

T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ



**PROXİMITY UZAYLARIN TOPOLOJİK KATEGORİSİNDE
LOKAL VE GENEL AYIRMA AKSİYOMLARI**

Proje No: FDA-2015-5625

Proje Türü:
Kurum Dışı Destekli Araştırmalar İçin İhtiyaç Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. Muammer KULA
Fen Fakültesi / Matematik Bölümü

Araştırmacının Adı Soyadı
Arş. Gör. Samed ÖZKAN
Fen Fakültesi / Matematik Bölümü

Ocak 2016

KAYSERİ

Proximity uzaylar teorisinin temeli Frigyes Riesz tarafından 1908'de Roma matematik kongresinde ortaya atılmıştır. Konu Efromovich tarafından 1950'lerin başlarında yeniden keşfedilmiştir. Efromovich, herhangi bir X cümlesinin A ve B alt cümleleri için " A , B 'ye yakındır" proximity bağıntısını karakterize etmiştir.

Proximity uzaylar topolojik bakımdan çok zengin özelliklere sahiptirler. Bu nedenle proximity yapısı ve bu yapının topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve uniform (düzgün) uzaylarla olan ilişkileri birçok matematikçi tarafından incelenmiş ve bu alanda birçok araştırma yayınlanmıştır. Fakat proximity uzaylar topolojik kategorisi alanında çalışmaları olan araştırmacıların sayısı oldukça azdır.

Bu proje çalışmasında öncelikle kümeler üzerindeki keyfi bir topolojik kategori için lokal ve genel ayırma aksiyomları tanımları incelenmiştir. Daha sonra proximity uzay kavramı ve bu uzayın özellikleri göz önünde bulundurularak oluşturulan Proximity uzaylar topolojik kategorisi (Prox) ve bu kategorinin özellikleri araştırılmıştır. Prox kategorisi için lokal ayırma aksiyomları karakterize edilerek, lokal ayırma aksiyomları yardımıyla tanımlanan bir objenin (kuvvetli) kapalı ve (kuvvetli) açık altobjeleri Prox kategorisi için belirlenmiştir. Ayrıca bağlantılı objelerin çeşitli kavramlarının her birinin karakterizasyonu da bu kategoriye aktarılmıştır. Son olarak Prox topolojik kategorisi için genel ayırma aksiyomları karakterize edilerek, lokal ve genel ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Söz konusu bu çalışma, TÜBİTAK tarafından 114F300 proje numaralı 1002-Hızlı Destek Programı kapsamında desteklenmiştir. Proje için Tübitak destek miktarı yetersiz kalabilir düşüncesiyle Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimine "Dış Kaynaklı Projeler İçin İhtiyaç Projesi" kapsamında destek talebinde bulunulmuştur. "Proximity Uzayların Topolojik Kategorisinde Lokal ve Genel Ayırma Aksiyomları" başlıklı projemizin BAP Birimince desteklenmesine karar verilmiştir. Bu süreçte gerekli sarf malzemelerinin alımı BAP birimince tahsis edilen ödenekten gerçekleştirilmiştir.

TEŞEKKÜR

FDA-2015-5625 numaralı "Proximity Uzayların Topolojik Kategorisinde Lokal ve Genel Ayırma Aksiyomları" başlıklı projemiz Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

Ayrıca bu proje TÜBİTAK tarafından 114F300 proje numaralı 1002-Hızlı Destek Programı kapsamında da desteklenmiştir.

Çalışmamızı destekleyen bu kurumlara teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	3
2. GENEL BİLGİLER	5
3. GEREÇ VE YÖNTEM	6
3.1. Temel Tanımlar	6
4. BULGULAR	13
4.1. Lokal Ayırma Aksiyomları	13
4.2. Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeler	14
4.3. Bağlantılılık	15
4.4. Genel Ayırma Aksiyomları	16
4.5. Karşılaştırma ve İlişkiler	17
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	18
5.1. Öneriler	19
KAYNAKLAR	20

ÖZET

Proximity uzaylar teorisi 1908'de Roma matematik kongresinde, bugün teoremin temel kavramları haline gelen Riesz'in [47] "Enchainment Teorisi" üzerine çeşitli fikirlerin tartışıldığı sırada ortaya çıkmıştır. Konu Efremovich [19, 20] tarafından 1950'lerin başlarında yeniden keşfedilmiştir. Efremovich, herhangi bir X cümlesinin A ve B alt cümleleri için " A , B 'ye yakındır" proximity bağıntısını karakterize etmiştir. Bu bağıntıyla X cümlesi *proximity uzay* adını almıştır.

Proximity uzay için metrik uzayın doğal bir genellemesidir diyebiliriz [41]. Metrik uzayda yapılan çalışmaların proximity uzaya aktarılabilmesi, proximity uzay kavramının önemli uygulama alanlarına sahip olduğunu göstermektedir. Son yıllarda proximity uzayların sitoloji (hücre biyolojisi) alanında [42, s.44], kriminolojide el yazısı sahteciliği ve sahte imza tespitinde; zoolojide de kamuflaj konusunda uygulamalarının mevcut olduğunu gösteren birçok araştırma yayınlanmıştır [44, 45].

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [28], Kent [33], Wyler [55], Schwartz [48] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Sözü geçen kavramların çoğu topolojik kategoriye kapanış operatörleri kullanılarak genişletilmiştir. Baran [4] te ayırma aksiyomlarını, [6] da kapalılık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir.

Bu proje çalışmasında öncelikli amacımız topolojideki kapalılık, bağlantılılık, ayırma aksiyomları gibi bazı önemli kavramları **Prox** topolojik kategorisi için karakterize etmektir. Bu amaçla Proximity uzayların topolojik kategorisi için bir p noktasındaki (lokal) ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Ayrıca lokal ayırma aksiyomları yardımıyla tanımlanan bir objenin (kuvvetli) kapalı ve (kuvvetli) açık altobjeleri **Prox** kategorisi için belirlenerek, bağlantılı objelerin bu kategori için karakterizasyonu yapılmıştır. Son olarak **Prox** topolojik kategorisi için genel ayırma aksiyomları karakterize edilerek, lokal ve genel ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Kategori, Proximity Uzay, Ayırma Aksiyomları, Kapalılık, Bağlantılılık

ABSTRACT

The germ of the theory of proximity spaces showed itself as early as 1908 at the mathematical congress in Rome, when Riesz [47] discussed various ideas in his “theory of enchainment” which have today become the basic concepts of the theory. The subject was rediscovered in the early 1950’s by Efremovič [19, 20] when he axiomatically characterized the proximity relation “ A is near B ” for subsets A and B of any set X . The set X together with this relation was called a proximity space.

Proximity space is a natural generalization of a metric space [41]. The studies which have done in metric spaces can be transformed into proximity spaces, shows that proximity spaces have wide application areas. In recent years, many searches which shows proximity spaces have applications in Cell Biology [42, p.44], handwriting forgery and forged signature detection in criminology, about camouflage in zoology, have been published [44, 45].

The notion of topological space has been generalized to include convergence spaces, limit spaces, bornological spaces, and preordered spaces, by Herrlich [28], Kent [33], Wyler [55], Schwartz [48], among others to the notion of a topological category. Some important notions in topology such as compactness, connectedness, closedness, separation properties have been extended to arbitrary topological categories in many different ways. In view of this, it is useful to be able to not only extend these various notions to arbitrary topological categories but also to have a convenient characterization of them in certain topological categories of interest. Most of the notions which have mentioned above have been extended to topological categories by using closure operators. Baran has extended separation properties in [4], the notion of closedness in [6] to topological categories without using closure operators.

In this project our main goal was to characterize some important notions in topology such as closedness, connectedness, separation properties in the topological category of proximity spaces. For this purpose separation properties at a point p (local) were characterized in the topological category of proximity spaces. Furthermore the (strongly) closed and (strongly) open subobjects of an object were characterized in this category and also the characterization of the connected objects for this category was done. Finally generalized separation properties were characterized in the category **Prox** and the relationships between local and generalized separation properties were examined in this category.

