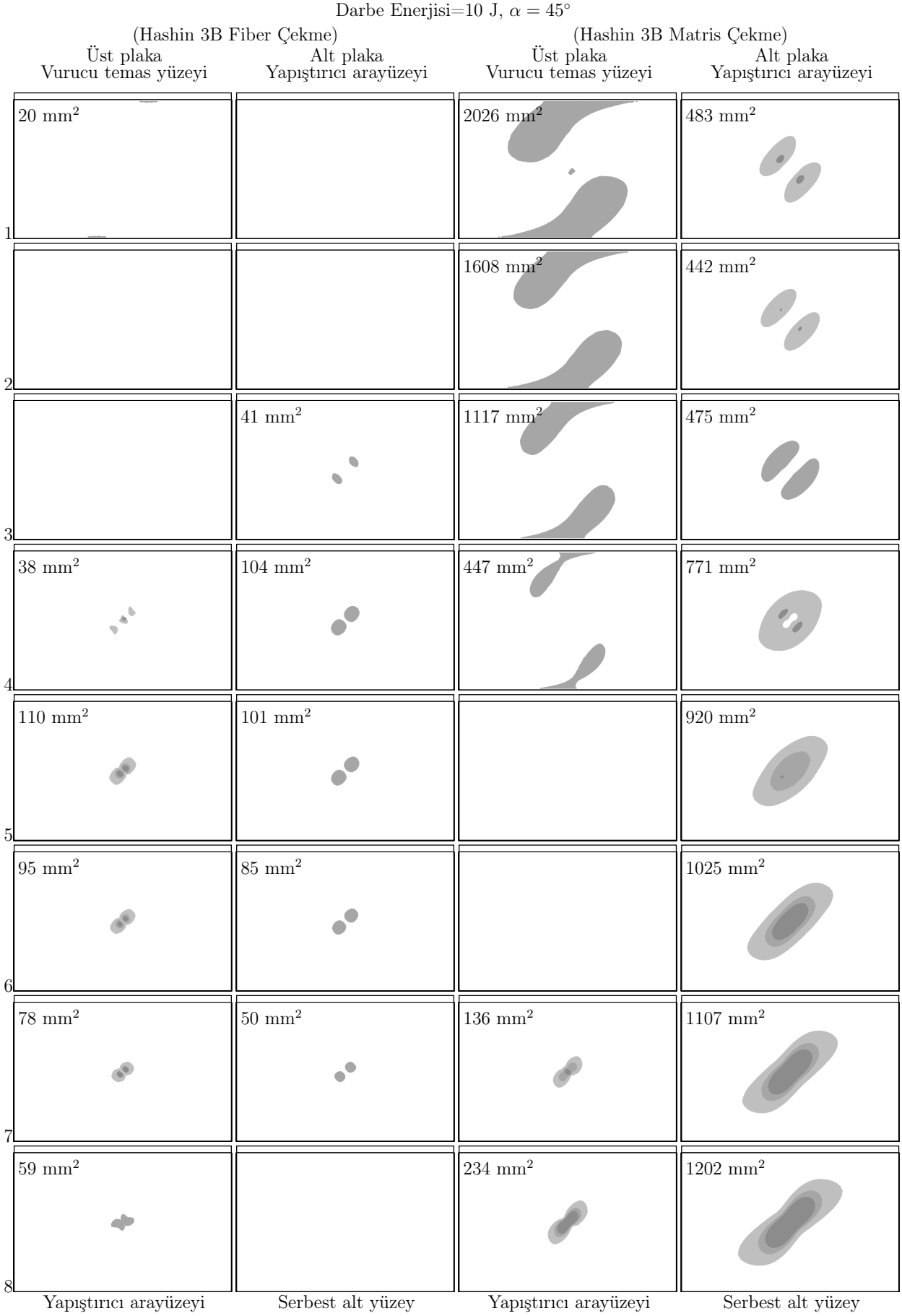
Şekil 8: Hashin'in 3B çekme altında fiber hasar kriterine göre hasar alanlarının bağlantı kalınlığı boyunca değişimi ($E = 10, 40$ J, $t_2 = 0.2$ mm, $\alpha = 0°$)



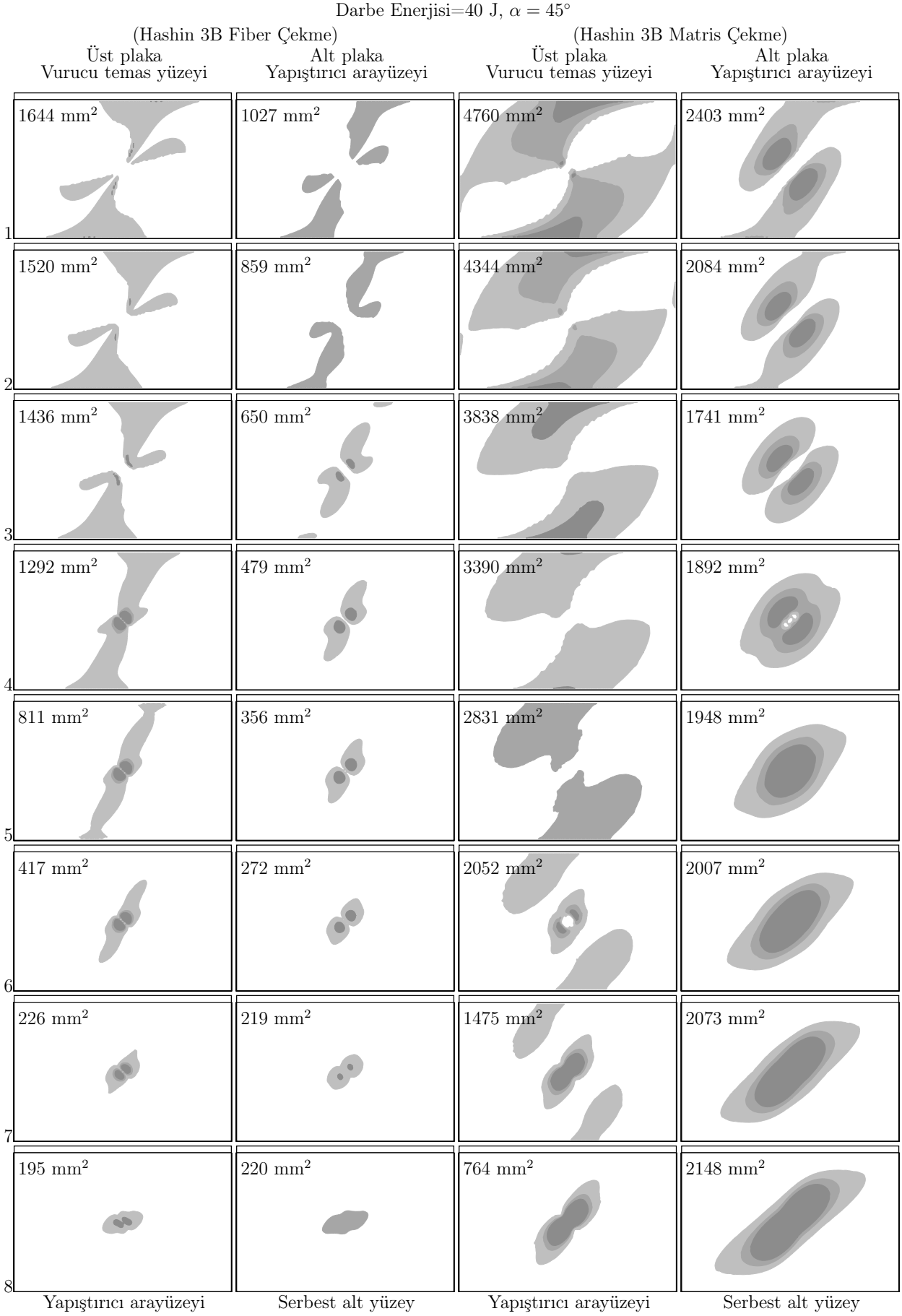
Şekil 9: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 0°$).