Keywords: Topological Category, Proximity Space, Separation Axioms, Closedness, Connectedness

1. GİRİŞ

Proximity uzaylar 1950'lerde Efremovich [19, 20] tarafından tanımlanmıştır. Proximity bağıntısı X in herhangi A ve B alt cümleleri için " A, B ye yakındır" şeklinde ifade edilmiştir. Bu bağıntıyla tanımlanan bir X cümlesi *infinitesimal* (sonsuz küçük, bölünemeyecek kadar küçük) uzay yani *proximity uzay* adını alır. Ancak Krishna Murti [34], Wallace [53] ve Szymanski [52] tarafından yayınlanan "Cümlelerin Ayrılması" kavramlarıyla ilgili olan çalışma Proximity teorisinin ilkel, temel kavramlarını oluşturmuştur. Her iki çalışma benzerlik göstermesine rağmen kullanılan aksiyomlar Efremovich'in kullandıklarından daha zayıftır. Daha sonraları Efremovich, proximity uzaylar için aksiyomların denklik sınıflarını elde etmek üzere proximity komşuluklarını kullanarak teoriye alternatif bir yaklaşım elde etmiştir.

X in bir A alt cümlesinin kapanışını X in A ya yakın olan tüm noktalarının bir sınıfı olarak tanımlayan Efremovich, bir topolojik uzayın bir proximity uzaydan üretilebileceğini, bu şekilde tam regüler uzay elde edileceğini göstermiştir. Efremovich daha sonraki çalışmalarında Urysohn fonksiyonu yardımıyla her tam regüler X uzayının bir proximity uzaya dönüştürülebileceğini göstermiştir.

Daha sonraları, Mrówka [40] bir proximity uzaydan tüm diziler kümesine bir yakınlık bağıntısı tanımlamıştır. Bu ise *Fréchet L-zayıf* proximity benzeri bir kavram ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Benzer bir kavram Goetz [25] tarafından *UL-uzayını* elde etmek için bağımsız olarak elde edilmiştir. Ancak bir proximity uzayın tam regülerliğinin tersine *UL-uzayının* bir topolojik uzay olması gerekmez. Poljakov [46] ve Goetz [26] bu alanda yapılan çalışmaları daha ötesine taşıyarak Efremovich'in proximity tanımıyla bu kavram arasındaki bağlantıyı tartışmışlardır.

Bir proximity uzaydan diğerine bir dönüşüm bağıntısını araştırmak üzere Efremovich'in bir proximity dönüşüm tanımlaması kaçınılmazdı. Cümlelerin proximity özelliğini koruyan bir dönüşüm, doğal olarak topolojik uzaylardaki sürekli fonksiyonlar ve düzgün (uniform) uzaylardaki düzgün sürekli dönüşümlerin bir benzeridir. İki proximity uzay arasındaki dönüşümün üretilen topolojilere göre sürekli oldukları kolayca gösterilebilir.

1952'de Smirnov [49] proximity uzay çalışmalarını genişleterek Alexandroff'un "Hangi topolojik uzaylar verilen topoloji ile uyumlu bağıntısını kabul eder?" sorusunu cevaplamıştır. Bir Tychonoff uzayının Hausdorff kompaktlaştırılması ile uyumlu bir proximity arasındaki bağlantıyı keşfederek "Bir topolojik uzay uyumlu bir proximity bağıntısını kabul eder ancak ve ancak kompakt bir Hausdorff uzayın alt uzayıdır" olduğunu göstermiştir.

Smirnov tam regüler bir uzayda verilen tüm proximity yapıların, kısmi sıralı cümlelerin ve tüm kompaktlaştırılmış kısmi sıralı cümlelerin arasında bir izomorfizm olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada proximity uzaylar teorisini, proximity uzayların kompaktlaştırılmasına indirgemıştır.

Bazı araştırmacılar belli başlı cümlelerdeki keyfi topolojileri tanımlamak için Efremovich'ten daha zayıf aksiyomlar kullanmışlardır. Böylece quasi-proximity, paraproximity ve pseudo-proximity gibi genelleştirilmiş proximity kavramları literatürde yerini almıştır.

1960'lı yıllarda Pervin [43] ve Leader [36] Efremovich'in orijinal aksiyomlar kümesinin genelleştirilmesini birbirinden bağımsız olarak çalışmışlardır. Pervin simetri aksiyomunu dikkate almayarak *quasi-proximity*'yi elde etmiş, Leader ise topolojik d-uzayına ulaşmak için simetri aksiyomunu çıkarmanın yanı sıra, P_5 aksiyomunun daha zayıf bir formunu kullanmıştır. Daha sonra Lodato [37] çalışmasında *Lodato proximity* olarak ifade ettiğimiz simetrik ikili bağıntıyı elde etmek için Leader'ın aksiyomlar cümlesine simetri şartını eklemiştir.

Kategori kavramı ilk olarak 1945'te Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından ortaya atılmıştır [21, 22]. Topolojideki özellikle cebirsel topolojideki çalışmalarının bir parçası olarak kategori, fanktorlar ve doğal dönüşüm kavramlarını literatüre kazandırmışlardır. İkili daha sonra yaptıkları açıklamalarda amaçlarının doğal dönüşümleri anlamak olduğunu bunun için de kategori kavramına ihtiyaç duyan fanktorların tanımlanması gerektiğini belirtmişlerdir. Matematiğin farklı dalları kategoriler içinde şekillendirilebilmiştir. Bu kategoriler fanktorlar tarafından bağlanılabilir olup, bir kategoride ispatlanan teoremler ve gerçekler, bağlantıyı sağlayan fanktor sayesinde bir diğer kategoriye taşınabilmiştir.

Kategori teorisi birbirinden oldukça farklı görünen iki saha olan topoloji ve cebir arasında bir köprü kurmak için geliştirilmiştir. İlk önceleri kategori teorisi zor matematiksel konuların varlığını açıklığa kavuşturan derin bir dilden daha uzaktı. Bununla beraber 1957'de Alexander Grothendieck kategori teorisini cebirsel denklemlerin çözümünde emsalsiz bir görüş sağlayan yeni bir matematiksel makine (new homology teori) oluşturmakta kullandı.

Bill Lawvere ise kategori teorisini tüm matematiksel düşünceler için yeni bir temel olarak görmüştür. Lawvere, cümlelerin kategorisinin belli özellikleri sağlayan, matematiksel evrenin merkezi olması gerekmeyen basit bir kategori olduğunu göstermiş, ayrıca tüm cebirsel teorilerin nasıl tek bir sistemin örnekleri olarak görülebileceğini açıklamıştır.

Kategori teorisi yeni bir dil üreterek farklı alanlarda çalışanlar arasındaki iletişimi kolaylaştırmış, birbirinden bağımsız çeşitli teorem ve yapıları yüzeye çıkararak eski problemlere yeni bir anlam kazandırmıştır. Kategori teorisinin özellikle coğrafi bilgi sistemlerinde, astronomide uzay gözlemlerinde, moleküler biyolojide DNA ve RNA kodları konusunda, bir metro hattı modelleme gibi ulaşım haritaları oluşturmada uygulamaları olduğu gibi kategori; bilgisayar, fizik, malzeme, jeoloji, klimatoloji vb. birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Kategoriyi gerçek dünyaya aktaran bu ve benzeri birçok önemli uygulamalar [51] de verilmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Matematik bilim dalının farklı branşlarındaki ayrışma (farklılaşma) ve uzmanlaşmanın (specialization) artması matematikçileri, bu çok sayıdaki farklı branşların ortak bir alan üzerinde düşüncelerini zorunlu kılmıştır. Kategori teorisi bu ortak alanlardan bir tanesidir ki, farklı alanlardaki araştırmacıların daha kolay iletişim kurmaları için ortak bir dil sağlamaktadır. Genel topoloji matematiğinin cebir, analiz, fonksiyonel analiz, olasılık teorisi, lattice teorisi gibi pek çok teoride uygulamalara sahip olduğundan, topologlar topolojik fikirleri (ideas) kategori diline çevirmeyi tercih ederler.

E ve B iki kategori olmak üzere $U: E \rightarrow B$ fanktoru verilsin. U fanktoru belirli, küçük demetlere sahip ve U – kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahipse U 'ya topolojik fanktor veya E ye B üzerinde topolojik kategori denir [1]. Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [28], Kent [33], Wyler [55], Schwartz [48] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, Herrlich [28] belli bir kaynaktan başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriyi tanımlamıştır. Wyler [55] topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır. Topolojideki kompaktlık, bağlantılılık, kapalılık, ayırma aksiyomları vb. bazı önemli kavramlar değişik yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemelerin çoğu kapanış operatörleri kullanılarak yapılmıştır. Baran [4] te ayırma aksiyomlarını ve [6] da kapalılık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Bu genişlemeleri yapmanın bir amacı, bu kavramların Tietze genişleme teoremi, Urysohn lemması, Urysohn metriklenebilme teoremi, Tychonoff teoremi gibi teoremlerin ifadelerinde yer almalarıdır. Diğer bir amacı da kapalılık kavramı ile karakterize edilebilen kompaktlık ve bağlantılılık kavramlarını topolojik kategoriye genişletmektir.

Baran, [4] te kümeler üzerinde tanımlanmış keyfi bir topolojik kategori için bir p noktasında, yani lokal olarak ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır [5, 7, 13, 16]. Ardından bunu topos teorideki üreteç eleman (the generic element) metodunu [31, s.39] kullanarak noktadan bağımsız olan tanımlara genelleştirmiştir. Topostaki objeler noktalara sahip olmayabilir. Fakat bu objelerin her zaman bir üreteç noktası (generic point) mevcuttur. Bu genelleştirmeyi yapmasının bir nedeni budur. Diğer bir nedeni de keyfi topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarının bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmış olmasıdır [4, s.335]. Baran [4, 6, 12, 15] küme tabanlı topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [18] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [13, 14, 16]. Ayrıca bu kavramları kullanarak topolojide iyi bilinen kompaktlık [10], Hausdorffluk [9] ve bağlantılılık [15] kavramlarını topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Sözü edilen bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olur. Genel olarak, ayrılma aksiyomları farklı noktaları ve ayırık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları ve diskre obje ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Kategoriler koyu harflerle veya italik kısaltmalarla gösterilirler. Örneğin cümleler ve fonksiyonlardan oluşan kategori **Set** ile, topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlardan oluşan kategori **Top** ile, proximity uzaylar ve proximity dönüşümlerden oluşan kategori **Prox** ile gösterilir. Hunsaker ve Sharma $U: Prox \rightarrow Set$ fanktorunun topolojik fanktor olduğunu göstermişlerdir [30].

Bizim bu projedeki amacımız topolojideki kapalılık, bağlantılılık, ayırma aksiyomları gibi bazı önemli kavramları Proximity uzayların topolojik kategorisi için karakterize etmektir. Bu amaçla Prox kategorisi için lokal ayırma aksiyomları karakterize edilmiş ve bir noktadaki (lokal) T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları kullanılarak **Prox** kategorisi için bir objenin (kuvvetli) kapalı ve (kuvvetli) açık altobjeleri bulunmuştur. Bağlantılı objelerin çeşitli kavramlarının her birinin karakterizasyonu da yine bu kategoriye aktarılmıştır. Son olarak **Prox** topolojik kategorisi için genel ayırma aksiyomları karakterize edilerek, lokal ve genel ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu çalışma sayesinde diğer bilim insanları kendi çalışma alanları için daha kolay ve daha geniş bir alanda şimdiye kadar yapmış oldukları çalışmalarını geliştirme fırsatı bulacaklardır.

2. GENEL BİLGİLER

Bir X cümlesi üzerindeki topoloji X 'in tüm alt cümlelerinin bir sınıfı olan $P(X)$ cümlesi üzerinde tanımlanmış bir kapanış operatörü olarak tanımlanabilir. Bu bağlamda, topoloji bir noktanın bir cümleye “yakın (near)” olmasının aksiyomatize edilmesidir. Bu ise noktanın cümlelerin kapanışında olması anlamına gelmektedir. İki cümlelerin “yakın” olması kavramının aksiyomunun oluşturulmaya çalışılması doğal bir sonuçtur. Bir cümle üzerindeki proximity yapısının aksiyomları bu şekilde oluşturulmuştur.

Proximity'nin tanımlanması süreci biraz farklı gelişmiştir. Topolojide yakınlık (nearness) kavramının en az iki farklı gösterimi vardır. İlk olanı “topolojik ayrılma (separation)” olup aksiyomu 1941 de A. D. Wallace [53] tarafından oluşturulmuştur. İkincisi ise on yıl sonra Efremovich [19] tarafından, metrik uzayın iki alt cümlesinin yakınlığı “iki cümle arasındaki uzaklığın sıfır olması” şeklinde tanımlamıştır. Efremovich'in bu şekilde tanımladığı yakınlık kavramına proximity denmiştir.

Smirnov da proximity uzaylar konusunda bazı çalışmalar yapmıştır [49, 50]. Onun “tam regüler bir X uzayının kompaktlaştırmaları ile X üzerindeki uyumlu (compatible) proximityler arasındaki bire bir eşleme” araştırması bu yapılar üzerinde yapılan çalışmalara ilham vermiştir. Smirnov ayrıca proximity ve uniformity arasındaki ilişkiyi açıklayan ilk kişiydi. Gal [24], Alfsen ve Fenstad [2] Smirnov'un araştırması üzerinde çalışmaya devam ederek proximity uzaylar ve tamamen sınırlı (totally bounded) uniformityler arasında birebir eşleme olduğunu gösterdiler.

Proximity uzayların dönüşümleri ile ilgili olan ilk çalışma 1959'da Katetov [32] tarafından yapılmıştır. Farklı kişiler tarafından bu dönüşümler hakkında yapılmış araştırmalar olmasına rağmen, çok azında topolojik uzaylarda incelenmiş bazı yapıların karakterizasyonu proximity uzaylarda incelenebilmiştir.

Proximity uzay için metrik uzayın doğal bir genellemesidir diyebiliriz. Efremovich'in X in A alt cümlesinin kapanışını, X in A ya yakın bütün noktalarının bir sınıfı olarak tanımlaması, bir proximity uzayda topoloji üretilebileceğini göstermiştir. Bu şekilde tamamen regüler uzay elde edilir [23]. Ayrıca Efremovich, tamamen regüler her X uzayının Urysohn fonksiyonu yardımıyla bir proximity uzaya dönüştürülebileceğini de göstermiştir.