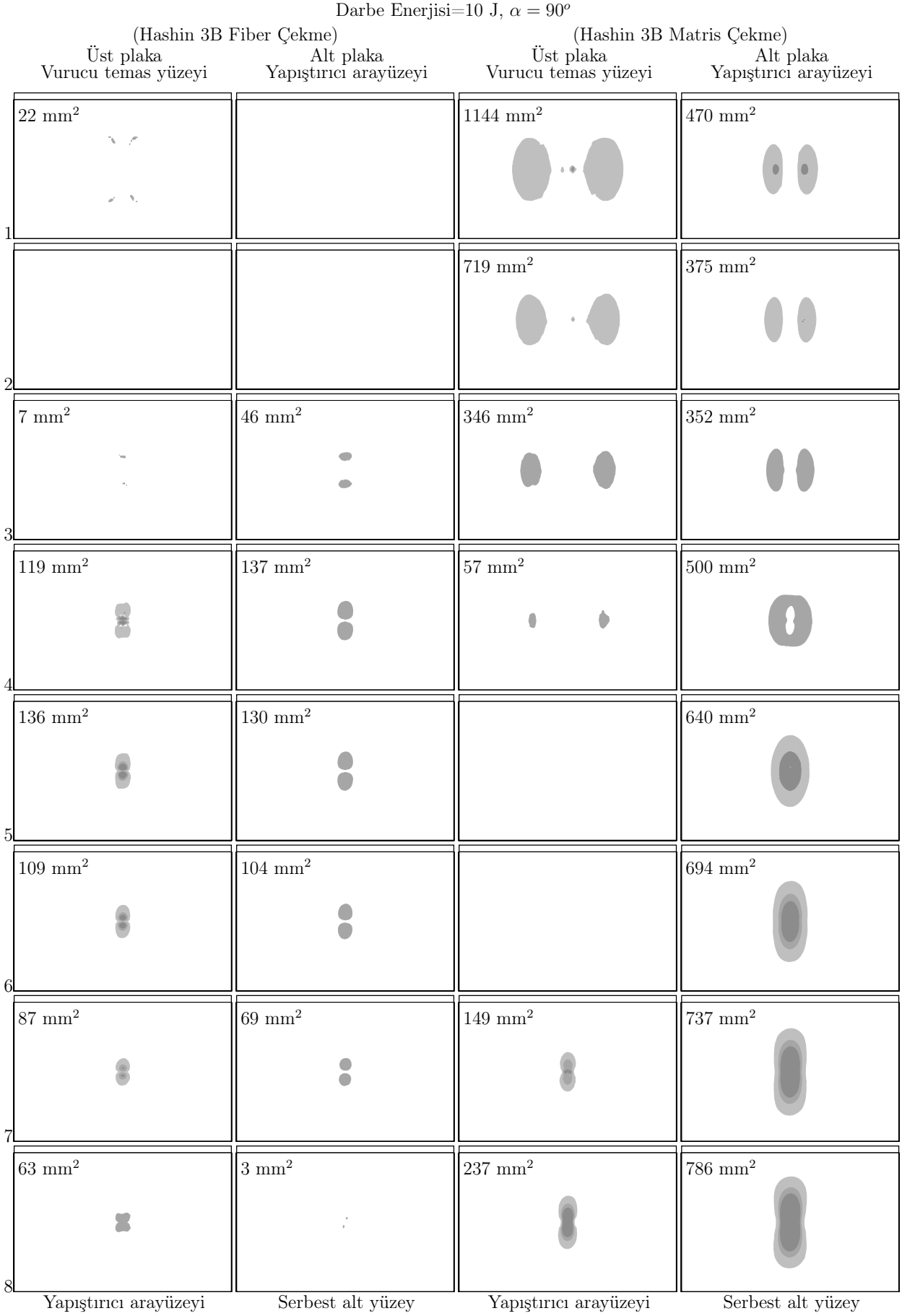
Şekil 10: Hashin'in 3B çekme altında matris hasar kriterine göre hasar alanlarının bağlantı kalınlığı boyunca değişimi ($E = 10, 40$ J, $t_2 = 0.2$ mm, $\alpha = 0°$)



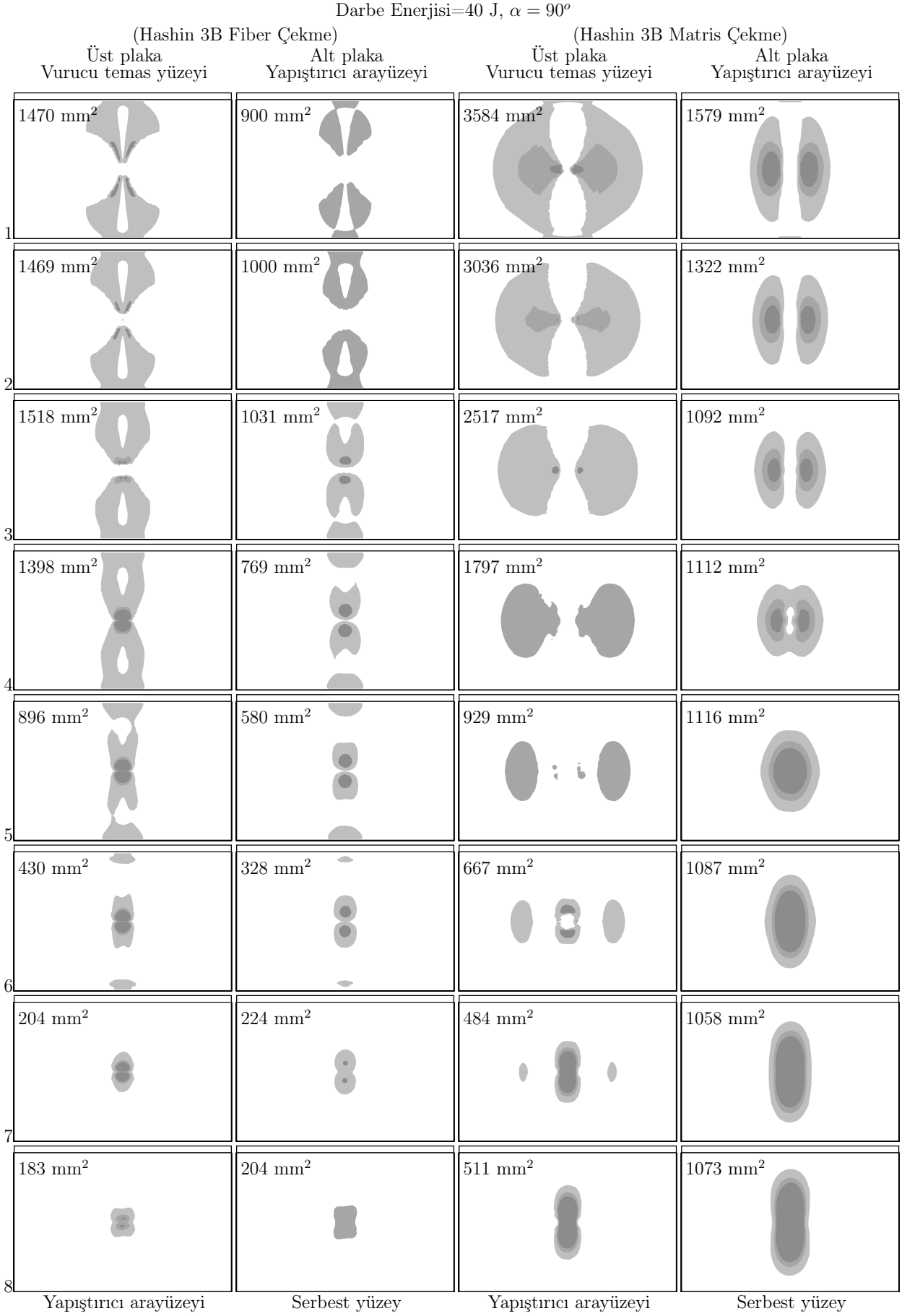
Şekil 11: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 45°$)



Şekil 12: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 45°$).



Şekil 13: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 10$ J, $\alpha = 90°$).



Şekil 14: Darbe sonrası kompozit plakaların katmanlarında Hashin'in 3B çekme altında fiber ve matris hasar kriterlerine göre oluşan hasar alanları ($t_2 = 0.2$ mm, $E = 40$ J, $\alpha = 90°$).