Genel topolojideki temel kavramlardan bazıları da ayırma aksiyomları kavramlarıdır ki bunlar topolojide Urysohn metriklenebilme teoremi, Urysohn lemması, Tietze genişleme teoremi gibi pek çok önemli teoremden kullanılmaktadır. Bu yüzden topolojik uzaylardaki ayırma

aksiyomları çeşitli yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir [3, 4]. Örneğin, topolojik uzayların kategorisinde, hepsi T_0 aksiyomuna denk olan dört farklı kategorik T_0 tanımı ([3], [4], [7] ve [54]) verilmiştir. Ayrıca Schwarz [54] da topolojik kategoride T_0 ve ayrılabilir (separated) objeler arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Topos teorisinin üreteç eleman metodu ([31] p. 39) kullanılarak p noktasında, yani lokal olarak çeşitli ayrılma aksiyomları Baran [4] tarafından cümleler üzerindeki topolojik uzaylar kategorisine genişletilmiştir. Cümle tabanlı topolojik kategorilerde “kapalı” ve “kuvvetli kapalı” kavramları Baran tarafından [4], [6], [12] makalelerinde verildi ve [13], [14] makalelerinde gösterilmiştir ki bu kavramlar bazı çok iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli [18] anlamındaki kapanış operatörü formunda verilmiştir. Fakat Baran [6] da kapalılık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Bu kapalılık kavramları kullanılarak, topolojik uzaylarda tanımlı kompaktlık ve bağlantılık kavramları topolojik kategoriye genişletilmiştir.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu proje çalışmasında yöntem olarak aşağıda kısaca açıklamaya çalıştığımız teorik çalışma uygulanmıştır. Öncelikle kümeler üzerindeki keyfi bir topolojik kategori için lokal ve genel ayırma aksiyomları tanımları incelenmiştir. Daha sonra proximity uzay kavramı ve bu uzayın özellikleri göz önünde bulundurularak oluşturulan **Prox** topolojik kategorisi ve bu kategorinin özellikleri araştırılmıştır. **Prox** kategorisi için lokal ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Ayrıca lokal ayırma aksiyomları yardımıyla tanımlanan bir objenin (kuvvetli) kapalı ve (kuvvetli) açık altobjeleri **Prox** kategorisi için bulunarak, bağlantılı objelerin çeşitli kavramlarının her birinin karakterizasyonu bu kategoriye aktarılmıştır. Son olarak **Prox** topolojik kategorisi için genel ayırma aksiyomları karakterize edilerek, lokal ve genel ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir cümle ve A, B, C 'ler de X 'in altcümleleri olsunlar. Bu takdirde X 'in kuvvet cümlesi üzerindeki bir δ kili bağıntısına, eğer aşağıdaki aksiyomları sağlarsa X üzerinde bir (*Efremovich*) *proximity* denir. (X, δ) ikilisine de *proximity uzay* adı verilir [41].

$$P_1) A \delta B \Rightarrow B \delta A$$

$$P_2) (A \cup B) \delta C \Leftrightarrow A \delta C \vee B \delta C$$

$$P_3) A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

$$P_4) A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$$

$$P_5) A \delta B \Rightarrow A \delta E \text{ ve } (X - E) \delta B \text{ olacak şekilde bir } E \text{ alt cümlesi vardır.}$$

Ayrıca proximity bağıntılar aşağıdaki aksiyomu da sağlarsa *ayrılmış (seperated) (ya da Hausdorff) proximity* adını alır.

$$P_6) \{x\} \delta \{y\} \Rightarrow x=y$$

Burada “ δ ” ifadesi δ bağıntısının “değili” dir.

Örnek 3.1.2.

$X = \{a, b\}$ olsun. $P(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ olur. Buna göre, $\delta^1 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X)\}$ bağıntısı $P_1 - P_5$ aksiyomlarını sağladığından bir proximity bağıntısıdır. Yani (X, δ^1) bir proximity uzaydır. Ayrıca δ^1 bağıntısı, P_6 aksiyomunu da sağladığından ayrılmış (ya da Hausdorff) proximity bağıntısıdır.

Burada $[P(X) - \{\emptyset\}] \times [P(X) - \{\emptyset\}]$ cümlesini düşündüğünde $(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}) \notin \delta^1$ dir. δ^1 bağıntısına diğer alt cümleleri de ekleyerek oluşturduğumuz $\delta^2 = \{(X, X), (\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (X, \{a\}), (\{a\}, X), (X, \{b\}), (\{b\}, X), (\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}$ bağıntısı da benzer şekilde proximity aksiyomlarını sağlar ve (X, δ^2) de bir proximity uzaydır. Fakat P_6 aksiyomunu sağlamadığından ayrılmış proximity değildir. Burada $\delta^2 = [P(X) - \{\emptyset\}] \times [P(X) - \{\emptyset\}]$ dir.

Tanım 3.1.3. Eğer $A \delta B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ şeklinde tanımlanırsa, δ 'ya X üzerinde *diskre proximity* denir. Diğer taraftan eğer X 'in boştan farklı her A ve B alt cümleleri için $A \delta B$ oluyorsa δ 'ya *indiskre proximity* denir.

Tanım 3.1.4. (X, δ) ve (Y, δ') iki proximity uzay, $f : (X, \delta) \rightarrow (Y, \delta')$ bir fonksiyon olsun. Eğer $A \delta B$ olduğunda $f(A) \delta' f(B)$ ise f ye *proximity dönüşüm* ($\delta -$ dönüşüm veya p -dönüşüm) denir.

Tanım 3.1.5. E ve B iki kategori olmak üzere $U : E \rightarrow B$ fanktoru verilsin. U fanktoru belirli, küçük demetlere sahip ve U – kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahipse U 'ya topolojik fanktor veya E ye B üzerinde topolojik kategori denir [1].

Proximity uzaylar ve proximity dönüşümlerden oluşan kategori **Prox** ile gösterilir. Hunsaker ve Sharma $\mathcal{U} : \text{Prox} \rightarrow \text{Set}$ fanktorunun topolojik fanktor olduğunu göstermişlerdir [30].

Tanım 3.1.6. X 'in iki ayrı kopyasının p noktasında çakışmasına X 'in kendisi ile wedge çarpımı denir ve $X \vee_p X$ şeklinde gösterilir. $X \vee_p X$ teki bir x noktası $X \vee_p X$ in birinci bileşeni ise x_1 ile ikinci bileşeni ise x_2 ile gösterilir.

Tanım 3.1.7. X bir cümle ve $p \in X$, $X \vee_p X$ de X in p wedge çarpımı olsun.

p de Temel Eksen Dönüşümü (Principle p Axis Map), $A_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$;

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

p de Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed p Axis Map), $S_p : X \vee_p X \rightarrow X^2$;

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

p de Katlama Dönüşümü (The Fold Map), $\nabla_p : X \vee_p X \rightarrow X$;

$$\nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2$$

olarak tanımlanır [4].

Eğer X reel sayılar cümlesi ve $p=0$ olursa p temel eksen dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimidir. p skewed eksen dönüşümünün görüntüsü ise $y=x$ doğrusu ve y ekseninin birleşiminden oluşur. Burada A_p ve S_p nin görüntüsünü X^2 de p orijinli eksenler olarak göz önüne alabiliriz.

X bir cümle ve $X^2 = X \times X$, X 'in kendisi ile kartezyen çarpımı olsun. p_1, p_2, ∇ fonksiyonlarını; $1 + p, p + 1, 1 + 1 : B \vee_p B \rightarrow B$ fonksiyonları yardımı ile tanımlarız. Burada sırasıyla $1 : B \rightarrow B$ birim fonksiyon, $p : B \rightarrow B$ p noktasındaki sabit fonksiyon ve $\pi_i : B^2 \rightarrow B$ ($i = 1, 2$) i -inci izdüşüm fonksiyonudur [24]. A_p ve S_p temel ve skewed eksen dönüşümleri olduğundan $\pi_1 A_p = p_1 = \pi_1 S_p$, $\pi_2 A_p = p_2$, $\pi_2 S_p = \nabla$ dir.

Herhangi bir topolojik kategoride p de $\overline{T}_0$, p de T'_0 ve p de T_1 tanımları aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.8. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X, E nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

- 1) X nesnesi p de $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D, U ’nun sol adjointi olan diskre fanktordur [4].
- 2) X nesnesi p de T_0' dür ancak ve ancak $\{id : B \vee_p B \rightarrow U(X \vee_p X) = B \vee_p B \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $X \vee_p X$, E ’de wedge çarpımıdır, yani i_1, i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : U(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ U – kavşağının bitiş kaldırmasıdır [4].
- 3) X nesnesi p de T_1 dir ancak ve ancak $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [4].

Uyarı 3.1.9. Topolojik uzaylar kategorisinde p de $\overline{T_0}$, p de T_0' ve p de T_1 tanımları sırasıyla bilinen topolojik uzaylardaki klasik p de T_0 ve p de T_1 ayrılma aksiyomlarına indirgenir. Yani p de T_0 olması, her $x \neq p$ için x in p yi ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğunun mevcut olmasıdır veya p nin x i ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğunun mevcut olmasıdır. Benzer olarak p de T_1 olması, her $x \neq p$ için x in p yi ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğunun mevcut olmasıdır ve p nin x i ihtiva etmeyen en az bir açık komşuluğunun mevcut olmasıdır [4].

Topolojik kategorilerdeki yukarıda verilen p de $\overline{T_0}$, p de T_0' ve p de T_1 tanımları kullanılarak, bu kavramlar **Prox** topolojik kategorisinde karakterize edilmiştir.

Tanım 3.1.10. X bir cümle ve $p \in X$ olsun. $\vee_p^\infty X$ sonsuz wedge çarpımı X ’in sayılabilir adetteki ayrık kopyalarını alınması ve bunların p noktasında çakıştırılması ile elde edilir. $X^\infty = X \times X \times \dots$, X ’in sayılabilir kartezyen çarpımı olsun. $A_p^\infty : \vee_p^\infty X \rightarrow X^\infty$ dönüşümü $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, x, p, \dots)$ ve $\nabla_p^\infty : \vee_p^\infty X \rightarrow X$ dönüşümü $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ şeklinde tanımlanır [6]. Burada her $i \in I$ için (x_i) sonsuz wedge’in i -inci bileşeninde ve $x, (p, p, \dots, p, x, p, \dots)$ ifadesinde i -inci yerdedir.

Herhangi bir topolojik kategoride (kuvvetli) kapalı, (kuvvetli) açık, (kuvvetli) bağlantılı ve D-bağlantılı obje tanımları aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.11. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X , E nin bir objesi, $p \in B$ ve F , B nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. q , B / F üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q : U(X) = B \rightarrow B / F = (B / F) \cup \{*\}$ epi U -kaynağının bitiş kaldırması X / F ile gösterilir. Buna durumda;

- 1) p nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\{A_p^\infty : \nabla_p^\infty B \rightarrow U(X^\infty) = B^\infty \text{ ve } \nabla_p^\infty : \nabla_p^\infty B \rightarrow UD(B) = B\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [4].
- 2) $F \subset X$ in kapalı olması için gerek ve yeter şart F nin $\{*\}$ görüntüsünün X / F de kapalı veya $F = \emptyset$ olmasıdır [4].
- 3) $F \subset X$ in kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart X / F nin $\{*\}$ 'da T_1 veya $F = \emptyset$ olmasıdır [4].
- 4) $B = F$ ise bu durumda F hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır [4].

Not 3.1.12. **Top** topolojik uzayların kategorisindeki kapalılık kavramı, topolojik uzaylardaki kapalılık kavramı ile aynıdır ve F nin *kuvvetli kapalı* olması için gerek ve yeter şart F nin kapalı ve her bir $x \notin F$ için F nin x i ihtiva etmeyen en az bir komşuluğunun mevcut olmasıdır. Eğer topolojik uzay T_1 ise kapalı ve kuvvetli kapalı kavramları çıkarır.

Tanım 3.1.13. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X , E nin bir objesi ve F , X in boştan farklı bir alt cümlesi olsun.

- 1) $F \subset X$ açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c , X te kapalıdır.
- 2) $F \subset X$ kuvvetli açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c , X te kuvvetli kapalıdır [15].

Not 3.1.14. **Top** topolojik uzayların kategorisindeki açıklık kavramı, topolojik uzaylardaki açıklık kavramı ile aynıdır. Eğer topolojik uzay T_1 ise açık ve kuvvetli açık kavramı çıkarır.

Tanım 3.1.15. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X , E nin bir objesi olsun.

- 1) X bağlantılıdır ancak ve ancak X in hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dir [15].

- 2) X kuvvetli bağlantılıdır ancak ve ancak X in hem açık hem de kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dir [15].
- 3) D -bağlantılıdır ancak ve ancak X ten herhangi bir diskre objeye tanımlanan herhangi bir dönüşüm sabittir [15].

Not 3.1.16. Topolojik uzaylar kategorisi olan **Top** taki kuvvetli bağlantılılık ve D -bağlantılılık genel anlamdaki bağlantılılık kavramına denk gelir. Eğer bir X topolojik uzayı T_1 ise bağlantılılık ve kuvvetli bağlantılılık kavramları çakışır.

Topolojik kategorilerdeki yukarıda verilen tanımlar kullanılarak, kapalılık ve bağlantılılık kavramları **Prox** topolojik kategorisine aktarılmıştır.

Tanım 3.1.17. X boştan farklı bir cümle ve $X^2 = X \times X$ olsun. X^2 nin iki ayrı kopyasının diagonal boyunca çakıştırılması $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ ile gösterilir. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de bir (x, y) noktası birinci bileşende ise $(x, y)_1$ ile, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. Açık olarak $(x, y)_1 = (x, y)_2 \Leftrightarrow x = y$ dir.

Temel Eksen Dönüşümü (Principle Axis Map), $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$;

$$A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Skewed Eksen Dönüşümü (Skewed Axis Map), $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$;

$$S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Katlama Dönüşümü (The Fold Map), $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$, $i = 1, 2$ için

$$\nabla((x, y)_i) = (x, y)$$

Alt Küme Fonksiyonları (Inclusion Maps), $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$;

$$(x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1 \text{ ve } (x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$$

olarak tanımlanır [4].

$\pi_i : X^3 \rightarrow X$ i -inci izdüşüm fonksiyonları ($i = 1, 2, 3$) olmak üzere π_{ij} ler

$\pi_{ij} = \pi_i + \pi_j : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X$ şeklinde tanımlanmış dönüşümlerdir. Buradan $\pi_1 S = \pi_{11} = \pi_1 A$,

$\pi_2 S = \pi_{21} = \pi_2 A$, $\pi_3 A = \pi_{12}$ ve $\pi_3 S = \pi_{22}$ dir [12].

(X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $(X, \tau) T_0$ dır.
- ii. τ^* , X^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $A: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau^*)$ ve $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [4].
- iii. τ_* , $i_1, i_2: X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ fonksiyonları tarafından üretilen bitiş topolojisi olmak üzere $id: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir [4, 8].
- iv. (X, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay ihtiva etmez [54].
- v. Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç kaynağı mono-kaynaktır [54].
- vi. İki elemanlı bir indiskre topolojik uzaydan (X, τ) topolojik uzayına tanımlı her morfizm sabittir [39].
- vii. Tanım cümlesi (X, τ) olan her başlangıç morfizmi bir monomorfizmdir [17].
- viii. Tanım cümlesi (X, τ) topolojik uzayı olan her başlangıç epimorfizmi bir homeomorfizmdir [27].

Topolojideki klasik T_0 aksiyomunun birçok genelleştirilmesi vardır. İlk olarak 1971'de Brümmer [17] (vii) yi kategoriye genelleştirdi. 1973'te Marny [39] (iv) ve (vi) yı, 1974'te Hoffman [29] (v) i ve 1977'de Harvey [27] (viii) i topolojik kategoriye genişletti. 1991'de Weck-Schwarz (iv), (v), (vi), (vii) ve (viii) in genelleştirmeleri arasındaki ilişkiyi inceledi. 1990'da Baran [3] (ii) ve (iii) ü topolojik kategoriye genişletti ve 1995'te [8] tüm bu farklı genelleştirmelerin ((i)-(viii)) karşılaştırmasını inceledi.

(X, τ) topolojik uzayı T_1 dir ancak ve ancak τ^* , X^3 üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere $S: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau^*)$ ve $\nabla: X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir. 1990'da Baran [3] topolojideki klasik T_1 ayrılma aksiyomunu topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Baran [4, 9] çalışmalarında (i)-(iii) teki T_0 objelerini kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımladı. 1998'de Baran herhangi bir topolojik kategorideki T_3 , T_4 , normal, regüler ve tam regüler objelerin ve kuvvetli kapalı alt cümlelerin tanımlanmasında T_1 objeleri kullandı [11, 12].

Herhangi bir topolojik kategoride $\overline{T_0}$, T_0' , T_0 ve T_1 tanımları aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.18. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X , E nin bir objesi ve $U(X) = B$ olsun.

- 1) X nesnesi $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak $\{A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D , U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [4, 8].
- 2) X nesnesi T_0' dür ancak ve ancak $(B^2 \vee_{\Delta} B^2)'$, $\{i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2\}$ U – kavşağının bitiş kaldırması ve $D(B^2)$ de B^2 üzerindeki diskre yapı olmak üzere $\{id : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(B^2 \vee_{\Delta} B^2)' = B^2 \vee_{\Delta} B^2 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [4, 8].
- 3) X nesnesi T_0 dir ancak ve ancak X uzayı en az iki elemanlı indiskre alt uzay ihtiva etmez [54].
- 4) X nesnesi T_1 dir ancak ve ancak $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [8].

Tanım 3.1.19. Topolojik uzaylar kategorisinde $\overline{T_0}$, T_0' ve T_0 birbirine denktir ve klasik T_0 ayrılma aksiyomuna indirgenir, T_1 de klasik T_1 ayrılma aksiyomuna indirgenir [54]. Herhangi bir topolojik kategori için $\overline{T_0}$, T_0' yü gerektirir fakat bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir. Genelde T_0 ile $\overline{T_0}$ veya T_0' arasında bir ilişki yoktur [8].

Topolojik kategorilerdeki yukarıda verilen $\overline{T_0}$, T_0' , T_0 ve T_1 tanımları kullanılarak, bu kavramlar **Prox** topolojik kategorisinde karakterize edilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. Lokal Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.1.1. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X , E nin bir objesi ve $p \in B$ olsun.

- 1) X nesnesi p de $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak $\{A_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D , U 'nun sol adjointi olan diskre fanktordur [4].
- 2) X nesnesi p de T'_0 dür ancak ve ancak $\{id : B \vee_p B \rightarrow U(X \vee_p X) = B \vee_p B \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada $X \vee_p X$, E 'de wedge çarpımıdır, yani i_1, i_2 kanonik dönüşümler olmak üzere $\{i_1, i_2 : U(X) = B \rightarrow B \vee_p B\}$ U -kavşağının bitiş kaldırmasıdır [4].
- 3) X nesnesi p de T_1 dir ancak ve ancak $\{S_p : B \vee_p B \rightarrow U(X^2) = B^2 \text{ ve } \nabla_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [4].

Teorem 4.1.2. (X, δ) proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) nın p de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dir.

Teorem 4.1.3. Tüm proximity uzaylar p de T'_0 dür.

Teorem 4.1.4. (X, δ) proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) nın p de $\overline{T_0}$ olması için gerek ve yeter şart her $x \neq p$ için $(\{x\}, \{p\}) \notin \delta$ dir.

Yukarıda ifade edilen teoremlerin ispatları [35, 38] de verilmiştir.

4.2. Kapalı ve Kuvvetli Kapalı Objeler

Tanım 4.2.1. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X , E nin bir objesi, $p \in B$ ve F , B nin boştan farklı bir alt cümlesi olsun. q , B / F üzerinde birim ve F yi $\{*\}$ noktasına dönüştüren örten fonksiyon olmak üzere, $q : U(X) = B \rightarrow B / F = (B / F) \cup \{*\}$ epi U -kaynağının bitiş kaldırması X / F ile gösterilir. Buna durumda;

- 1) p nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\{A_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow U(X^\infty) = B^\infty \text{ ve } \nabla_p^\infty : \vee_p^\infty B \rightarrow UD(B) = B\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [4].
- 2) $F \subset X$ in kapalı olması için gerek ve yeter şart F nin $\{*\}$ görüntüsünün X / F de kapalı veya $F = \emptyset$ olmasıdır [4].

- 3) $F \subset X$ in kuvvetli kapalı olması için gerek ve yeter şart X/F nin $\{*\}$ 'da T_1 veya $F = \emptyset$ olmasıdır [4].
- 4) $B = F$ ise bu durumda F hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır [4].

Teorem 4.2.2. (X, δ) proximity uzay ve $p \in X$ olsun. $\{p\}$ X te kapalıdır ancak ve ancak herhangi bir $B \subset X$ için $\{p\} \delta B$ olduğunda $p \in B$ dir.

Teorem 4.2.3. (X, δ) proximity uzay olsun. $\emptyset \neq F \subset X$ kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta F$ olduğunda $x \in F$ dir.

Teorem 4.2.4. (X, δ) proximity uzay olsun. $\emptyset \neq F \subset X$ kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta F$ olduğunda $x \in F$ dir.

Tanım 4.2.5. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X, E nin bir objesi ve F, X in boştan farklı bir alt cümlesi olsun.

- 1) $F \subset X$ açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c , X te kapalıdır.
- 2) $F \subset X$ kuvvetli açıktır ancak ve ancak F nin tümleyeni F^c , X te kuvvetli kapalıdır.

Teorem 4.2.6. (X, δ) proximity uzay olsun. $\emptyset \neq F \subset X$ (kuvvetli) açıktır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta F^c$ olduğunda $x \in F^c$ dir.

Yukarıda ifade edilen teoremlerin ispatları [35, 38] de verilmiştir.

4.3. Bağlantılılık

Tanım 4.3.1. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X, E nin bir objesi olsun.

- 1) X bağlantılıdır ancak ve ancak X in hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dir [15].
- 2) X kuvvetli bağlantılıdır ancak ve ancak X in hem açık hem de kapalı alt cümleleri sadece X ve $\emptyset$ dir [15].
- 3) D-bağlantılıdır ancak ve ancak X ten herhangi bir diskre objeye tanımlanan herhangi bir dönüşüm sabittir [15].

Teorem 4.3.2. (X, δ) proximity uzay olsun. O halde (X, δ) (kuvvetli) bağlantılıdır ancak ve ancak X in boştan farklı herhangi bir F alt cümlesi için aşağıdaki şartlardan biri sağlanır.

- 1) Bazı $x \in X$ için $\{x\} \delta F$ olduğunda $x \in F$ dir.
- 2) Bazı $x \in X$ için $\{x\} \delta F^c$ olduğunda $x \in F^c$ dir.

Teorem 4.3.3. (X, δ) herhangi bir proximity uzay olsun. (X, δ) D-bağılantılıdır ancak ve ancak $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\{x\} \delta \{y\}$ dir.

Yukarıda ifade edilen teoremlerin ispatları [35, 38] de verilmiştir.

4.4. Genel Ayırma Aksiyomları

Tanım 4.4.1. $U : E \rightarrow \text{Set}$ bir topolojik fanktor, X, E nin bir objesi ve $U(X) = B$ olsun.

- 1) X nesnesi $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak $\{A : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U – kaynağının başlangıç kaldırması diskredir. Burada D , U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [4, 8].
- 2) X nesnesi T_0' dür ancak ve ancak $(B^2 \vee_{\Delta} B^2)'$, $\{i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \vee_{\Delta} B^2\}$ U –kavşağının bitiş kaldırması ve $D(B^2)$ de B^2 üzerindeki diskre yapı olmak üzere $\{id : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(B^2 \vee_{\Delta} B^2)' = B^2 \vee_{\Delta} B^2 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [4, 8].
- 3) X nesnesi T_0 dir ancak ve ancak X uzayı en az iki elemanlı indiskre alt uzay ihtiva etmez [54].
- 4) X nesnesi T_1 dir ancak ve ancak $\{S : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \vee_{\Delta} B^2 \rightarrow UD(B^2) = B^2\}$ U –kaynağının başlangıç kaldırması diskredir [8].

Teorem 4.4.2 (X, δ) proximity uzayı T_0 dir ancak ve ancak X teki her farklı x ve y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

Teorem 4.4.2 (X, δ) proximity uzayı $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak X teki her farklı x ve y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

Teorem 3.1.9: Tüm proximity uzaylar T_0' dür.

Teorem 4.4.2 (X, δ) proximity uzayı T_1 dir ancak ve ancak X teki her farklı x ve y çifti için $(\{x\}, \{y\}) \notin \delta$ dir.

Yukarıda ifade edilen teoremlerin ispatları [38] de verilmiştir.

4.5. Karşılaştırma ve İlişkiler

Uyarı 4.5.1. (X, δ) proximity uzay ve $p \in X$ olsun. (X, δ) p de $\overline{T_0}$ veya p de T_1 ise p de T_0' dür. Ancak tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $X = \{a, b\}$ olmak üzere $\delta = \{(X, X), \{\{a\}, \{a\}\}, \{\{b\}, \{b\}\}, (X, \{a\}), \{\{a\}, X\}, (X, \{b\}), \{\{b\}, X\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{b\}, \{a\}\}\}$ olsun. Bu durumda (X, δ) $p = a$ da T_0' dür. Fakat $a \neq b$ olup $\{\{a\}, \{b\}\} \in \delta$ olduğundan $p = a$ da T_1 veya $\overline{T_0}$ değildir.

Uyarı 4.5.2.

- 1) (X, δ) proximity uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\} \delta A$ olduğunda $x \in A$ dir
- 2) **Prox** kategorisindeki kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları genel anlamdaki kapalılık kavramına denk gelir.

Uyarı 4.5.3. (X, δ) proximity uzay olsun. Bu durumda [38]:

- i. (X, δ) T_0 dir ancak ve ancak (X, δ) $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak (X, δ) T_1 dir ancak ve ancak X teki her farklı x ve y için $\{\{x\}, \{y\}\} \notin \delta$ dir.
- ii. (X, δ) T_0 , $\overline{T_0}$ veya T_1 ise T_0' dür. Ancak tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $X = \{x, y\}$ olmak üzere $\delta = \{(X, X), \{\{x\}, \{x\}\}, \{\{y\}, \{y\}\}, (X, \{x\}), \{\{x\}, X\}, (X, \{y\}), \{\{y\}, X\}, \{\{x\}, \{y\}\}, \{\{y\}, \{x\}\}\}$ olsun. Bu durumda (X, δ) T_0' dür, ancak $x \neq y$ olup $\{\{x\}, \{y\}\} \in \delta$ olduğundan (X, δ) T_0 , $\overline{T_0}$ veya T_1 değildir.
- iii. (X, δ) T_1 dir ancak ve ancak $\overline{T_0}$ dir ancak ve ancak X teki tüm p noktaları için p de T_1 dir ancak ve ancak X teki tüm p noktaları için p de $\overline{T_0}$ dir.
- iv. (X, δ) T_0' dür ancak ve ancak X teki tüm p noktaları için p de T_0' dür.

Buradan aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Uyarı 4.5.4. (X, δ) proximity uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [38]:

- i. (X, δ) T_0 dir.
- ii. (X, δ) $\overline{T_0}$ dir.
- iii. (X, δ) T_1 dir.
- v. X teki herhangi farklı x ve y noktaları için $\{\{x\}, \{y\}\} \notin \delta$ dir.

- iv. X teki her p noktası için (X, δ) p de T_1 dir.
- v. X teki her p noktası için (X, δ) p de $\overline{T_0}$ dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu proje çalışmamızda proximity uzaylar ele alındı. İlk olarak, proximity uzayların tanımı verilerek; proximity uzaylar ve p – dönüşümlerden oluşan **Prox** kategorisinin topolojik kategori olduğu gösterildi. p noktasında $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 proximity uzaylar karakterize edildi ve birbirleri arasındaki ilişkiler incelendi. Ardından proximity uzaylarda geneldeki $\overline{T_0}$, T_0' ve T_1 ayırma aksiyomları incelendi. Ayrıca lokalde yani bir p noktasındaki T_i , $i = 0,1$ proximity uzaylar ile T_i , $i = 0,1$ proximity uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi. Son olarak proximity uzaylarda kapalı ve kuvvetli kapalı alt cümleler karakterize edildi ve bilinen kapalı alt cümlelerle ilişkiler incelendi. Bununla birlikte proximity uzaylarda bağlantılılı, kuvvetli bağlantılı ve D-bağlantılı alt cümlelerin bazı özellikleri verildi.

Proximity uzaylar topolojik bakımdan çok zengin özelliklere sahiptirler. Bu nedenle proximity yapısı ve bu yapının topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve uniform uzaylarla olan ilişkileri birçok matematikçi tarafından incelenmiş ve bu alanda birçok araştırma yayınlanmıştır. Fakat proximity uzaylar topolojik kategorisi alanında çalışmaları olan araştırmacıların sayısı oldukça azdır. Bu proje çalışması; genel temel fikirler altında yatan çeşitli bağlantısız teorem ve yapıları yüzeye çıkararak eski problemlere yeni bir anlam kazandıracak, proximity yapılarla ilgili bu problemlerin çözümlerine katkıda bulunacaktır. Proje sonucunda elde edilen verilerle diğer bilim insanları kendi çalışma alanları için daha kolay ve daha geniş bir alanda şimdiye kadar yapmış oldukları çalışmaları geliştirme fırsatı bulacaklardır.

Proje kapsamında yapılan akademik çalışmalar aşağıda özetlenmiştir:

1. Proje sonucunda elde edilen veriler ışığında doktora öğrencisi Tuğba Maraşlı “**Proximity uzaylar kategorisinde ayırma aksiyomları**” başlıklı doktora tezini [38] başarıyla tamamlamıştır.

2. Projede araştırmacı olarak görev alan Samed Özkan Orta Doğu Teknik Üniversitesi’nde gerçekleştirilen 10. Ankara Matematik Günleri sempozyumunda bu proje kapsamında “**Proximity uzaylar kategorisinde (kuvvetli) kapalılık**” başlıklı bir bildiri sunmuştur.

Tüm bu sonuçlar göze alındığında proje önerisinde belirtilen hedeflere ulaşılmıştır.

5.1. Öneriler

Öncelikle yapılan bu çalışmalar Pervin [43] tarafından tanımlanan quasi-proximity uzayların topolojik kategorisi için genelleştirilebilir. Ayrıca ileride yapılacak çalışmalarda **Prox** kategorisinde aşağıdaki sorular incelenebilir:

- Pre-Hausdorff, Hausdorff, normal ve regüler proximity uzaylar karakterize edilebilir mi?
- Kompakt proximity uzaylar karakterize edilebilir mi?
- Eğer bunlar karakterize edilebilir ise bunlarla klasik olanlar arasındaki ilişkiler nelerdir?

Bu problemlerle ilgili çalışmalarımız başlamıştır. Projemiz araştırmacılarından Samed Özkan doktora tez konusu olarak bu soruların yanıtlarını aramaktadır.

Bilindiği gibi proximity bağıntılarının iki formu mevcuttur. Bunlardan biri klasik anlamda ele aldığımız uzaysal (spatial) EF-proximity; diğeri ise son yıllarda çok fazla uygulaması olan ve farklı alanlara uygulanabilirliği yüksek olan betimsel (descriptive) EF-proximitydir. Betimsel EF-proximity belirli özelliklere göre sınıflandırdığımız nesnelerin betimsel olarak yakınlığını inceler. Betimsel EF-proximity, tek bir dijital görüntünün içindeki parçaların veya ayrık dijital görüntülerdeki yakın ya da uzak kümelerin parçalarının tanımlanması, betimlenmesi, analiz edilmesi ve sınıflandırılması konusunda oldukça yararlı ve kullanışlıdır.

İşte bu şekilde betimsel EF-proximity uzaylardaki ayırma aksiyomları proximity uzayların topolojik kategorisine aktarıldığında ortaya çıkan sonuçlar aynı problemlere farklı boyutta, daha kaliteli ve daha kapsamlı yeni anlamlar kazandırabilir. Bu da yeni çalışma alanları oluşmasına yardımcı olur.

Zaten son yıllarda proximity uzaylar teorisinin sitoloji (hücre biyolojisi) alanında [42, s.44], kriminolojide el yazısı sahteciliği ve sahte imza tespitinde; zoolojide de kamuflaj konusunda uygulamalarının mevcut olduğunu gösteren birçok araştırma yayınlanmıştır [44, 45].

KAYNAKLAR

1. Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E. 1990. Abstract and Concrete Categories. New York: Wiley.
2. Alfsen, E. M., Fenstad, J. E. 1959. On the Equivalence Between Proximity Structures and Totally Bounded Uniform Structures, Math. Scand., 7, pp. 353–360.
3. Baran, M. 1990. Separation Properties in Topological Categories, Ph. D. Thesis, University of Miami.
4. Baran, M. 1992. Separation properties, Indian J. Pure Appl. Math., 23, 333-341.
5. Baran, M. 1992. Separation Properties at p for the Topological Categories of Reflexive Relation Spaces and Preordered Spaces, Math. Balkanica, 3, 193-198.
6. Baran, M. 1993. The notion of closedness in topological categories, Comment. Math. Univ. Carolinae, 34, 383-395.
7. Baran, M. 1994. Generalized Local Separation Properties, Indian J. Pure Appl. Math., 25, 615-620.
8. Baran, M. and Altindis, H. 1995. T_0 -objects in topological categories, J. Univ. Kuwait (Sci.) 22, 123-127.
9. Baran, M., Altindis, H. 1996. T_2 -objects in topological categories, Acta Math. Hungar., 71 (1-2), 41-48.
10. Baran, M. 1997. A notion of compactness in topological categories, Publ. Math. Debrecen, 50 no. 3-4, 221-234.
11. Baran, M. 1998. T_3 and T_4 -objects in topological categories, Indian J. Pure Appl. Math., 29, 59-69.
12. Baran, M. 1998. Completely Regular Objects and Normal Objects in topological categories, Acta Math. Hungar., 80 no. 3, 211-224.
13. Baran, M. 2000. Closure operators in convergence spaces, Acta Mathematica Hungarica, 87, 33-45.
14. Baran, M. 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, Applied Categorical Structures, 10, 403-415.
15. Baran, M., Kula, M. 2006. A note on connectedness, Publ. Math. Debrecen, 68/3-4, 489-501.
16. Baran M., Al-Safar J. 2011. Quotient-Reflective and Bireflective Subcategories of the category of Preordered Sets, Topology and its Appl., 158, 2076-2084.
17. Brümmer, G. C. L. 1971. A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology, Thesis, Univ. Of Cape Town.
18. Dikranjan, D., Giuli, E. 1987. Closure operators I, Topology Appl., 27, 129-143.

19. Efremovič, V. A. 1951. Infinitesimal spaces (Rusça), Doklady Akademii Nauk SSSR, 76, 341-343, *MR* 12, 744.
20. Efremovič, V. A. 1952. The geometry of proximity I (Rusça), Matematicheskii Sbornik, 31 (73), 189-200, *MR* 14, 1106.
21. Eilenberg, S., Mac Lane, S. 1945. Relation between homology and homotopy groups of spaces, Annals of Mathematics, 46, 480-509.
22. Eilenberg, S., Mac Lane, S. 1945. General Theory of Natural Equivalences, Transactions of the American Mathematical Society, 58 (2), 231-294.
23. Friedler, L. M. 1972. Mappings of Proximity Spaces. PH. D. Thesis. University of Alberta.
24. Gal, I. S. 1959. Proximity Relation and Precompact Structures, Indag. Math., 21, pp. 304–326.
25. Goetz, A. 1962. On a notion of uniformity for L -spaces of Fréchet, Colloquium Mathematicum, 9, 223-231, *MR* 25, 5491.
26. Goetz, A. 1967. Proximity-like structures in convergence spaces (Presented at conference on General Topology at Arizona State University), Preprint, University of Notre Dame.
27. Harvey, J. M. 1977. T_0 -Seperation in Topological Categories, Quaestiones Math., 2, 177-190.
28. Herrlich, H. 1975. Topological Functors, Gen. Top. Appl., 4, 125-142.
29. Hoffman, R-E. 1974. (E, M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, Universitat Duseldorf.
30. Hunsaker, W. N., Sharma, P.L. 1974. Proximity spaces and topological functors, Proceedings of the American Mathematical Society, 45, 419-425.
31. Johnstone, P. T. 1977. Topos Theory. New York: Academic Press.
32. Katetov, M. 1960. Uber Die Berührungsraume (German), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math. Natur, R.9, 685-691.
33. Kent, D. C. 1969. Convergence Quotient Maps, Fund. Math., 165, 197-205.
34. Krishna Murti, S. B. 1940. A set of axioms for topological algebra, Journal of the Indian Mathematical Society, 4: 116-119, *MR* 2, 69.
35. Kula, M., Maraşlı, T. and Özkan, S. 2014. A Note on Closedness and Connectedness in the Category of Proximity Spaces, Filomat, 28 (7), 1483-1492.
36. Leader, S. 1964. On products of proximity spaces, Mathematische Annalen, 154, 185-194, *MR* 28, 5420.
37. Lodato, M. W. 1964. On topologically induced generalized proximity relations, Proceedings of the American Mathematical Society, 15, 417-422, *MR* 28, 4513.

38. Maraşlı, T. 2015. Proximity Uzaylar Kategorisinde Ayrılma Aksiyomları, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.
39. Marny, T. H. 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien, Dissertation, Freie Univ., Berlin.
40. Mrówka, S. G. 1957. On the uniform convergences in proximity spaces (Rusça), Bulletin Academic Polonaise des Sciences Cl. III, 5, 255-257, *MR* 19, 669.
41. Naimpally, S. A., Warrack, B. D. 1970. Proximity Spaces. Cambridge: Cambridge University Press.
42. Naimpally, S. A., Peters, J. F. 2013. Topology with Applications: Topological Spaces via Near and Far. Singapore: World Scientific.
43. Pervin, W. J. 1963. Quasi-proximities for topological spaces, Mathematische Annalen, 150, 325-326, *MR* 27, 1917.
44. Peters, J. F. 2013. Local near sets: Pattern discovery in proximity spaces, Math. in Comp. Sci., 7(1), 87-106.
45. Peters, J., Hettiarachichi, R. 2013. Visual Motif Patterns in Separation Spaces, Theory and Appl. of Math. and Computer Sci., 3 (2), 36-58.
46. Poljakov, V. Z. 1965. On uniform convergence spaces (Rusça), Colloquium Mathematicum, 13, 167-179.
47. Riesz, F. 1908. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, pp. 18-24, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Rome, 1908), Vol. II.*
48. Schwartz, F. 1978. Connections Between Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math. No.719, Springer-Verlag, 345-354.
49. Smirnov, Y. M. 1964. On Proximity Spaces, Amer. Math. Soc. Transl., (2), 38, 5–35.
50. Smirnov, Y. M. 1964. On Completeness of Proximity spaces I, Amer. Math. Soc. Transl., (2), 38, pp. 37–73.
51. Spivak, D. I. 2013. Category Theory for Scientists. Free online.
52. Szymanski, P. 1941. La notion des ensembles sepaes comme terme primitif de la topologie, Mathematic Timisoara, 17, 65-84, *MR* 4, 87.
53. Wallace, A. D. 1941. Seperation Spaces, Annals of Math., 43, 687–697.
54. Weck-Schwarz, S. 1991. T_0 -objects and separated objects in topological categories, Quastiones Math.14, 315-325.
55. Wyler, O. 1971. Top Categories and Categorical Topology, General Topology and its Appl., 11, 17-28.